

EJERCICIOS DE LAS LECCIONES 1,2 y 3**1. OPERACIONES ELEMENTALES Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA**

1.1 Exprese en forma binómica y represente gráficamente los siguientes números complejos:

a) $(1 + i) \cdot (3 + 2i)$. (Solución: $1 + 5i$)

b) $\frac{1 - i}{1 + i}$. (Solución: $-i$)

c) $\frac{10}{1 - 3i}$. (Solución: $1 + 3i$)

d) $\frac{1 + 2i}{3 - 4i} + \frac{2 - i}{5i}$. (Solución: $-2/5$)

e) $\frac{10}{(1 + i)(2 + i)(3 + i)}$. (Solución: $-i$)

f) $(3 + 2i)^3$. (Solución: $-9 + 46i$)

g) $(1 + \sqrt{3}i)^3$. (Solución: -8)

h) $(2 - i)^4$. (Solución: $-7 - 24i$)

i) $(\sqrt{3} + i)^{15}$. (Solución: $32768i$)

1.2 Represente en el plano complejo los conjuntos:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\}$.

b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| \leq 1\}$.

c) $\{z \in \mathbb{C} : |2z - i| = 2\}$.

d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \leq |z|\}$.

e) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(\bar{z} - i) = 2\}$.

1.3 Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Pruebe que $|z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$.

1.4 Pruebe la fórmula del binomio de Newton: $(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} w^k$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ (Utilice el método de Inducción).

1.5 Demuestre que $|z + 1| > |z - 1|$ si, y sólo si, $\operatorname{Re}(z) > 0$.

1.6 Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que su parte imaginaria es positiva. Pruebe que $\left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right| < 1$. Interpretelo gráficamente.

1.7 Calcule y represente gráficamente:

- (a) $\sqrt[3]{i}$. (Solución: $-i, (\sqrt{3} + i)/2, (-\sqrt{3} + i)/2$)
- (b) $\sqrt[4]{-1}$. (Solución: $(1 + i)/\sqrt{2}, -(1 + i)/\sqrt{2}, (-1 + i)/\sqrt{2}, -(-1 + i)/\sqrt{2}$)
- (c) $\sqrt{1 - i}$. (Solución: $\pm \sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$)

1.8 Calcule las raíces de los siguientes polinomios:

- (a) $z^2 + 1$. (Solución: $\pm i$)
- (b) $z^2 - i$. (Solución: $\pm(1/\sqrt{2})(1 + i)$)
- (c) $z^3 + i$. (Solución: $i, e^{-i\pi/6}, e^{-i5\pi/6}$)
- (d) $z^4 + z^2 + 1$. (Solución: $e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}, e^{i2\pi/3}, e^{-i2\pi/3}$)
- (e) $z^2 + 2z + 1 - i$. (Solución: $-1 + 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}, -1 - 1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}$)

2. FUNCIONES ANALÍTICAS

2.1 Halle $f(A)$, siendo $A = [0, 1] \times [0, 2]$ y $f(z) = 1 + i - iz$. (Solución: $f(A) = [1, 3] \times [0, 1]$)

2.2 Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq 0, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ y $f(z) = (1 + i)z + i$. Calcule y represente gráficamente $f(A)$. (Solución: $f(A) = \{z \in \mathbb{C} : z = i + re^{i\theta}, 0 \leq r \leq \sqrt{2}, \theta \in [\pi/4, 3\pi/4]\}$)

2.3 Sean $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$ y $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$. Halle una función entera que transforme biyectivamente A en B . (Solución: $f(z) = 2(z - i)$)

2.4 Halle los puntos en los que las funciones siguientes son derivables y calcule la derivada:

- (a) $f(x + iy) = x^2 + i2xy$. (Solución: $\mathbb{R}$)
- (b) $f(x + iy) = 2xy + i(x + \frac{2}{3}y^3)$. (Solución: $-1/2, (-1/2) + i$)
- (c) $f(z) = \bar{z}$. (Solución: En ningún punto)
- (d) $f(z) = z\bar{z}$. (Solución: 0)
- (e) $f(x + iy) = \exp(x^2 - y^2)(\cos(2xy) + i \operatorname{sen}(2xy))$. (Solución: $\mathbb{C}$)

2.5 Sea $f(x + iy) = \frac{(1 + i)x^3 - (1 - y)y^3 + iy^3}{x^2 + y^2}$ si $x + iy \neq 0$ y $f(0) = 0$. Pruebe que f verifica las condiciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$ pero que no es derivable en dicho punto.

2.6 Sea f una función analítica en $B(a, r)$, ($r > 0$ y $a \in \mathbb{C}$) que sólo toma valores reales. Pruebe que f es constante.

2.7 Sea f una función derivable en $B(a, r)$, ($r > 0$ y $a \in \mathbb{C}$). Pruebe que si f tiene módulo constante en dicho conjunto, entonces f debe ser constante.

2.8 Pruebe que las únicas funciones enteras de la forma $f(x + iy) = u(x) + iv(y)$, donde u y v son funciones reales, vienen dadas por $f(z) = az + c$, siendo $a \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{C}$.

2.9 Pruebe que $u(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y$ es armónica en $\mathbb{R}^2$ y calcule una armónica conjugada. (Solución: $v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y$)

2.10 Calcule, si existe, una armónica conjugada de $u(x, y) = \exp(x^2 - y^2) \operatorname{sen} x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. FUNCIONES ELEMENTALES

3.1 Halle los ceros de las siguientes funciones:

a) $1 + e^z$. (Solución: $(2k + 1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$)

b) $1 + i - e^z$. (Solución: $\log \sqrt{2} + (\pi/4 + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$)

c) $\operatorname{sh}(z)$. (Solución: $k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$)

d) $\operatorname{ch}(z)$. (Solución: $(\pi/2 + k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$)

e) $\operatorname{sen}(z^2)$. (Solución: $\pm\sqrt{k\pi}$ si $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ ó $\pm\sqrt{|k|\pi}i$ si $k \leq 0$, $k \in \mathbb{Z}$)

f) $e^{z^2} - 1$. (Solución: $\pm\sqrt{2k\pi}e^{i\pi/4}$ si $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ ó $\pm\sqrt{2|k|\pi}e^{i3\pi/4}$ si $k \leq 0$, $k \in \mathbb{Z}$)

g) $\log_{2\pi}(z)$. (Solución: Ninguno)

h) $\operatorname{sen}(z) - 2$. (Solución: $\pi/2 + k2\pi - i\operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$)

3.2 Sea $f(z) = z \operatorname{sen}(1/z)$ si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $f(0) = 0$. Pruebe que f no es continua en $z = 0$.

3.3 Sea $A = \{z = x + yi \in \mathbb{C} : |x| < 1, |y| < 1\}$. Halle la imagen de A mediante las funciones $f(z) = \exp(\pi z)$ y $g(z) = \exp(\pi z/2)$.

3.4 Demuestre las relaciones siguientes:

a) $\operatorname{sen}(2z) = 2 \operatorname{sen}(z) \cos(z)$.

b) $\cos(2z) = \cos^2(z) - \operatorname{sen}^2(z)$.

3.5 Determine los valores de α para los que $\log_{\alpha} e^{2+i} = 2 + i$. (Solución: $\alpha \in (1 - \pi, 1 + \pi)$)

3.6 Halle el dominio de definición de $f(z) = \log_0(1 - z^2)$. (Solución: $\mathbb{C} - ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \times \{0\})$)