

Capítulo 8

Series de Fourier

8.1. Desarrollo en serie de Fourier

En esta sección vamos a tratar de expresar una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica como suma de una cierta serie.

Recordemos que una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es periódica si existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $f(t+mT) = f(t)$, $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}$

Llamaremos periodo (también se llama periodo fundamental) al menor valor $T > 0$ que verifica la relación anterior.

Para dar una medida del número de repeticiones por unidad de t se define la frecuencia de una función periódica como $\frac{1}{T}$. También es habitual usar el concepto frecuencia circular $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Ejemplo 8.1 Las funciones $\sin(t)$ y $\cos(t)$ son periódicas y de periodo 2π . Su frecuencia es $\frac{1}{2\pi}$ y su frecuencia circular es 1.

Ejemplo 8.2 La función $A \sin(\lambda t + \phi)$ es periódica de periodo $2\pi/\lambda$.

Las funciones de la forma $A \sin(\lambda t + \phi)$ se llaman funciones con comportamiento armónico donde A es la amplitud y ϕ la fase.

Una función periódica con periodo T con comportamiento no armónico y que satisface ciertas condiciones que se estudiarán, puede escribirse como la suma de funciones armónicas de diferentes amplitudes, fases y periodos, esto es:

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \phi_2) + \cdots + A_n \sin(n\omega t + \phi_n) + \cdots \quad (8.1)$$

Donde A_k y ϕ_k son constantes y ω es la frecuencia circular de f . Al término $A_n \sin(n\omega t + \phi_n)$ le llamaremos componente n -ésima armónica de f , o simplemente n -ésima armónica de f , a A_n amplitud de la n -ésima armónica y a ϕ_n su ángulo fase.

Como

$$A_n \sin(n\omega t + \phi_n) = \underbrace{A_n \cos \phi_n}_{b_n} \sin(n\omega t) + \underbrace{A_n \sin \phi_n}_{a_n} \cos(n\omega t),$$

el desarrollo 8.1 de f puede escribirse como:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (8.2)$$

Debido a la periodicidad de la función y de la serie será suficiente trabajar en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, aunque podríamos elegir cualquier intervalo de longitud T

Lo primero que debemos plantearnos es cómo elegir los coeficientes. Para ello multiplicamos por $\cos(m\omega t)$ e integramos en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, suponiendo que en efecto se cumple la igualdad, que las integrales obtenidas existen y que puede permutarse el sumatorio con la integral se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega t) dt &= A_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega t) dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt + b_n \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) dt \right) \end{aligned}$$

Para la resolución de las integrales dadas son útiles las relaciones siguientes, conocidas como **relaciones de Euler**: para $m, n \in \mathbb{N}$ y $\omega = \frac{2\pi}{T}$ se verifica

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \frac{T}{2} & \text{si } m = n \neq 0. \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \frac{T}{2} & \text{si } m = n \neq 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t) dt = 0 \quad (8.5)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0, \\ T & \text{si } n = 0. \end{cases} \quad (8.6)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(n\omega t) dt = 0 \quad (8.7)$$

Utilizando los resultados 8.3, 8.5 y 8.6 e llega a las expresiones:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (8.8)$$

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega t) dt \quad (8.9)$$

Para unificar la definición se suele llamar a_0 al coeficiente $2A_0$, por lo que la condición 8.9 se generaliza para todo $m = 0, 1, \dots$

Si ahora multiplicamos por $\operatorname{sen}(m\omega t)$ y procedemos como antes, utilizando los resultados 8.4, 8.5 y 8.7, obtenemos:

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}(m\omega t) dt \quad (8.10)$$

A la vista de 8.9 y 8.10 es razonable realizar la siguiente definición:

Definición 8.1 Sea $f : \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, se llama **desarrollo en serie de Fourier** de f en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ a la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t)) \quad (8.11)$$

donde $w = \frac{2\pi}{T}$ y para $n = 0, 1, 2, \dots$, los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}(n\omega t) dt \quad (8.12)$$

siempre que existan dichas integrales.

Suele escribirse

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t)) \quad (8.13)$$

aunque también, es frecuente sustituir símbolo " $\sim$ " por " $=$ ". Cuando se estudie la convergencia de la serie de Fourier se matizará esta cuestión.

Para que la serie de Fourier exista únicamente debe exigirse que existan las integrales que aparecen en 8.12. Esto sucede, por ejemplo, si f es una función continua a trozos en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Este tipo de funciones cubre un amplio número de casos aunque pueden darse condiciones más generales.

Recordemos que una función f es **continua a trozos** en un intervalo $[a, b]$ si existe una partición $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ tal que f es continua en (x_{k-1}, x_k) para $k = 1, 2, \dots, n$ y existen los límites laterales de la función en todos los puntos. Esto conlleva que f ha de ser acotada en $[a, b]$.

Dado que los coeficientes de Fourier se calculan a partir de integrales definidas, se observa que éstos coinciden en funciones que sólo difieren en un número finito de puntos, por lo que se suele hacer un abuso de lenguaje y trabajar indistintamente en el intervalo abierto, cerrado o semiabierto, e incluso hacer los cálculos en funciones que no se han definido en un número finito de puntos, siempre que las integrales planteadas existan. Más adelante hablaremos de lo que ocurre con la convergencia en estos casos.

Ejemplo 8.3 Halle la serie de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq t \leq 0, \\ 1 & \text{si } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

Solución:
$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)t)}{2n-1}$$

Observemos que el valor que toma la función en el punto 0 o en los extremos del intervalo no influye en el cálculo de los coeficientes de la serie, por lo tanto, admitiremos que la serie anterior también es la serie de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq t < 0, \\ 1 & \text{si } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

a pesar de que el valor de f en el punto 0 no está definido.

Ejemplo 8.4 Halle la serie de Fourier de la función $f(t) = t$, $t \in [-\pi, \pi]$.

Solución:
$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen}(nt)$$

Ejemplo 8.5 Halle la serie de Fourier de la función $f(t) = t^2, \forall t \in [-\pi, \pi]$.

$$\text{Solución: } \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$$

Ejemplo 8.6 Halle la serie de Fourier de la función definida sobre $[-\pi, \pi]$: $f(t) = |t|$.

$$\text{Solución: } \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)t)$$

Veamos ahora dos propiedades de las series de Fourier muy sencillas de demostrar. La primera relativa a casos particulares de simetría y la segunda a la linealidad.

Proposición 8.1 Sea $f : \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$ su serie de Fourier. Se verifica entonces:

(a) Si f es par ¹ $b_n = 0, \forall n = 1, 2, \dots$ y

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dx \quad (8.14)$$

(b) Si f es impar ² $a_n = 0, \forall n = 0, 1, \dots$ y

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dx \quad (8.15)$$

Proposición 8.2 Sean f y g dos funciones definidas en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ cuyos coeficientes de Fourier son respectivamente a'_n, b'_n y a''_n, b''_n . Se verifica entonces que, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ los coeficientes de la serie de Fourier de $\lambda f + \mu g$ son $a_n = \lambda a'_n + \mu a''_n$ y $b_n = \lambda b'_n + \mu b''_n$.

Ejemplo 8.7 Halle los coeficientes de la serie de Fourier de $f(t) = t + t^2, t \in [-\pi, \pi]$.

8.2. Convergencia de la serie de Fourier

Teorema 8.1 Sea $f : \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ una función que cumple

¹Una función par es la que verifica $f(t) = f(-t) \forall t$

²Una función impar es la que verifica $f(t) = -f(-t) \forall t$

- a) f tiene un número finito de discontinuidades y existen los límites laterales en todo el intervalo y
- b) f tiene un número finito de máximos y mínimos aislados.

Entonces su serie de Fourier es convergente $\forall t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Además:

- si f es continua en el punto $t \in \left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$, la serie de Fourier converge a $f(t)$ y,
- si t es un punto de discontinuidad de f entonces la serie de Fourier converge al valor³
 $\frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$
- Para $t = \pm \frac{T}{2}$ la serie converge a $\frac{1}{2} \left(f\left(\frac{T^-}{2}\right) + f\left(-\frac{T^+}{2}\right) \right)$

Ejemplo 8.8 . Estudie si las funciones siguientes verifican las condiciones del teorema 8.1 en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$\frac{1}{3-t}, \quad \text{sen}\left(\frac{1}{t}\right), \quad |t|, \quad \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq t \leq 0, \\ 1 & \text{si } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 1: Las condiciones del teorema 8.1, llamadas habitualmente condiciones de Dirichlet, son condiciones suficientes de convergencia de la serie de Fourier, no necesarias, por lo que puede haber funciones que no las verifiquen cuya serie de Fourier sea convergente.

OBSERVACIÓN 2: Si la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es periódica de periodo T , pueden estudiarse las condiciones de Dirichlet para cualquier intervalo de la forma $\left[d - \frac{T}{2}, d + \frac{T}{2}\right]$, donde $d \in \mathbb{R}$ cualquiera.

OBSERVACIÓN 3: Es habitual utilizar las series de Fourier para aproximar funciones por un número finito de sumandos. En este sentido conviene observar que en torno a los puntos de discontinuidad de la función la suma parcial de la serie posee unas oscilaciones que no desaparecen si se aumenta el número de términos, esto es conocido como **fenómeno de Gibbs**.

³Notación: $f(t^+) = \lim_{y \rightarrow t^+} f(y)$, $f(t^-) = \lim_{y \rightarrow t^-} f(y)$

8.3. Series en senos y en cosenos

Veamos cómo desarrollar una función $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ en series de senos y de cosenos, es decir, busquemos desarrollos en serie como sigue:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \quad f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$

Recordemos que para desarrollar en serie de Fourier una función partíamos de la hipótesis de que la función es periódica, aunque sólo es necesario conocer su expresión en un intervalo de longitud T , por ejemplo, $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. En nuestro caso buscamos realizar el desarrollo sólo en el intervalo de definición de la función, pero vamos a utilizar las propiedades estudiadas para funciones periódicas, extendiéndola y construyendo a partir de ella una función periódica definida en todo $\mathbb{R}$.

Definición 8.2 Sea $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una función, llamaremos su extensión periódica par a la función $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par y periódica de periodo $2T$ definida como sigue:

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t \leq T \\ f(-t) & -T \leq t \leq 0 \end{cases} \\ F(t + 2T) = f(t)$$

Si f satisface las condiciones de Dirichlet en $[0, T]$, también las cumple F en $[-T, T]$, y podemos realizar el desarrollo de Fourier, que, al ser F es una función par, verificará $b_n = 0$, por lo que obtenemos que, si $t \in [0, T]$

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt$$

Al desarrollo obtenido se le denomina desarrollo en serie de Fourier de cosenos.

Definición 8.3 Sea $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una función, llamaremos su extensión periódica impar a la función $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par y periódica de periodo $2T$ definida como sigue:

$$G(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t \leq T \\ -f(-t) & -T \leq t \leq 0 \end{cases} \\ G(t + 2T) = f(t)$$

Si f satisface las condiciones de Dirichlet en $[0, T]$, también las cumple G en $[-T, T]$, y podemos realizar el desarrollo de Fourier, que, y dado que G es una función impar, verificará $b_n = 0$, por lo que obtenemos que, si $t \in [0, T]$

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{T} \right)$$

donde

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{T} \right) dt$$

Al desarrollo obtenido se le denomina desarrollo en serie de Fourier de senos.

Ejemplo 8.9 *Se considera la función $f(t) = t$ definida en el intervalo $[0, 4]$, obtener un desarrollo en serie de cosenos y un desarrollo en serie de senos. Dibuja las gráficas de las extensiones periódicas par e impar de la función f en el intervalo $[-12, 12]$*

8.4. Forma compleja de la serie de Fourier

Veremos ahora otra forma de expresar la serie de Fourier utilizando la exponencial compleja.

Proposición 8.3 *Sea $f : \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$. La serie de Fourier puede escribirse como*

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int\omega} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{int\omega} \quad (8.16)$$

donde, para $n \in \mathbb{Z}$, los coeficientes vienen dados por

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-int\omega} dt$$

Además, si a_n y b_n son los coeficientes de su serie de Fourier expresada en la forma 8.11, se verifican las relaciones

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \text{ para } n \in \mathbb{N} \quad (8.17)$$

Ejemplo 8.10 *Obtener la forma compleja de la serie de Fourier de la función diente de sierra $f(t)$ definida por $f(t) = \frac{2t}{T}$ con $t \in [0, 2T]$, $f(t + m2T) = f(t)$ con $t \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$*

Otro fenómeno que se observa en los ejemplos, conocido como **fenómeno de Gibbs**, es que cuando se trunca la serie, en los puntos de discontinuidad de la función aparecen unas oscilaciones. Éstas no desaparecen si se aumenta el número de términos de la serie, sino que se ciñen más al punto. (Ver figuras 8.1 y 8.2)

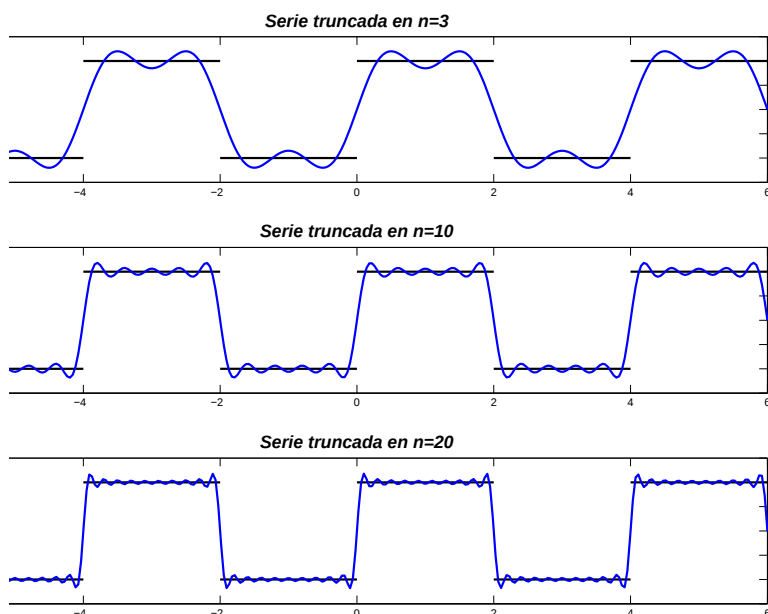


Figura 8.1: Extensión periódica de la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-2, 0[\\ 2 & \text{si } x \in [0, 2[\end{cases}$, y su serie truncada para $n = 3$, $n = 10$ y $n = 20$

8.5. Integración y derivación de una serie de Fourier

Proposición 8.4 Sea f una función de periodo T que satisface las condiciones de Dirichlet en $[-T/2, T/2]$ y sea

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(wnt) + b_n \sin(wnt))$$

su serie de Fourier. Dados $t_1, t \in [-T/2, T/2]$, $t_1 < t$, la expresión anterior puede integrarse término a término en $[t_1, t]$ verificándose

$$\int_{t_1}^t f(t) dt = \frac{a_0}{2}(t - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_1}^t (a_n \cos(wnt) + b_n \sin(wnt)) dx \quad (8.18)$$

Si integramos se obtiene:

$$\int_{t_1}^t f(t) dt = \frac{a_0 t}{2} + A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-b_n}{wn} \cos(nwt) + \frac{a_n}{wn} \sin(nwt) \right) \quad (8.19)$$

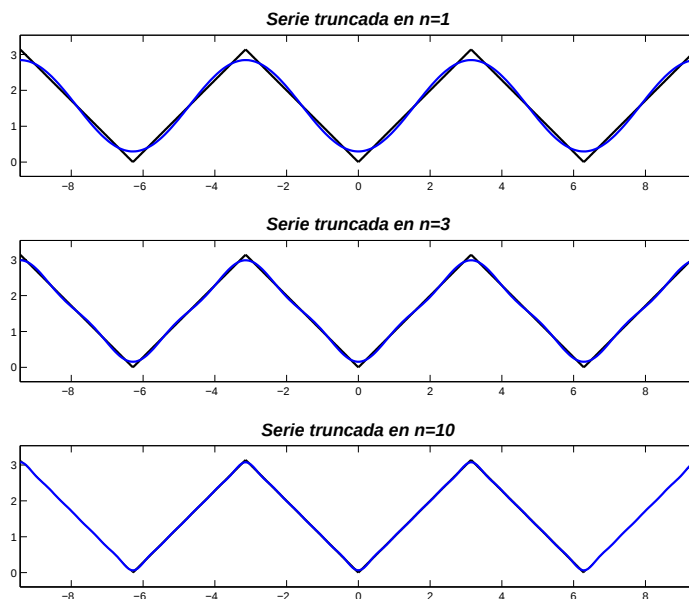


Figura 8.2: Extensión periódica de la función $f(x) = |x|$, en $x \in]-\pi, \pi[$ y su serie truncada para $n = 1$, $n = 3$ y $n = 10$

siendo

$$A = \frac{-a_0 t_1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-a_n}{wn} \operatorname{sen}(wnt_1) + \frac{b_n}{wn} \cos(wnt_1) \right)$$

Observe que el lado derecho de 8.19 no es una serie de Fourier debido al término $\frac{a_0 t}{2}$. Pasando éste al primer miembro queda la serie de Fourier de la función

$$g(t) = \int_{t_1}^t f(t) dt - \frac{a_0 t}{2}$$

Ejercicio 8.1 Se considera la función $f(x) = x^2$ en $[-\pi, \pi]$. Integrando su serie de Fourier, halle la serie de Fourier de $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi^2}{3}x$ en $[-\pi, \pi]$.

Proposición 8.5 Sea f una función de periodo T que satisface las condiciones de Dirichlet en $[-T/2, T/2]$ y sea

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(wnt) + b_n \operatorname{sen}(wnt))$$

su serie de Fourier. Supongamos que f continua $\forall t \in \mathbb{R}$ y que su derivada verifica las condiciones de Dirichlet en $[-T/2, T/2]$. Entonces, la serie de Fourier de f' puede hallarse derivando la serie de Fourier de f ,

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(wnt) + b_n \operatorname{sen}(wnt))'$$

Ejercicio 8.2 *Aplique la proposición anterior para obtener la serie de Fourier de $f(x) = x$ derivando la serie de Fourier de la función $f(x) = x^2$ en $[-\pi, \pi]$.*

Capítulo 9

Ecuaciones en derivadas parciales

9.1. Edp lineales con coeficientes constantes

Las edp surgen en el estudio de fenómenos en los que la incógnita es una función que depende de dos o más variables independientes. Una edp de segundo orden en dos variables puede escribirse en la forma

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + D \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + E \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + Fu(x, y) = f(x, y)$$

donde $u(x, y)$ es la incógnita, f es una función dada y A, B, C, D, E y F pueden ser constantes o funciones de x e y .

Estas ecuaciones se clasifican en

- elípticas: si $B^2 - 4AC < 0$
- parabólicas: si $B^2 - 4AC = 0$
- hiperbólicas: si $B^2 - 4AC > 0$

Tres modelos básicos son:

- la ecuación de Laplace (elíptica)

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

- la ecuación del calor (parabólica)

$$u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = 0$$

- la ecuación de ondas (hiperbólica)

$$u_{tt}(x, t) - cu_{xx}(x, t) = 0$$

En la formulación de un problema concreto estas ecuaciones deben completarse con condiciones de contorno y, en su caso, condiciones iniciales. En lo que sigue estudiaremos cómo resolver estas ecuaciones usando el método de separación de variables.

9.2. La ecuación de Laplace.

Se considera la ecuación

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \quad (9.1)$$

El método de separación de variables consiste en buscar una solución de la forma

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (9.2)$$

Sustituyendo en la ecuación 9.1 se obtiene la relación

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Puesto que el primer miembro depende de x y el segundo de y concluimos que ha de existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que se verifiquen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (9.3)$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \quad (9.4)$$

Las soluciones generales de estas ecuaciones para los distintos valores de λ son:

- Si $\lambda = 0$,

$$X(x) = ax + b$$

$$Y(y) = cy + d$$

- Si $\lambda > 0$,

$$X(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$Y(y) = ce^{-\sqrt{\lambda}y} + de^{\sqrt{\lambda}y}$$

- Si $\lambda < 0$,

$$X(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$Y(y) = c \cos(\sqrt{-\lambda}y) + d \sin(\sqrt{-\lambda}y)$$

donde a, b, c y d son constantes arbitrarias.

Se llega a las siguientes posibilidades de soluciones linealmente independientes para u :

- Si $\lambda = 0$,

$$1, x, y, xy$$

- Si $\lambda > 0$,

$$e^{\sqrt{\lambda}y} \cos(\sqrt{\lambda}x), e^{-\sqrt{\lambda}y} \cos(\sqrt{\lambda}x), e^{\sqrt{\lambda}y} \sin(\sqrt{\lambda}x), e^{-\sqrt{\lambda}y} \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

- Si $\lambda < 0$,

$$e^{\sqrt{-\lambda}x} \cos(\sqrt{-\lambda}y), e^{-\sqrt{-\lambda}x} \cos(\sqrt{-\lambda}y), e^{\sqrt{-\lambda}x} \sin(\sqrt{-\lambda}y), e^{-\sqrt{-\lambda}x} \sin(\sqrt{-\lambda}y)$$

Combinaciones lineales de estas funciones verifican la ecuación 9.1. Ahora completaremos la ecuación de Laplace con condiciones de contorno y expondremos un método para obtener la solución basado en series de Fourier.

Sea $D = [0, 1] \times [0, 1]$ y f_0, f_1, g_0, g_1 funciones definidas en $[0, 1]$. Consideramos el problema

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \overset{o}{D} \quad (9.5)$$

con las condiciones de contorno

$$u(x, 0) = f_0(x), \quad x \in [0, 1] \quad (9.6)$$

$$u(x, 1) = f_1(x), \quad x \in [0, 1] \quad (9.7)$$

$$u(0, y) = g_0(y), \quad y \in [0, 1] \quad (9.8)$$

$$u(1, y) = g_1(y), \quad y \in [0, 1] \quad (9.9)$$

Supondremos en primer lugar que $f_1 = g_0 = g_1 = 0$. Aplicando la técnica de separación de variables y teniendo en cuenta las condiciones de contorno 9.8 y 9.9, buscamos X solución del problema

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad x \in [0, 1] \quad (9.10)$$

con las condiciones de contorno

$$X(0) = X(1) = 0 \quad (9.11)$$

Observemos que la función $X(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ es solución para cualquier valor de λ . La solución de la ecuación 9.5 que origina es la solución trivial, $u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D$, que no verifica las condiciones de contorno, a menos que $f_0 = 0$.

Buscamos una solución no trivial de 9.10 y 9.11 y para ello analizamos las soluciones obtenidas anteriormente según los valores de λ . Imponiendo las condiciones de contorno, se obtiene que, si $\lambda = 0$ o si $\lambda < 0$, el problema sólo admite la solución idénticamente nula.

Para el caso $\lambda > 0$ se obtiene solución para los valores

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (9.12)$$

y la solución es

$$X_n(x) = a_n \sin(\pi n x) \quad (9.13)$$

donde a_n es una constante arbitraria.

Para estos valores de λ busquemos ahora una función $Y(y)$ que verifique la ecuación

$$Y''(y) - n^2 \pi^2 Y(y) = 0 \quad (9.14)$$

con la condición de contorno

$$Y(1) = 0 \quad (9.15)$$

Se obtiene como solución

$$Y_n(y) = b_n \sinh(n\pi(1 - y)) \quad (9.16)$$

donde b_n es una constante arbitraria.

Tenemos pues que las funciones

$$u_n(x, y) = \sin(n\pi x) \cdot \sinh(n\pi(1 - y)) \quad (9.17)$$

son una familia de soluciones de las ecuaciones 9.5, 9.7, 9.8 y 9.9 y, como la ecuación de Laplace es lineal, cualquier combinación lineal de ellas también las verificará. Sólo falta que se verifique la condición 9.6. Extendiendo la combinación lineal al caso de una suma infinita, busquemos la solución u de la forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot u_n(x, y) \quad (9.18)$$

Para determinar los coeficientes c_n imponemos la condición 9.6 obteniendo la relación

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin(n\pi x) \cdot \sinh(n\pi) = f_0(x) \quad (9.19)$$

de donde concluimos que $c_n \cdot \sinh(n\pi)$ han de ser los coeficientes del desarrollo de Fourier de f_0 en el intervalo $[0, 1]$ en serie de senos.

La función obtenida verifica *formalmente* todas las ecuaciones del problema y se dice que es una *solución formal*. Para justificar que efectivamente es solución del problema habría que estudiar la convergencia, continuidad y derivabilidad de la serie.

Siguiendo un proceso análogo hallaríamos ahora otra solución de la ecuación de Laplace imponiendo las condiciones $f_0 = g_0 = g_1 = 0$ y f_1 no nula. Después repetiríamos el procedimiento para obtener dos soluciones más donde las únicas condiciones de contorno no nulas serían respectivamente g_0 y g_1 . De este modo se obtienen cuatro soluciones de la ecuación de Laplace que verifican cada una de ellas las condiciones de contorno mencionadas. La suma de las cuatro sería solución del problema formulado originalmente.

9.3. La ecuación del calor

Se considera el problema transmisión de calor

$$u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

$$Au(0, t) + Bu_x(0, t) = U_0(t), \quad t > 0$$

$$Au(L, t) + Bu_x(L, t) = U_1(t), \quad t > 0$$

Consideramos el caso homogéneo, $F = 0$, $U_0 = 0$, $U_1 = 0$ y por simplicidad supondremos $k = 1$, $A = C = 0$, $B = D = 1$.

El problema queda entonces

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (9.20)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (9.21)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (9.22)$$

$$u_x(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (9.23)$$

Aplicamos el método de separación de variables para buscar una solución de la forma

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Sustituyendo en la ecuación 9.20 obtenemos la relación

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

Puesto que el primer miembro depende de x y el segundo de t concluimos que ha de existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que se verifique

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

lo que conduce a las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno se considera el problema

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L \quad (9.24)$$

$$X'(0) = X'(L) = 0, \quad (9.25)$$

Para hallar u hemos de resolver este problema para distintos valores de λ .

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno se obtiene que hay solución no trivial para los valores

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (9.26)$$

y que la solución es

$$X_n(x) = a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (9.27)$$

donde a_n es una constante arbitraria.

Para estos valores de λ buscamos ahora una función $T(t)$ que verifique la ecuación

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \quad (9.28)$$

Se obtiene como solución

$$T_n(t) = b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \quad (9.29)$$

donde b_n es una constante arbitraria.

Tenemos pues que las funciones

$$u_n(x, t) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \quad (9.30)$$

son una familia de soluciones de las ecuaciones 9.20, 9.22, y 9.23, y también cualquier combinación lineal de ellas las verificará. Para encontrar la solución del problema sólo falta que se verifique la 9.21. Buscamos una *solución formal* u del tipo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot u_n(x, t) \quad (9.31)$$

Para determinar los coeficientes c_n imponemos la condición inicial 9.21

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = u_0(x) \quad (9.32)$$

de donde concluimos que las constantes c_n han de ser los coeficientes del desarrollo de Fourier de u_0 en el intervalo $[0, L]$ en serie de cosenos.

9.4. La ecuación de ondas

Se considera el problema

$$u_{tt}(x, t) - cu_{xx}(x, t) = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L \\
u_t(x, 0) &= u_1(x), \quad 0 \leq x \leq L \\
Au(0, t) + Bu_x(0, t) &= U_0(t), \quad t > 0 \\
Au(L, t) + Bu_x(L, t) &= U_1(t), \quad t > 0
\end{aligned}$$

Consideramos el caso homogéneo, $F = 0$, $U_0 = 0$, $U_1 = 0$ y por simplicidad supondremos $c = 1$, $A = C = 1$, $B = D = 0$.

El problema queda entonces

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (9.33)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (9.34)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (9.35)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (9.36)$$

Aplicando el método de separación de variables, se busca una solución de la forma

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

y se llega la relación

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Se obtienen las ecuaciones diferenciales

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno, se considera el problema

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L \quad (9.37)$$

$$X(0) = X(L) = 0, \quad (9.38)$$

Para hallar u hemos de resolver este problema para distintos valores de λ . Teniendo en cuenta las condiciones de contorno se obtiene que hay solución para los valores

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (9.39)$$

y la solución es

$$X_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (9.40)$$

donde a_n es una constante arbitraria.

Para estos valores de λ busquemos ahora una función $T(t)$ que verifique la ecuación

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0 \quad (9.41)$$

Se obtiene que como solución

$$T_n(t) = c_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad (9.42)$$

donde c_n y d_n son constantes arbitrarias.

Busquemos entonces u de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot u_n(x, t) \quad (9.43)$$

siendo

$$u_n(x, t) = \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Podemos considerar los coeficientes c_n incluidos en a_n y b_n quedando

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (9.44)$$

Para determinar los coeficientes imponemos las condiciones iniciales. De 9.34 se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = u_0(x) \quad (9.45)$$

de donde concluimos que las constantes a_n han de ser los coeficientes del desarrollo de Fourier de u_0 en el intervalo $[0, L]$ en serie de senos.

De la ecuación 9.35, derivando formalmente, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{L} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = u_1(x) \quad (9.46)$$

de donde obtenemos las constantes b_n a partir de los coeficientes del desarrollo de Fourier de u_1 en el intervalo $[0, L]$ en serie de senos.

Capítulo 10

Transformada de Fourier

El objetivo de este capítulo es el estudio de la transformada de Fourier y su aplicación a la resolución de edp.

Definición 10.1 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se llama **transformada de Fourier** de f a la función $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} f(t) dt \quad (10.1)$$

suponiendo que la integral existe. Si f es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ se garantiza la existencia de transformada de Fourier.

La transformada también suele denotarse por $\mathcal{F}(f)$ o por $\mathcal{F}(f(t))$.

De la teoría de integración sabemos que si dos funciones f y g se diferencian en un número finito de puntos entonces sus integrales son iguales. Deducimos entonces que si dos funciones coinciden salvo en un número finito de puntos, sus transformadas de Fourier son iguales.

Ejemplo 10.1 Sean $\alpha, A \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Halle la transformada de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ |A|e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Solución: $\hat{f}(s) = \frac{|A|}{is + \alpha}$

Ejercicio 10.1 Halle, si existen, las transformadas de Fourier de las funciones siguientes:

(a) $f(t) = c$, ($c \in \mathbb{R}$)

(b) La función de **Heaviside**

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

(c) $g(t) = H(t) - H(t - 2)$

Veremos algunas propiedades de la transformada de Fourier.

Proposición 10.1 (linealidad) Sean f y g dos funciones absolutamente integrables en $\mathbb{R}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se verifica entonces que

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g) \quad (10.2)$$

Proposición 10.2 (retraso) Sea f función absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. Se considera la función $g(t) = f(t - t_0)$. Se verifica entonces que

$$\hat{g}(s) = e^{-ist_0} \hat{f}(s) \quad (10.3)$$

Proposición 10.3 (cambio de escala) Sea f función absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Se considera la función $g(t) = f(\alpha t)$. Se verifica entonces que

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{|\alpha|} \hat{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad (10.4)$$

Proposición 10.4 Sea f función derivable con derivada continua en todo $\mathbb{R}$ y supongamos f y f' absolutamente integrables en $\mathbb{R}$. Se verifica entonces que

$$\widehat{f'}(s) = (is) \hat{f}(s) \quad (10.5)$$

Para el caso en que la derivada f' sea continua a trozos la fórmula anterior debe ser modificada convenientemente.

Por extensión, repitiendo el argumento n veces se obtiene

$$\widehat{f^{(n)}}(s) = (is)^n \hat{f}(s) \quad (10.6)$$

Proposición 10.5 Sea f absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Si $g(x) = \cos(cx)f(x)$ y $h(x) = \sin(cx)f(x)$ se verifica que

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{2} \left(\hat{f}(s - c) + \hat{f}(s + c) \right) \quad (10.7)$$

$$\hat{h}(s) = \frac{1}{2i} \left(\hat{f}(s - c) - \hat{f}(s + c) \right) \quad (10.8)$$

Definición 10.2 Sean f y g dos funciones absolutamente integrables en $\mathbb{R}$. Se llama **convolución** de f y g a la función

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt \quad (10.9)$$

Se verifica que la convolución es conmutativa, $f * g = g * f$, y asociativa, $(h * g) * f = h * (g * f)$.

Proposición 10.6 Sean f y g dos funciones absolutamente integrables en $\mathbb{R}$ y sea $h = f * g$. Se verifica entonces que

$$\hat{h}(s) = \hat{f}(s) \cdot \hat{g}(s) \quad (10.10)$$

TABLA DE ALGUNAS TRANSFORMADAS	
$H(t-a) - H(t-b), a < b$	$\frac{e^{-ias} - e^{-ibs}}{is}$
$H(t+b) - H(t-b), b > 0$	$\frac{2 \operatorname{sen}(bs)}{s}$
$e^{-at}H(t), a > 0$	$\frac{1}{a + is}$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{s^2 + a^2}$
$\frac{1}{t^2 + c^2}, c > 0$	$\frac{\pi}{c}e^{-c s }$
$e^{-at^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{s^2}{4a}}$

Ejercicio 10.2 Demuestre las proposiciones 10.1 y 10.2.

Ejercicio 10.3 Sea $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } -\pi < x < 0, \\ x & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$ Halle la transformada de Fourier de f y de f' . Estudie si se verifica la proposición 10.4

Ejercicio 10.4 Halle las transformadas de las funciones siguientes

$$(a)f(x) = e^{-ax^2} \quad (b)g(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (c)h(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Indicaciones:

- Para el ejercicio (a) aplique el teorema de los residuos considerando el contorno rectangular de extremos R , $-R$, $-R - i\frac{s}{2a}$ y $R - i\frac{s}{2a}$ y luego halle el límite cuando R tiende a ∞ . Utilice que $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

- Para el ejercicio (c) aplique el teorema de los residuos y utilice la acotación $\sin(t) \leq 2\pi/t$ si $0 \leq t \leq \pi/2$. Observe que aquí se calcula el valor principal de Cauchy.

Definición 10.3 Dada g absolutamente integrable en $\mathbb{R}$, se define su **transformada inversa de Fourier** como la función

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ist} g(s) ds \quad (10.11)$$

Teorema 10.1 Sea f absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y supongamos que satisface las condiciones de Dirichlet en cualquier intervalo acotado. Entonces:

- si f es continua en el punto t ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s) e^{ist} ds = f(t) \quad (10.12)$$

- si f no es continua en el punto t ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s) e^{ist} ds = \frac{1}{2} (f(t+) + f(t-)) \quad (10.13)$$

La relación anterior suele expresarse

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x) dx \right) e^{ist} ds \quad (10.14)$$

10.1. Aplicación a edp

En esta segunda parte de la lección veremos algunas aplicaciones de la transformada de Fourier a las ecuaciones diferenciales. En edo resulta útil pues puede transformarlas en ecuaciones algebraicas. En edp tiene utilidad pues, por un lado, puede transformar una edp en una edo; por otro, puede reducir una edp en n variables a una edp en $n-1$ variables. Veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 10.2 (*La ecuación del calor*)

Se considera el problema

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (10.15)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (10.16)$$

Suponemos además que u tiene que estar acotada para que la solución sea única.

Para cada $t > 0$, llamamos $U(s, t)$ a la transformada de Fourier de $u(x, t)$ respecto de la variable x , admitiendo que la transformada existe,

$$U(s, t) = \widehat{u(\cdot, t)} = \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} u(x, t) dx$$

Aplicando transformadas y admitiendo que

$$U_t(s, t) = \widehat{u_t(\cdot, t)} = \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} u_t(x, t) dx$$

el problema se convierte en

$$U_t(s, t) + s^2 U(s, t) = 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (10.17)$$

$$U(s, 0) = \hat{u}_0(s), \quad s \in \mathbb{R} \quad (10.18)$$

La solución general de la ecuación 10.17 es de la forma

$$U(s, t) = e^{-s^2 t} c(s)$$

donde c es una función que depende de s . Para determinarla imponemos la condición inicial obteniendo

$$c(s) = \hat{u}_0(s)$$

Para hallar la solución $u(x, t)$ del problema original se hallaría la transformada inversa de $U(s, t) = e^{-s^2 t} \hat{u}_0(s)$. Habría que verificar que la función así obtenida es solución.

Ejemplo 10.3 Resuelva el problema del calor para el caso $u_0(x) = e^{-x^2}$.

Hallamos la transformada de Fourier de u_0 que es $\sqrt{\pi} e^{-\frac{s^2}{4}}$

Teniendo en cuenta los razonamientos anteriores, se obtiene que la transformada de Fourier de la solución es

$$U(s, t) = \hat{u}_0(s) \cdot e^{-s^2 t} = \sqrt{\pi} e^{-s^2(t + \frac{1}{4})}$$

Calculamos ahora la transformada inversa que es

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t + 1}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t + 1}}$$

En general, el cálculo de la transformada inversa para obtener la solución del problema del calor no suele resultar sencillo. No obstante, puede obtenerse una expresión de u utilizando la convolución y teniendo en cuenta que la transformada de la convolución de dos funciones es el producto de las transformadas. Utilizando la tabla de transformadas obtenemos que la transformada inversa de la función $e^{-s^2 t}$, para cada $t > 0$, es

$$g(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

De aquí obtenemos para u la expresión

$$u(x, t) = (u_0 * g(\cdot, t))(x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \cdot g(x - y, t) dy \quad (10.19)$$

Ejemplo 10.4 Halle la solución al problema del calor para el caso $u_0(x) = H(x) - H(x - 1)$.

Según vimos anteriormente la solución es

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} * [H(x) - H(x - 1)] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \cdot [H(y) - H(y - 1)] dy = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^1 e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \end{aligned}$$

La función a integrar no tiene una primitiva en términos de funciones elementales por lo que no podemos encontrar una expresión más explícita de la solución. No obstante, si podemos obtener valores de la integral en puntos concretos (por ejemplo con MATLAB) y conseguir así una representación gráfica de la solución.

Ejemplo 10.5 La ecuación de ondas

Se considera el problema

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (10.20)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (10.21)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (10.22)$$

Procediendo como en el caso del calor, para cada $t > 0$, llamamos $U(s, t)$ a la transformada de Fourier de $u(x, t)$ respecto de la variable x

$$U(s, t) = \widehat{u(\cdot, t)} = \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} u(x, t) dx$$

El problema se convierte en

$$U_{tt}(s, t) + s^2 U(s, t) = 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (10.23)$$

$$U(s, 0) = \hat{u}_0(s), \quad s \in \mathbb{R} \quad (10.24)$$

$$U_t(s, 0) = 0, \quad s \in \mathbb{R} \quad (10.25)$$

La solución general de la ecuación 10.23 es

$$U(s, t) = a(s)e^{ist} + b(s)e^{-ist}$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales obtenemos

$$a(s) = b(s)$$

$$a(s) + b(s) = \hat{u}_0(s)$$

Luego

$$U(s, t) = \frac{\hat{u}_0(s)}{2}(e^{ist} + e^{-ist})$$

y de aquí, aplicando la propiedad del retraso, obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - t) + u_0(x + t))$$