

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN FEBRERO 2003

Ejercicio 1

La ecuación $e^x - 1 - x = 0$ admite la raíz real $x = 0$. Probar que no puede tener otra.

Ejercicio 2

Justificar porqué es impropia y calcular la integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

Ejercicio 3

Estudiar la continuidad y las derivadas parciales en el $(0, 0)$ de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} + 1 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ejercicio 4

Determinar los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = (x^3 - y)^2 - x^8$$

Ejercicio 5

Consideremos el sólido Ω , de densidad constante $\gamma = 1$, limitado por el cilindro circular recto

$$x^2 + y^2 = 1; \quad -1 \leq z \leq 1$$

Calcular el momento de inercia de dicho sólido respecto al eje z sabiendo que viene dado por

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$$

Ejercicio 6

Dada la superficie S definida por

$$z = x^2 + \sqrt{3}y \quad \text{para } (x, y) \in D$$

siendo D la región $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$, calcular

$$\iint_S x dS$$

Ejercicio 7

Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$2(y - 4x^2)dx + xdy = 0$$

Ejercicio 8

Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y''' - 3y' + 2y = 6e^x$$

Notas:

- Duración del Examen: **2 horas y media**.
- Elegir **6** de los ejercicios anteriores.
- Todos los ejercicios tienen la misma puntuación.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN JUNIO 2003

Ejercicio 1

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \geq 1 \\ -\ln x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x = 1$.

Calcular, integrando por partes, la integral impropia

$$\int_0^1 (-\ln x) dx$$

Ejercicio 2

Estudiar la diferenciabilidad en el $(0, 0)$ de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ejercicio 3

Calcular la integral triple

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$$

siendo Ω el cuerpo limitado por las superficies

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2 - (x^2 + y^2) \end{cases}$$

Ejercicio 4

Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$$

Notas:

- Duración del Examen: **2 horas**.
- Todos los ejercicios tienen la misma puntuación.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN SEPTIEMBRE 2003

Ejercicio 1

Demostrar que la función

$$f(x) = e^{|x|}$$

no es derivable en el punto $x = 0$. ¿Cuál es el ángulo que forman las tangentes por los lados a esta curva en el punto indicado?.

Hallar el área de la región limitada por la curva anterior, el eje OX , y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.

Ejercicio 2

Hallar las distancias máxima y mínima del punto $(0, 0)$ a la elipse de ecuación

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$$

Ejercicio 3

Calcular el volumen de la región Ω constituida por la parte de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$$

que queda dentro del cono

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejercicio 4

Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2y dy = 0$$

Notas:

- *Duración del Examen: 2 horas.*
- *Todos los ejercicios tienen la misma puntuación.*

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN FEBRERO 2004

Ejercicio 1

Estudiar en los puntos $x = 0$ y $x = \pi/2$ la derivabilidad de la función f . Esbozar su gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \cos x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ (x - \pi/2)^2 & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}$$

Ejercicio 2

a) Calcular de forma exacta la integral

$$\int_0^1 x \ln(1+x) dx$$

b) Calcularla de forma aproximada, utilizando el polinomio de Maclaurin de grado 3 del $\ln(1+x)$.

c) Calcular el radio de convergencia de la serie de Maclaurin del integrando.

Ejercicio 3

Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar en el $(0, 0)$: a) continuidad; b) existencia de derivadas parciales; c) diferenciabilidad.

Ejercicio 4

La superficie que limita la cavidad de una copa de vino es

$$z = x^2 + y^2$$

y tiene una altura de 10 cm. Sabiendo que se dá positivo en el control de alcoholemia cuando se han ingerido 470 cm^3 , ¿dará positivo una persona que ha bebido 3 copas?.

Ejercicio 5

Hallar la integral de superficie

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS$$

en donde S es la superficie del cono

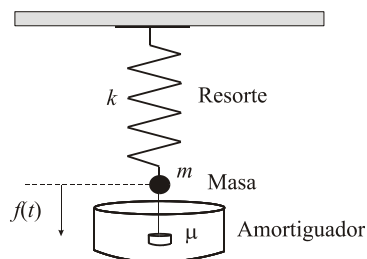
$$z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$$

con $0 \leq z \leq 3$.

Ejercicio 6

Supongamos una masa m , unida a un resorte y conectada a un dispositivo amortiguador, sobre la que actúa una fuerza externa $f(t)$. Se demuestra que la solución del sistema vibratorio viene dada por el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 4 \cos t + 2 \sin t \\ y(0) = 0; y'(0) = 3 \end{cases}$$



a) Obtener la solución general de la ecuación diferencial. b) Obtener la solución particular que verifica las condiciones iniciales.

Notas:

- Duración del Examen: **2 horas y media.**
- Elegir **5** de los ejercicios anteriores.
- Todos los ejercicios tienen la misma puntuación.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN JUNIO 2004

Ejercicio 1

Sea

$$p(x) = x^5 - 5x + a$$

Demostrar que:

- a) El polinomio $p(x)$ posee a lo sumo una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- b) El polinomio $p(x)$ posee una raíz en $[-1, 1]$ si, y sólo si, $|a| < 4$.

Ejercicio 2

Calcular los extremos relativos de la función:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

Ejercicio 3

Usar el teorema de Stokes para calcular la integral de línea:

$$\int_C 3ydx - xzdy + yz^2dz$$

siendo C la curva intersección del paraboloide: $2z = x^2 + y^2$ y el plano: $z = 2$.
Indicar el sentido de recorrido elegido.

Ejercicio 4

- a) Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$$

- b) Hallar la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' + 2y' + y = \cos x$$

Notas:

- *Duración del Examen: 2 horas.*
- *Todos los ejercicios tienen la misma puntuación.*

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN SEPTIEMBRE 2004

Ejercicio 1

Dada la función

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

se pide:

- a) El polinomio de Taylor de cuarto grado de f en $x = 0$.
- b) Calcular un valor aproximado de $\sqrt{1.02}$ utilizando un polinomio de segundo grado.

Ejercicio 2

Estudiar la diferenciabilidad en el origen de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3

Hallar el volumen del sólido Ω perteneciente al primer octante que está limitado por el cilindro

$$x^2 + y^2 = 2y$$

el cono

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y el plano xy .

Ejercicio 4

Encontrar todas las funciones $y(x)$ que satisfacen la ecuación diferencial

$$y'^2 - (2x + y)y' + (x^2 + xy) = 0$$

Notas:

- *Duración del Examen: 2 horas.*
- *Todos los ejercicios tienen la misma puntuación.*

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN FEBRERO 2005

Ejercicio 1

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} ax & \text{si } x < 0 \\ \ln(1+x) + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Calcular los parámetros a y b para que sea continua y derivable en $x = 0$.

Con esos valores de los parámetros:

(b) Calcular los extremos absolutos de $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, 1]$.

(c) Calcular el área limitada por $f(x)$ y el eje Ox en el intervalo $[-\pi, 1]$.

Ejercicio 2

(a) Calcular el polinomio de MacLaurin ($a = 0$), de grado n , de la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

(b) Calcular $\frac{1}{1.1}$ de forma aproximada, tomando $n = 2$, y acotar el error cometido.

(c) Calcular de forma exacta, y de forma aproximada (con el polinomio de grado $n = 2$) la integral

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{1+x} dx$$

Explicar los resultados obtenidos.

Ejercicio 3

(a) Calcular los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = 2xy + y^2 - y^3 + x^2$$

(b) Calcular, por el método de los Multiplicadores de Lagrange, los extremos condicionados de $f(x, y)$ con la condición

$$2x + y = 0$$

Ejercicio 4

(a) Calcular el área limitada por las curvas

$$\left. \begin{array}{l} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{array} \right\}$$

(b) Calcular el volumen limitado por las superficies

$$\left. \begin{array}{l} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right\}$$

Ejercicio 5

Sea S la superficie dada por la parametrización $\bar{T}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$, donde $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Calcular

$$(a) \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} \cos^2 z \, dS \quad (b) \iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} \text{ con } \bar{F} = (x, y, 1)$$

Notas:

- Duración del Examen: **2,30 horas**.
- Elegir **4** de los ejercicios anteriores.
- Todos los ejercicios tienen la misma puntuación.
- Los ejercicios deben entregarse por separado.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN JUNIO 2005

Ejercicio 1 (2 puntos)

¿Se puede calcular aplicando la regla de l'Hôpital el siguiente límite?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$$

Hallar su valor.

Ejercicio 2 (2 puntos)

Calcular los extremos relativos de la función:

$$f(x, y) = x^2 + y^4 - 2xy^2 - y^5$$

Ejercicio 3 (3 puntos)

Calcular la integral

$$\iiint_{\Omega} y^2 \, dx dy dz$$

siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la región limitada por las superficies:

$$1 = x^2 + y^2; \quad z = 2 - (x^2 + y^2); \quad z = (x^2 + y^2) - 1$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Calcular, aplicando el Teorema de Stokes, la integral:

$$I = \int_C \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

siendo:

$$\overline{F} = (yz, x^2, xy)$$

y siendo C la intersección de las superficies:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2; \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La curva C se supone recorrida en el sentido antihorario al considerar su proyección sobre el plano xy .

Notas:

- *Duración del Examen: 2 horas.*

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN SEPTIEMBRE 2005

Ejercicio 1 (2 puntos)

Calcular

$$\int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx$$

Ejercicio 2 (2 puntos)

Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar: (a) la continuidad en el $(0, 0)$; (b) existencia de derivadas parciales en el $(0, 0)$.

Ejercicio 3 (3 puntos)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la región del 1^{er} octante limitada por:

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = x \\ y = \sqrt{3}x \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Calcular

$$\iiint_{\Omega} x \, dx dy dz$$

Ejercicio 4 (3 puntos)

Sea S la parte del plano

$$x + y + z = 1$$

intersecada por la superficie cilíndrica

$$x^2 + y^2 = 1$$

Calcular

$$\iint_S xy \, dS$$

Notas:

- Duración del Examen: **2 horas**.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN FEBRERO 2006

Ejercicio 1

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \operatorname{arctg}(ax) + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- (a) Calcular los parámetros a y b para que sea continua y derivable en $x = 0$.
- (b) Con esos valores de los parámetros, calcular

$$\int_0^1 f(x) dx$$

Ejercicio 2

- (a) Calcular el polinomio de MacLaurin ($a = 0$), de grado n , de la función $f(x) = x^3 + e^x$.
- (b) Calcular $f(1)$ de forma aproximada, considerando el polinomio de grado $n = 3$.
- (c) Acotar el error cometido en el apartado anterior.

Ejercicio 3

- (a) Calcular los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

- (b) Calcular, por el método de los Multiplicadores de Lagrange, los extremos condicionados de $f(x, y)$ con la condición

$$x + 1 = 0$$

Ejercicio 4

Calcular el volumen de la región Ω constituida por la parte de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

que queda dentro del cono

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y en el primer octante ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

Nota: Debe emplearse el cambio de variables a coordenadas esféricas.

Ejercicio 5

Sea S la porción de la superficie:

$$z = 2 - (x^2 + y^2)$$

que queda por encima del plano xy .

- (a) Calcular su área.
- (b) Calcular

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS}$$

con $\vec{F} = (0, 0, 1)$ y $\vec{n}$ la normal exterior

Ejercicio 6

- (a) Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 1}{x^2 - 1}$$

- (b) Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = -2e^x$$

Notas:

- Duración del Examen: **2,30 horas**.
- Elegir **5** de los ejercicios anteriores.
- Todos los ejercicios tienen la misma puntuación.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN JUNIO 2006

Ejercicio 1 (2 puntos)

Sea $f(x)$ la función

$$f(x) = xe^x$$

- (a) Calcular su derivada enésima $f^{(n)}(x)$.
- (b) Calcular su polinomio de MacLaurin en $a = 0$.
- (c) Calcular de forma aproximada $f(1) = e$ con el polinomio de grado $n = 3$. Acotar el Error.

Ejercicio 2 (2 puntos)

Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el $(0, 0)$ de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^4 + y^8} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ejercicio 3 (2 puntos)

Calcular la integral

$$\iint_D xy \, dx dy$$

siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ la región del primer cuadrante limitada por las curvas:

$$x^2 + y^2 = 1; \quad x^2 + y^2 = 4$$

- (a) En coordenadas cartesianas.
- (b) En coordenadas polares.

Ejercicio 4 (2 puntos)

Calcular la integral de superficie:

$$I = \iint_S f(x, y, z) dS$$

siendo

$$f(x, y, z) = 2$$

y siendo S la porción del plano

$$x + y + z = 1$$

limitada en el primer octante por los planos coordenados. ¿Qué interpretación geométrica tiene la integral anterior?

Ejercicio 5 (2 puntos)

Calcular la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}$$

Notas:

- *Duración del Examen: 2 horas.*

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN SEPTIEMBRE 2006

Ejercicio 1 (2 puntos)

Demostrar que la ecuación

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

tiene sólo una raíz real si

$$b^2 - 3ac < 0$$

Ejercicio 2 (2 puntos)

Determinar, por el método de los multiplicadores de Lagrange, los extremos de la función

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

con la condición

$$x + y = 1$$

Interpretar gráficamente el resultado.

Ejercicio 3 (2 puntos)

Calcular el volumen limitado en el primer octante por las superficies

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 4 \\ 2y + z &= 4\end{aligned}$$

Ejercicio 4 (2 puntos)

Calcular la integral de superficie

$$I = \iint_S f(x, y, z) dS$$

siendo

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

y siendo S la superficie dada por la parametrización

$$\bar{T}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v); 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$$

Ejercicio 5 (2 puntos)

Calcular la solución general de la ecuación diferencial

$$e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0$$

Notas:

- *Duración del Examen: 2 horas.*

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA
EXAMEN FEBRERO 2007

Ejercicio 1

- (a) Una compañía de autobuses alquilará uno con capacidad para 50 personas a grupos de 36 o más. Si un grupo consta de 36 personas, pagará cada una 60€. Para grupos mayores, se reduce 1€ el precio por persona, por cada una que exceda de 36. Determine el tamaño del grupo que hace máximo el ingreso de la compañía.
- (b) Calcular

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

Ejercicio 2

- (a) Calcular el polinomio de Taylor, centrado en $a = 1$, y de grado n , de la función $f(x) = \ln \sqrt{x}$.
- (b) Calcular

$$\int_1^2 \frac{1}{2x} \ln \sqrt{x} dx$$

Ejercicio 3

Calcular, por el método de los Multiplicadores de Lagrange, los extremos condicionados de $f(x, y)$

$$f(x, y) = 25 + 4x^2 - 4xy + 4y^2$$

con la condición: $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 8 = 0$.

Nota: Discutir sólo el punto crítico del primer cuadrante.

Ejercicio 4

Calcular la integral:

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$$

siendo Ω la región de $\mathbb{R}^3$, del primer octante, limitada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

y por los planos: $x = 0; z = 0, y = x$.

Ejercicio 5

Calcular la integral de superficie

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS$$

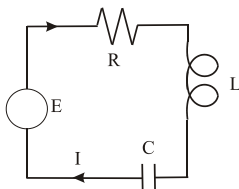
siendo S la porción de la superficie:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

comprendida entre $0 \leq z \leq 3$.

Ejercicio 6

El circuito RLC de la figura



responde a la ecuación diferencial: $y'' + 2y' + 5y = \sin x$. Obtener su solución general.

Notas:

- Duración del Examen: **2,30 horas**.
- Elegir **5** de los ejercicios anteriores.
- Todos los ejercicios tienen la misma puntuación.
- No se permite el uso de calculadoras.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN JUNIO 2007

Ejercicio 1

- (a) Calcular el polinomio de Maclaurin, centrado en $a = 0$, y de grado 4, de la función $f(x) = e^{x^2}$.
(b) Calcular de forma exacta las integrales:

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx; \quad \int_0^2 x e^{x^2} dx$$

- (c) Calcular las integrales anteriores de forma aproximada, usando el polinomio de grado 4 de la función $f(x) = e^{x^2}$.
(d) Comparar y explicar los resultados.
Nota: $e \simeq 2.718$; $e^4 \simeq 54.598$.

Ejercicio 2

Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + x^5} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estudiar en el $(0, 0)$:

- (a) Continuidad.
(b) Existencia de derivadas parciales.
(c) ¿Puede ser diferenciable?. ¿Por qué?. ¿En caso afirmativo, cuánto valdría?

Ejercicio 3

Hallar la integral doble

$$\iint_D xy dx dy$$

siendo D la región del primer cuadrante, que contiene al origen de coordenadas y que está limitada por

$$\begin{aligned} \text{la recta} & : y = 1/2 \\ \text{la parábola} & : y^2 = x \\ \text{la parábola} & : y = x^2 \end{aligned}$$

- (a) Integrando primero la x .
(b) Integrando primero la y .
Nota: NO hace falta simplificar las fracciones.

Ejercicio 4

Hallar la integral de superficie

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS$$

en donde S es la superficie del cono

$$z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

que queda por encima del plano $z = 1$.

Ejercicio 5

Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$$

- (a) como ecuación homogénea.
(b) como ecuación exacta.

Notas:

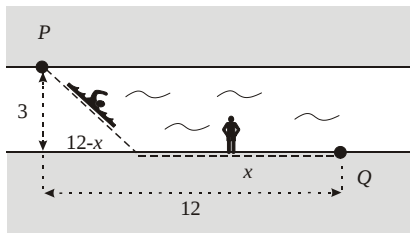
- Duración del Examen: **2,30 horas**.
- Todos los ejercicios tienen la misma puntuación.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN SEPTIEMBRE 2007

Ejercicio 1 (2 puntos)

Dos pueblos P y Q están en distintas orillas de un río de 3 km de ancho, como se muestra en la figura. Pedro, que vive en P , tiene su novia en Q y quiere llegar a verla en el mínimo tiempo posible. Hallar el camino que debe seguir, sabiendo que Pedro nada a una velocidad constante de 4 km/h y camina a una velocidad constante de 5 km/h.



Ejercicio 2 (2 puntos)

(a) Calcular los extremos relativos (libres) de la función:

$$f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$$

(b) Determinar, por el método de los multiplicadores de Lagrange, los extremos de la misma función:

$$f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$$

pero ahora con la condición:

$$y - 1 = 0$$

(c) Interpretar gráficamente los resultados.

Ejercicio 3 (2 puntos)

Calcular el volumen limitado por las superficies:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 4 + x^2 + y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Esbozar su gráfica.

Ejercicio 4 (2 puntos)

Calcular la integral de superficie

$$I = \iint_S \vec{F}(x, y, z) d\vec{S}$$

siendo:

$$\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$$

y siendo S la parte del plano:

$$x + \frac{y}{2} + z = 1$$

perteneciente al primer octante, y considerando en ella la cara inferior.

Ejercicio 5 (2 puntos)

Al estudiar un problema de vibraciones, se obtiene la ecuación diferencial:

$$y'' + y = \sin t$$

(a) Calcular la solución general de dicha ecuación diferencial.

(b) El apartado anterior es un ejemplo de resonancia. ¿En qué consiste?

Notas:

- Duración del Examen: **2.30 horas**.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA

EXAMEN FEBRERO 2008

Ejercicio 1

Dada la función:

$$f(x) = ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- (a) Calcular su polinomio de MacLaurin de grado n .
- (b) Calcular de forma aproximada $ch(1)$ con el polinomio de grado 2 y acotar el error cometido

Ejercicio 2

Calcular la integral impropia:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

Ejercicio 3

Estudiar en el $(0,0)$: la continuidad y la existencia de derivadas parciales de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

¿Puede ser diferenciable?. ¿Por qué?. ¿En caso afirmativo, cuánto valdría?.

Nota: $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$.

Ejercicio 4

Se construye una peonza limitada por las superficies

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 2 - (x^2 + y^2) \end{cases}$$

Calcular su Volumen.

Ejercicio 5

Sea S la superficie dada por la parametrización

$$\begin{aligned} \bar{T}(u, v) &= (u, v, 1 - u - v) \\ (u, v) &\in D = \{(u, v) / 0 \leq u^2 + v^2 \leq 2\} \end{aligned}$$

Calcular:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \iint_S dS \\ \text{(b)} \quad & \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

siendo $\vec{F} = (0, 0, x^2 + y^2)$ y considerando en S la normal inferior.

Ejercicio 6

Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$y' + \frac{y}{x} + 2 = 0$$

- (a) Como ecuación lineal.
- (b) Como ecuación exacta.
- (c) Como ecuación homogénea.

Notas:

- Duración del Examen: **2,30 horas**.
- Elegir **5** de los ejercicios anteriores.
- Todos los ejercicios tienen la misma puntuación.
- No se permite el uso de calculadoras.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA
EXAMEN JUNIO 2008

Ejercicio 1 (2 puntos)

- (a) Calcular el polinomio de Maclaurin, centrado en $a = 0$, y de grado 3, de la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
(b) Calcular de forma exacta la integral:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$$

- (c) Calcular la integral anterior de forma aproximada, usando el polinomio obtenido en (a).

Ejercicio 2 (2 puntos)

- (a) Calcular, mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, los extremos condicionados de la función:

$$f(x, y) = 1 - x - y$$

con la condición:

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

- (b) ¿Tiene extremos relativos libres la función $f(x, y)$? Interpretar graficamente los resultados.

Ejercicio 3 (2 puntos)

Calcular la integral triple

$$\iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz$$

siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ el dominio limitado:

$$\begin{array}{ll} \text{superiormente por el cono:} & z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{lateralmente por el cilindro:} & x^2 + y^2 = 2 \\ \text{inferiormente por el plano:} & z = 0 \end{array}$$

¿Cómo calcularías integrando el volumen de Ω ?

Ejercicio 4 (2 puntos)

Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

siendo

$$\vec{F} = (2x, 2y, z)$$

siendo $S = S_1 \cup S_2$ la superficie cerrada formada por la unión de:

$$\begin{array}{ll} (S_1) \text{ plano} & : \quad z = 3 \\ (S_2) \text{ paraboloide} & : \quad z = x^2 + y^2 \end{array}$$

y considerando la normal exterior.

Ejercicio 5 (2 puntos)

- (a) Resolver, como ecuación exacta, la ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{2xy + 1}{x^2 - 1}$$

- (b) Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' + 2y' + 2y = 4 \cos t + 2 \sin t$$

- Duración del Examen: **2,30 horas**.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA
EXAMEN SEPTIEMBRE 2008

Ejercicio 1 (1.5 puntos)

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \geq 1 \\ -\ln x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x = 1$.

Calcular, integrando por partes, la integral impropia

$$\int_0^1 (-\ln x) dx$$

Ejercicio 2 (2.5 puntos)

Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el $(0, 0)$ de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Calcular el volumen de la región Ω constituida por la parte de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

que queda dentro del cono

$$z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejercicio 4 (2.5 puntos)

Calcular, aplicando el Teorema de Stokes, la integral:

$$I = \int_C \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

siendo:

$$\overline{F} = (2y, 3x, -z^2)$$

y siendo C la circunferencia de centro el origen, radio 3 y contenida en el plano xy , de ecuaciones paramétricas:

$$x = 3 \cos t; \quad y = 3 \sin t; \quad z = 0; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Ejercicio 5 (1 punto)

Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = -2e^x$$

- Duración del Examen: **2,30 horas**.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA
CONTROL 1 2008-2009

Ejercicio 1

- (a) Calcular el polinomio de Maclaurin, centrado en $a = 0$, y de grado 2, de la función $f(x) = \cos^4 x$.
(b) Calcular de forma exacta la integral:

$$\int_0^{\pi/8} \cos^4 x dx$$

Nota: Recordar que

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

- (c) Calcular la integral anterior de forma aproximada, usando el polinomio obtenido en (a).
Comentar los resultados.

Ejercicio 2

Calcular la integral

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Ejercicio 3

Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$y''' - y'' - 4y' - 6y = \cos x + \sin x$$

- *Duración del Examen: 1 hora.*

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA
CONTROL 2 2008-2009

Ejercicio 1

Dada la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2 + xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Estudiar su continuidad en el $(0, 0)$.
- (b) Calcular sus derivadas parciales f'_x y f'_y en el $(0, 0)$.
- (c) ¿Puede ser diferenciable en el $(0, 0)$? En caso afirmativo, ¿cuánto valdría dicha diferencial?

Ejercicio 2

Calcular la integral triple:

$$I = \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz$$

siendo Ω el cuerpo limitado en el primer octante por las superficies:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

Ejercicio 3

Calcular el área de la parte del paraboloide:

$$z = 5 - (x^2 + y^2)$$

que queda por encima del plano:

$$z = 1$$

- *Duración del Examen: 1 hora.*

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA
EXAMEN FEBRERO 2009

Ejercicio 1

- (a) Un cultivador de naranjas de Valencia estima que, si planta 60 naranjos, obtendrá una cosecha media de 400 naranjas por árbol. Este número bajará 4 unidades por cada árbol más que se plante en el mismo terreno. Hallar el número de árboles que hace máxima la cosecha.
- (b) Hallar el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias e investigar la convergencia en los extremos de dicho intervalo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$$

Ejercicio 2

- (a) Calcular la siguiente integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx$$

- (b) Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$$

Ejercicio 3

Hallar los extremos relativos de la función:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$$

Ejercicio 4

Hallar la masa de la lámina de densidad $\mu(x, y) = x^2$ que ocupa la región D limitada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = x$, sabiendo que dicha masa viene dada por la fórmula:

$$m = \iint_D \mu(x, y) dx dy$$

Ejercicio 5

Una superficie helicoidal se define mediante la parametrización $\bar{T}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ con $0 \leq v \leq 2\pi$, $0 \leq u \leq 1$. Calcular la siguiente integral:

$$\iint_S x dS$$

Notas:

- Duración del Examen: **2.30 horas**.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA
EXAMEN JUNIO 2009

Ejercicio 1

a) Calcular de forma exacta la integral

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$$

b) Calcularla de forma aproximada, utilizando para ello el polinomio de Maclaurin de grado 2 de la función:

$$f(x) = \ln(1+x^2)$$

Ejercicio 2

Calcular, por el método de los Multiplicadores de Lagrange, los extremos condicionados de la función:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

con la condición:

$$y = -2x + 5$$

Ejercicio 3

Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$\left(\frac{y}{x} - 2x \ln y + \frac{1}{x} \right) dx + \left(\ln x - \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y} \right) dy = 0$$

Ejercicio 4

Calcular la integral doble:

$$\iint_D y \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$$

siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ el dominio limitado por las curvas:

$$\begin{cases} y = x \\ (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Nota: De los dos posibles dominios debe tomarse el más pequeño.

Ejercicio 5

Calcular la integral de superficie:

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

siendo:

$$\vec{F} = (-x, -y, 0)$$

y siendo S la superficie del cono:

$$z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

que queda por encima del plano $z = 1$, orientada con la normal interior.

- Duración del Examen: **2.30 horas**.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA
EXAMEN SEPTIEMBRE 2009

Ejercicio 1

Sea $f(x)$ la función

$$f(x) = xe^x$$

- (a) Calcular su derivada enésima $f^{(n)}(x)$.
- (b) Calcular su polinomio de MacLaurin en $a = 0$.
- (c) Calcular de forma aproximada $f(1) = e$ con el polinomio de grado $n = 3$. Acotar el Error.

Ejercicio 2

Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el $(0,0)$ de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^4 + y^8} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ejercicio 3

Calcular la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}$$

Ejercicio 4

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la región del 1^{er} octante limitada por:

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = x \\ y = \sqrt{3}x \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Calcular

$$\iiint_{\Omega} x \, dx dy dz$$

Ejercicio 5

Sea S la parte del plano

$$x + y + z = 1$$

intersecada por la superficie cilíndrica

$$x^2 + y^2 = 1$$

Calcular

$$\iint_S xy \, dS$$

- Duración del Examen: **2.30 horas**.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA
CONTROL 1 2009-2010

Ejercicio 1

(a) Calcular el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}$$

(b) Teniendo en cuenta el apartado anterior, calcular la integral:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} dx$$

Ejercicio 2

(a) Obtener el desarrollo de MacLaurin ($a = 0$) de grado n de la función. $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(b) Acotar el error que se comete al sustituir $f(x)$ por el polinomio de grado $P_3(x)$ cuando se trabaja en $x = 1$ y en $x = 10$. Comentar los resultados.

(c) Utilizando el polinomio de grado $P_3(x)$ para el $\operatorname{sen} x$, calcular de forma aproximada la integral

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

Nota: La primitiva anterior no puede expresarse como combinación de funciones elementales.

Ejercicio 3

(a) Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$(1+x)y' + y = (1+x)e^{2x}$$

(b) Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$y''' + 3y'' + 2y' = x + 1$$

- *Duración del Examen: 1 hora y 20 minutos.*

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA
CONTROL 2 (2009-2010)

Ejercicio 1

Dada la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 3y^3}{x^2 + y^2 + x^2y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Estudiar su continuidad en el $(0, 0)$.
- (b) Calcular sus derivadas parciales f'_x y f'_y en el $(0, 0)$.
- (c) ¿Puede ser diferenciable en el $(0, 0)$? En caso afirmativo, ¿cuánto valdría dicha diferencial?

Ejercicio 2

Calcular, mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, los extremos condicionados de la función:

$$f(x, y) = 1 - x - y$$

con la condición:

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

Ejercicio 3

Calcular la integral triple:

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz$$

siendo Ω el cuerpo limitado por las superficies:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Ejercicio 4

Calcular el área de la parte de la superficie:

$$z = 5 - (x^2 + y^2)$$

que queda por encima del plano:

$$z = 1$$

- *Duración del Examen: 1 hora y 30 minutos.*

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA
EXAMEN FEBRERO 2010

Ejercicio 1

(a) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \geq 1 \\ -\ln x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x = 1$.

(b) Calcular la integral:

$$\int_0^1 (-\ln x) dx$$

Ejercicio 2

Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$y''' - 3y' + 2y = 6e^x$$

Ejercicio 3

Hallar los extremos relativos de la función:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$$

Ejercicio 4

Calcular la integral:

$$\iiint_{\Omega} y^2 \, dx dy dz$$

siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la región limitada por las superficies:

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + y^2 \\ z &= 2 - (x^2 + y^2) \\ z &= (x^2 + y^2) - 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 5

Calcular la integral de superficie:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

siendo $\vec{F} = (x, y, z)$ y siendo S la porción de la superficie:

$$z = 2 - (x^2 + y^2)$$

que queda por encima del plano $z = 0$, y tomando la cara interior.

- Duración del Examen: **2 horas**.

ANÁLISIS REAL Y COMPLEJO. INGENIERÍA TELEMÁTICA
EXAMEN JUNIO 2010

Ejercicio 1

Justificar porqué es impropia y calcular la integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

Ejercicio 2

Estudiar la continuidad y las derivadas parciales en el $(0, 0)$ de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} + 1 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ejercicio 3

Determinar los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = (x^3 - y)^2 - x^8$$

Ejercicio 4

Consideremos el sólido Ω , de densidad constante $\gamma = 1$, limitado por el cilindro circular recto

$$x^2 + y^2 = 1; \quad -1 \leq z \leq 1$$

Calcular el momento de inercia de dicho sólido respecto al eje z sabiendo que viene dado por

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$$

Ejercicio 5

Dada la superficie S definida por

$$z = x^2 + \sqrt{3}y \quad \text{para } (x, y) \in D$$

siendo D la región $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$, calcular

$$\iint_S x dS$$

Ejercicio 6

Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$2(y - 4x^2)dx + xdy = 0$$

Ejercicio 7

Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y''' - 3y' + 2y = 6e^x$$

Notas:

- *Duración del Examen: 2 horas.*

- *Todos los ejercicios tienen la misma puntuación (1.5 puntos) excepto el primero (1 punto).*