

CAPÍTULO 7. ECUACIONES DIFERENCIALES

- **7.1 CONCEPTOS GENERALES**
- **7.2 EDO de 1^{er} ORDEN**
- **7.3 APLICACIONES**
- **7.4 EDO de ORDEN SUPERIOR**
- **7.5 APLICACIONES**

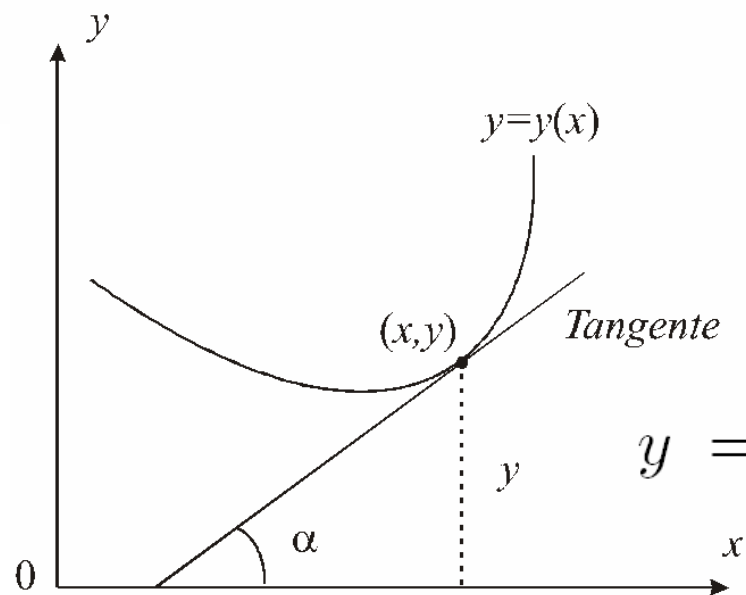


7.1 CONCEPTOS GENERALES

E.D.O.

Se denomina ecuación diferencial ordinaria una ecuación del tipo

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$



$$y'(x) = y(x)$$

$y = Ce^x$, donde C es una constante

Planteamiento de una ecuación diferencial.



7.2 EDO de 1^{er} ORDEN

$$F(x, y, y') = 0$$

Solución general

una familia uniparamétrica de funciones $y = \varphi(x, C)$

Solución Particular

condición inicial $y|_{x=x_0} = y_0$, se puede elegir un valor C_0

a) En forma de derivada: $y' = f(x, y)$.

b) En forma diferencial: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$



7.2 EDO de 1^{er} ORDEN

Ecuaciones de variables separadas o separables

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad \int M(x)dx + \int N(y)dy = c$$

Ecuaciones homogéneas

$$y' = f(y/x)$$

cambio de variable $u = y/x$



7.2 EDO de 1^{er} ORDEN

Ecuaciones diferenciales exactas

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

es necesario y suficiente que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$$



7.2 EDO de 1^{er} ORDEN

Ecuaciones lineales

$$y' + f(x)y = g(x)$$

$$e^{\int f(x)dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int f(x)dx} f(x)y = e^{\int f(x)dx} g(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(e^{\int f(x)dx} y \right) = e^{\int f(x)dx} g(x)$$



7.3 APLICACIONES de las EDO de 1^{er} ORDEN

7.3.1. Crecimiento de población y similares

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

7.3.2. Caída de cuerpos y otros problemas de movimiento

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$



7.4 EDO de ORDEN SUPERIOR

ecuación diferencial de n -ésimo orden

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Solución general

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Solución Particular

n condiciones

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

pueden elegirse los valores $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$



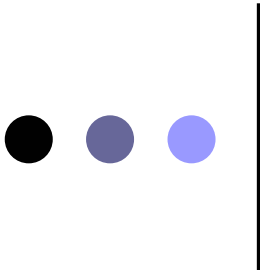
7.4 EDO de ORDEN SUPERIOR

Ecuaciones lineales homogéneas

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

Estructura de la solución general de la E.D.O. lineal homogénea

$$y_H(x) = C_1y_1(x) + \dots + C_ny_n(x)$$



7.4 EDO de ORDEN SUPERIOR

E. LIN. HOMOG. Coeficientes Constantes

Ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

($a_1, a_2, \dots, a_n$ son todos números reales)

$\Downarrow$

Ecuación característica

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$\Downarrow$

Raíces

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

de la ecuación característica

$\Downarrow$

Soluciones particulares linealmente independientes

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

de la ecuación diferencial

$\Downarrow$

Solución general de la ecuación

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

($C_1, C_2, \dots, C_n$ son constantes arbitrarias)



7.4 EDO de ORDEN SUPERIOR

E. LIN. HOMOG. Coeficientes Constantes

a) a cada raíz unimúltiple λ

la solución particular $e^{\lambda x}$

b) a cada par de raíces complejas conjugadas unimúltiples $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

soluciones particulares $e^{\alpha x} \cos \beta x$ y $e^{\alpha x} \sin \beta x$

c) a cada raíz real λ de multiplicidad r

r soluciones particulares $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{r-1}e^{\lambda x}$

d) a cada par de raíces complejas conjugadas $\lambda = \alpha + i\beta$ y $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ de multiplicidad μ

2μ soluciones particulares

$$\left. \begin{array}{l} e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{array} \right\}$$



7.4 EDO de ORDEN SUPERIOR E. LIN. NO HOMOGENEAS

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

Estructura del conjunto de soluciones

$$y = y_P + y_H$$



7.4 EDO de ORDEN SUPERIOR E. LIN. NO HOMOGENEAS

Cálculo de la solución particular: método de los coeficientes indeterminados

1) El término no homogéneo $P_m(x)$

a) Si 0 no es raíz

una solución particular $y_P = Q_m(x)$

b) Si 0 es una raíz de multiplicidad k

una solución particular $y_P = x^k Q_m(x)$



7.4 EDO de ORDEN SUPERIOR E. LIN. NO HOMOGENEAS

Cálculo de la solución particular: método de los coeficientes indeterminados

2) El término no homogéneo $e^{ax} P_m(x)$

a) Si a no es raíz

una solución particular $y_P = e^{ax} Q_m(x)$

b) Si a es raíz de multiplicidad k

una solución particular $y_P = x^k e^{ax} Q_m(x)$



7.4 EDO de ORDEN SUPERIOR E. LIN. NO HOMOGENEAS

Cálculo de la solución particular: método de los coeficientes indeterminados

3) El término no homogéneo $e^{ax} (P_l(x) \cos bx + Q_m(x) \sen bx)$

a) Si $a \pm bi$ no es raíz

una solución particular $y_P = e^{ax} (T_r(x) \cos bx + S_r(x) \sen bx)$

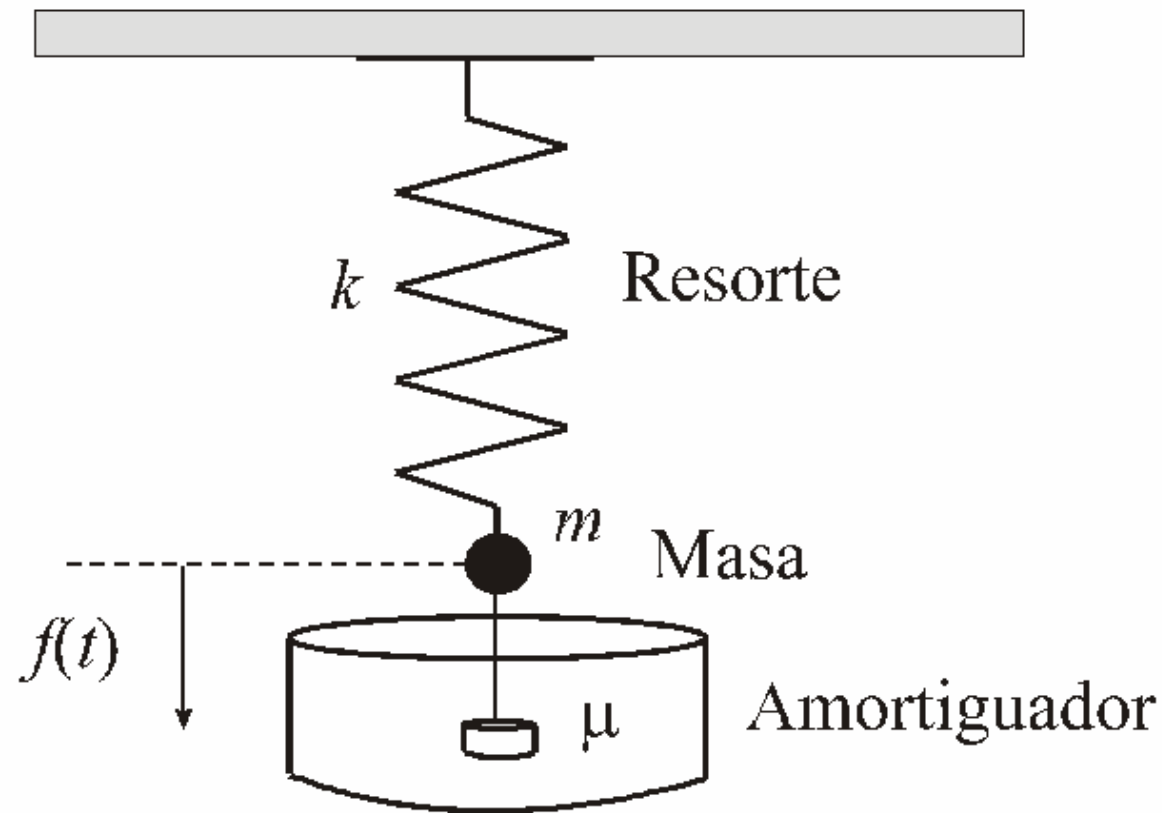
b) Si $a \pm bi$ es raíz de multiplicidad k

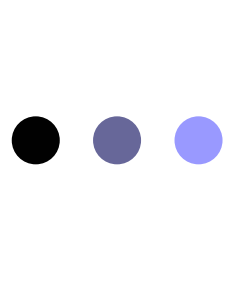
una solución particular $y_P = x^k e^{ax} (T_r(x) \cos bx + S_r(x) \sen bx)$



7.5 APLICACIONES de las EDO de ORDEN SUPERIOR

7.5.1. Vibraciones





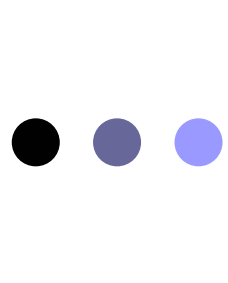
7.5 APLICACIONES de las EDO de ORDEN SUPERIOR

7.5.1. Vibraciones

a) Caso homogéneo. Vibraciones libres.

i) Vibraciones libres sin amortiguamiento.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$



7.5 APLICACIONES de las EDO de ORDEN SUPERIOR

7.5.1. Vibraciones

polinomio característico $p(\lambda) = m\lambda^2 + k$

sus raíces son

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}i, \lambda_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}i$$

la solución general es

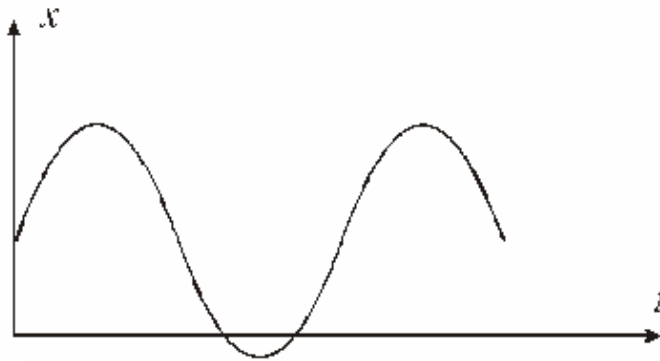
$$x(t) = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Es un movimiento vibratorio.

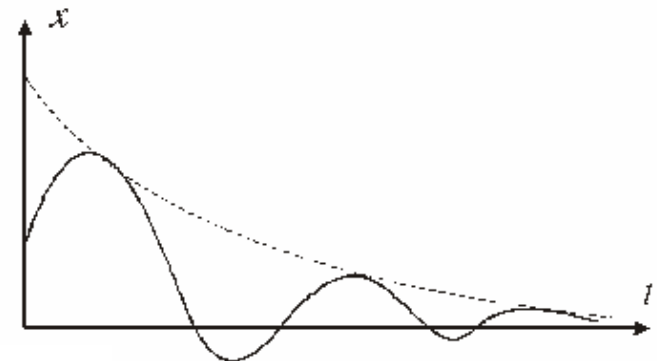


7.5 APLICACIONES de las EDO de ORDEN SUPERIOR

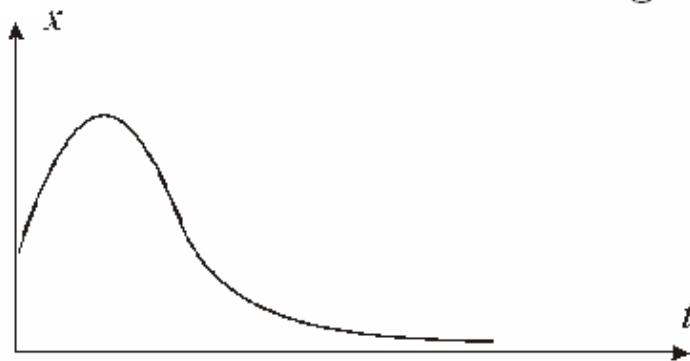
7.5.1. Vibraciones



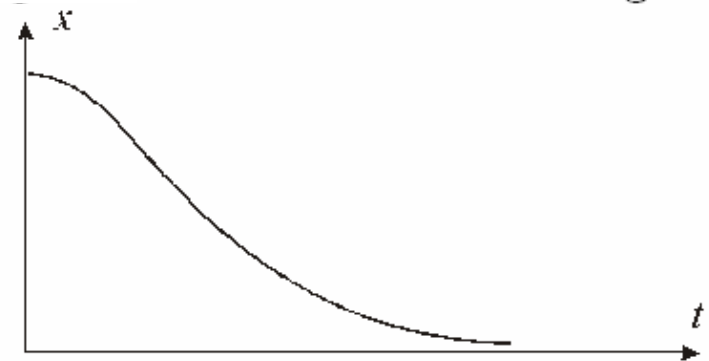
a. Vibraciones libres sin amortiguamiento.



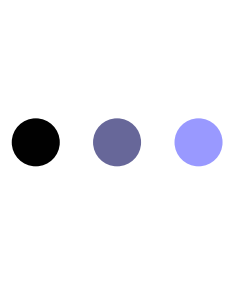
b. Movimiento subamortiguado.



c. Movimiento críticamente amortiguado.



d. Movimiento sobreamortiguado.

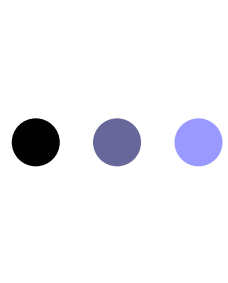


7.5 APLICACIONES de las EDO de ORDEN SUPERIOR

7.5.1. Vibraciones

ii) Vibraciones libres amortiguadas.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + kx = 0$$



7.5 APLICACIONES de las EDO de ORDEN SUPERIOR

7.5.1. Vibraciones

b) Caso no homogéneo. Vibraciones forzadas.

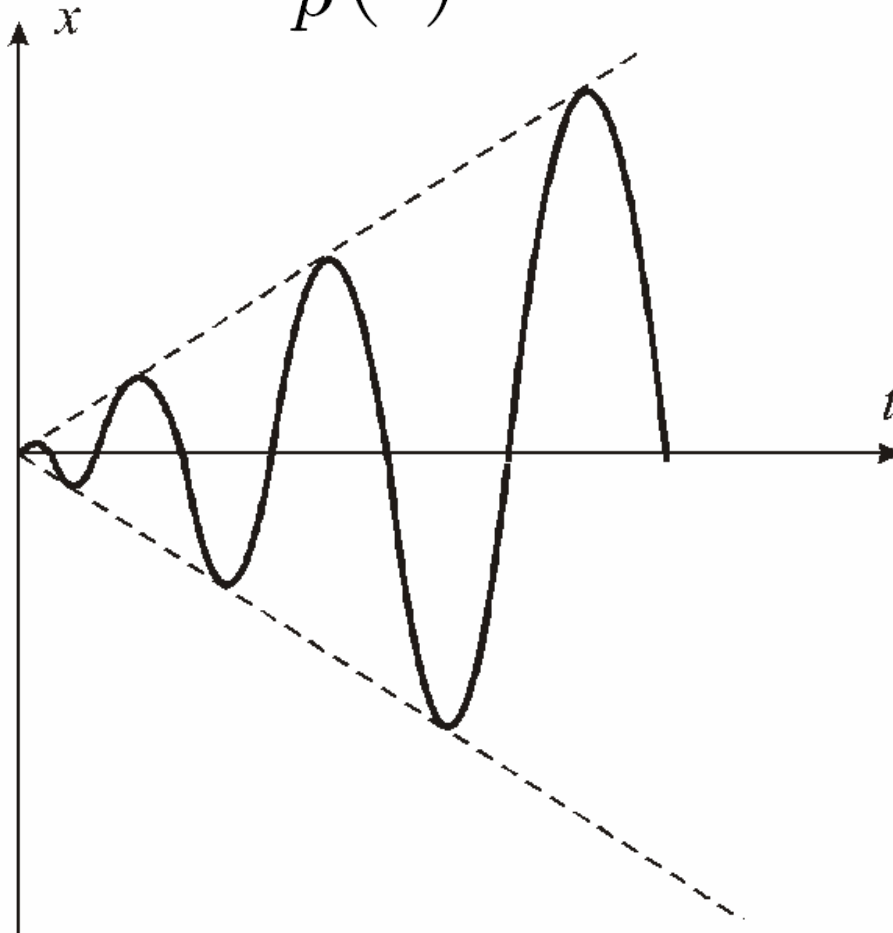
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

$$f(t) = A \operatorname{sen} wt + B \cos wt$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = w$$

7.5 APLICACIONES de las EDO de ORDEN SUPERIOR

$$x_p(t) = At \operatorname{sen} wt + Bt \cos wt$$



Sistema en resonancia



7.5 APLICACIONES de las EDO de ORDEN SUPERIOR

7.5.2. Circuitos Eléctricos

