

CAPÍTULO 6.

INTEGRALES de LÍNEA

INTEGRALES de SUPERFICIE

- **6.1 CURVAS, SUPERFICIES**

- **6.2 INTEGRALES de LÍNEA**

 - INTEGRALES de SUPERFICIE**

 - TEORÍA VECTORIAL de CAMPOS**

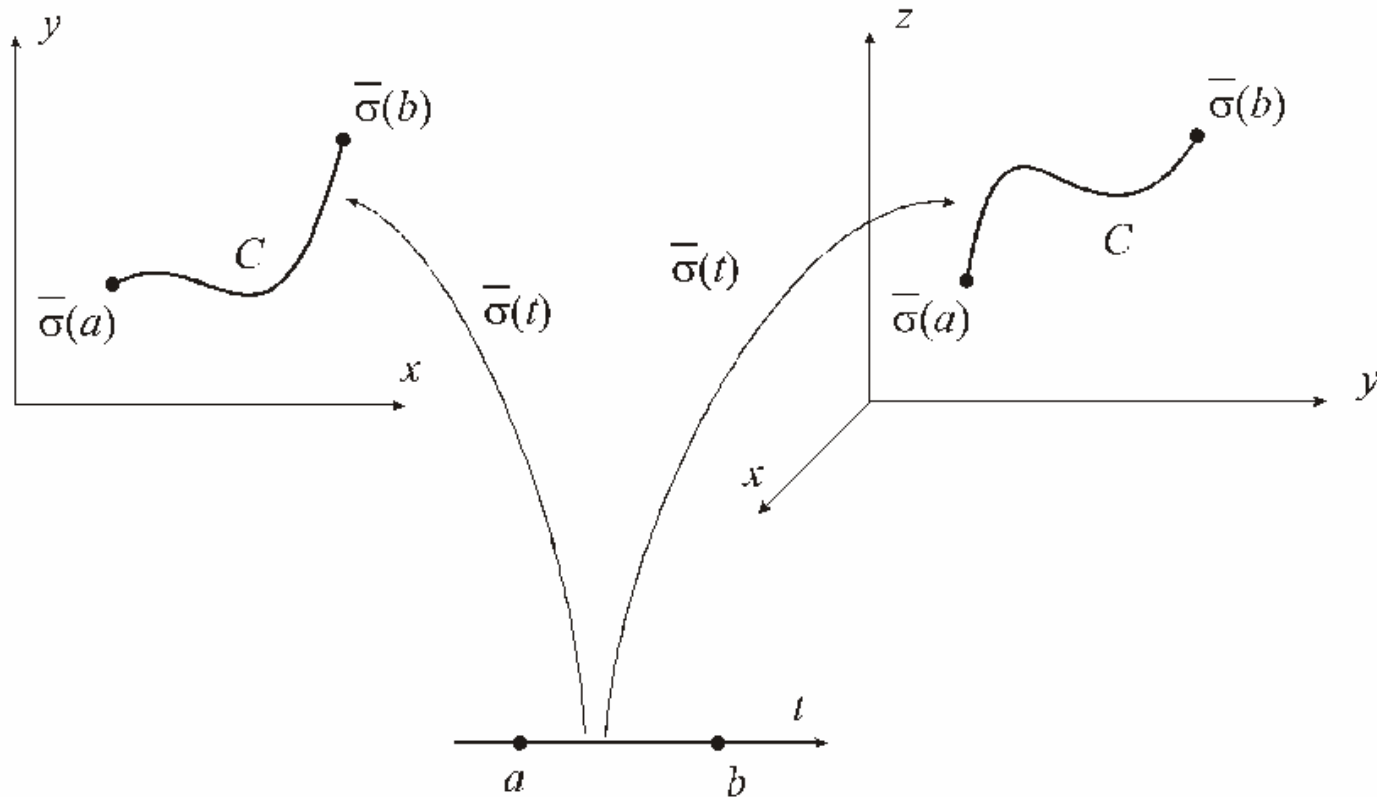
- **6.3 APLICACIONES**



6.1 CURVAS, SUPERFICIES PARAMETRIZACIONES

Parametrización de curva

$$\bar{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

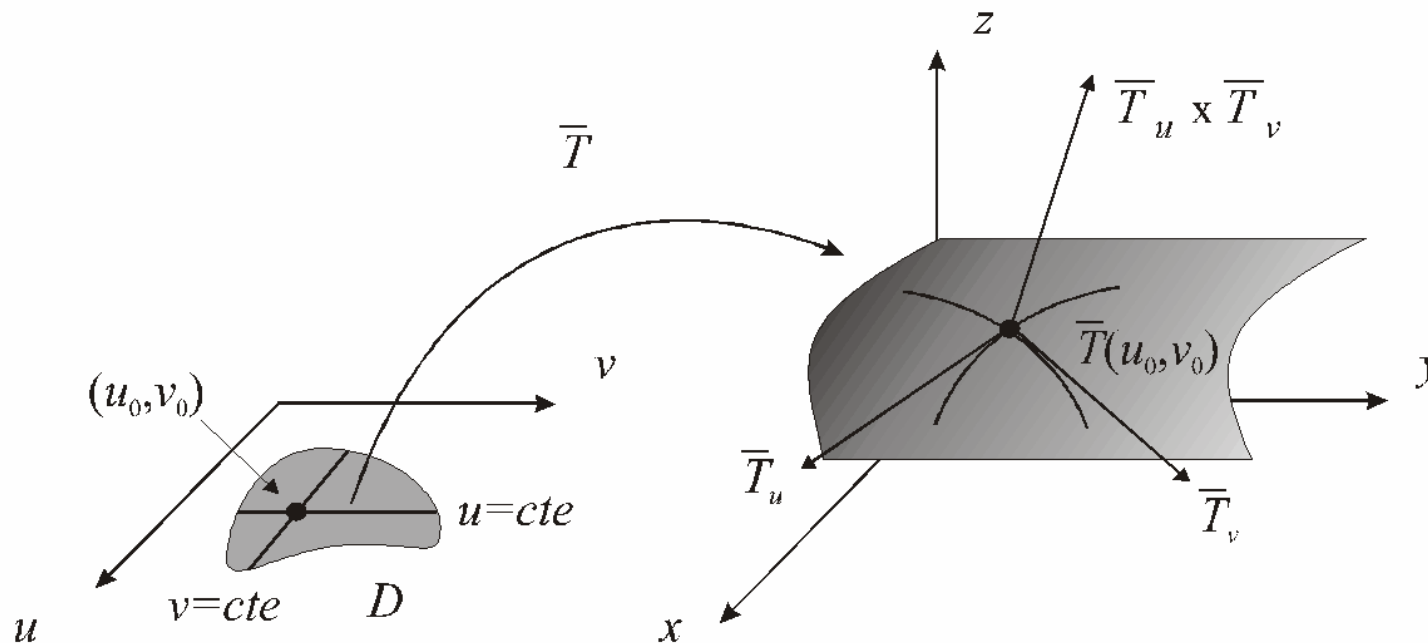




6.1 CURVAS, SUPERFICIES PARAMETRIZACIONES

Parametrización de superficie

$$\bar{T}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$





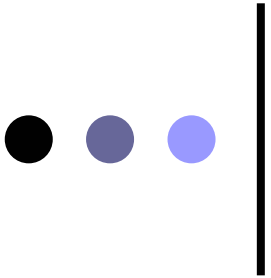
6.2 INTEGRALES de LÍNEA

Integrales de Línea de Funciones Escalares

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} f ds &= \int_C f ds = \int_a^b f(\bar{\sigma}(t)) \|\bar{\sigma}'(t)\| dt = \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt\end{aligned}$$

Longitud de una Curva

$$l(\bar{\sigma}) = \int_C ds = \int_a^b \|\bar{\sigma}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$



6.2 INTEGRALES de LÍNEA

Integrales de Línea de Funciones Vectoriales

$$\int_{\sigma} \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_C \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_a^b \overline{F}(\overline{\sigma}(t)) \cdot \overline{\sigma}'(t) dt$$

$$\int_C \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$



6.2 INTEGRALES de SUPERFICIE

Integrales de Superficie de Funciones Escalares

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_S f dS = \iint_D f(\bar{T}(u, v)) \|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\| du dv$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\bar{T}_u \times \bar{T}_v\| du dv$$

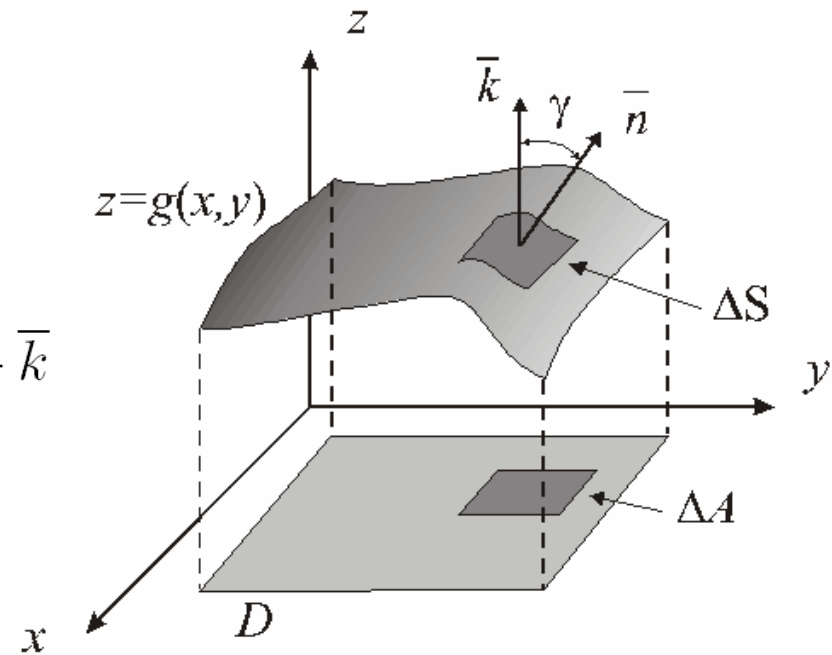
Área de una Superficie

$$A(S) = \iint_S dS$$

6.2 INTEGRALES de SUPERFICIE

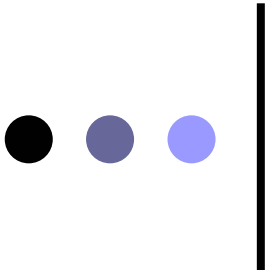
Integrales de Superficie de Funciones Escalares

La superficie S es la gráfica de $z = g(x, y)$



$$\bar{T}_x \times \bar{T}_y = -(\partial g / \partial x) \bar{i} - (\partial g / \partial y) \bar{j} + \bar{k}$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy$$



6.2 INTEGRALES de SUPERFICIE

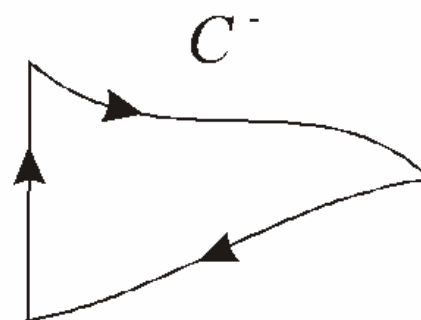
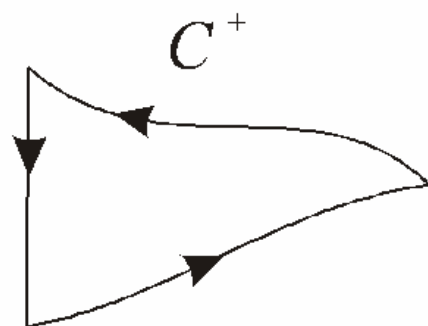
Integrales de Superficie de Funciones Vectoriales

$$\iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS} = \iint_D \overline{F} \cdot (\overline{T}_u \times \overline{T}_v) \, du \, dv$$

6.2 TEORÍA VECTORIAL de CAMPOS

TEOREMA de GREEN

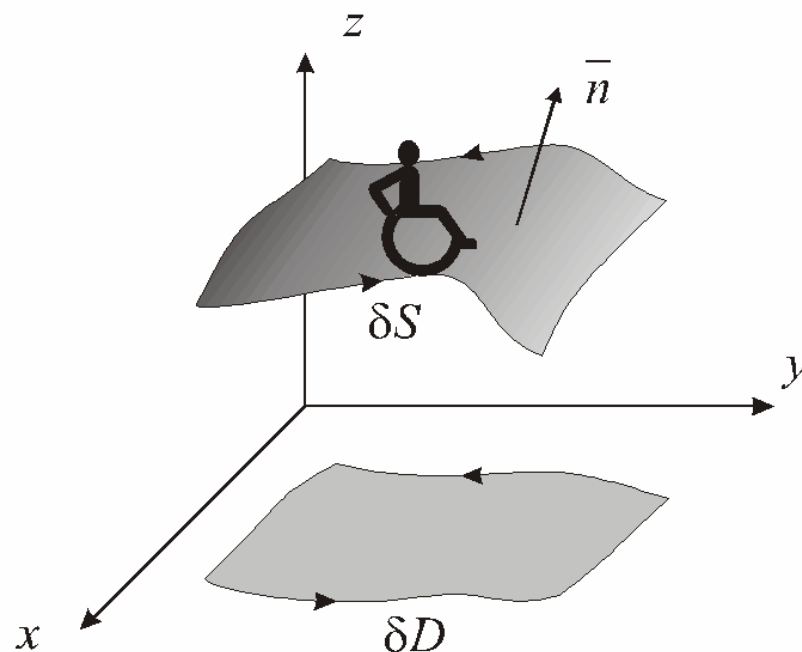
$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



6.2 TEORÍA VECTORIAL de CAMPOS

TEOREMA de STOKES

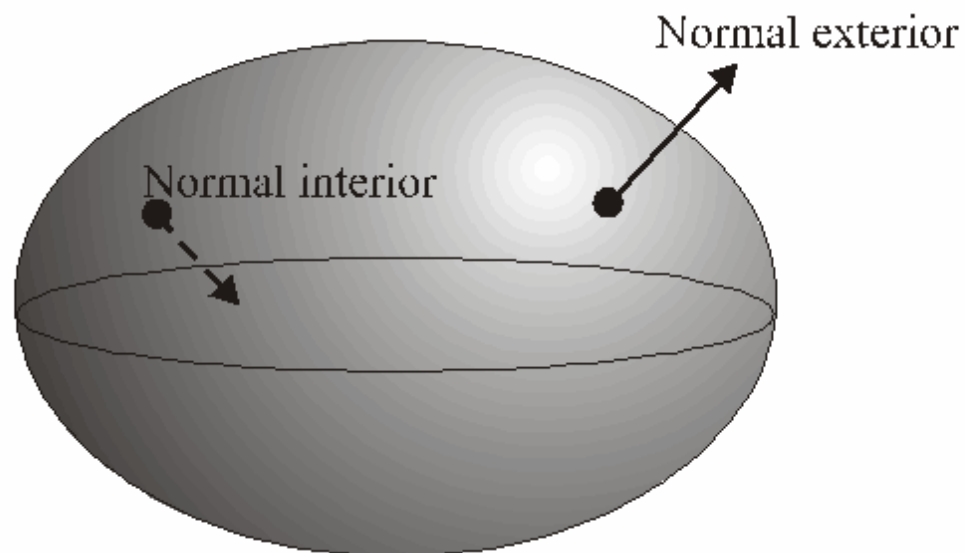
$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



6.2 TEORÍA VECTORIAL de CAMPOS

TEOREMA de GAUSS

$$\iiint_{\Omega} (\operatorname{div} \overline{F}) \, dx dy dz = \iiint_{\Omega} (\overline{\nabla} \cdot \overline{F}) \, dx dy dz = \iint_S \overline{F} \cdot \overline{dS}$$





6.2 TEORÍA VECTORIAL de CAMPOS CAMPOS CONSERVATIVOS

Independencia de la trayectoria en $\mathbb{R}^3$

$$\overline{F} = \overline{\nabla} f$$

$$\text{rot } \overline{F} = \overline{\nabla} \times \overline{F} = \overline{0}$$

$$\int_{C_1} \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_{C_2} \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

$$\oint_C \overline{F} \cdot \overline{ds} = 0$$



6.2 TEORÍA VECTORIAL de CAMPOS CAMPOS CONSERVATIVOS

Independencia de la trayectoria en $\mathbb{R}^2$

Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$, funciones con derivadas parciales continuas en D y sea D simplemente conexo. Si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en D , entonces $\overline{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ es el gradiente de alguna función f , $\overline{F} = \overline{\nabla} f$.

● ● ● | **6.3 APLICACIONES**

Trabajo

$$W = \int_C \overline{F} \cdot \overline{ds}$$

Longitud de una Curva

$$l(C) = \int_C ds$$

Área de una Superficie

$$A(S) = \iint_S dS$$



6.3 APLICACIONES

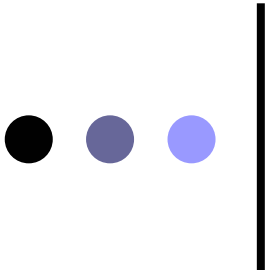
Masa y Centro de Masa

$$m = \int_{\gamma} \mu(x, y, z) ds$$

$$x_G = \frac{1}{m} \int_{\gamma} x \mu(x, y, z) ds; \quad y_G = \frac{1}{m} \int_{\gamma} y \mu(x, y, z) ds; \quad z_G = \frac{1}{m} \int_{\gamma} z \mu(x, y, z) ds$$

$$m = \iint_S \mu(x, y, z) dS$$

$$x_G = \frac{1}{m} \iint_S x \mu(x, y, z) dS; \quad y_G = \frac{1}{m} \iint_S y \mu(x, y, z) dS; \quad z_G = \frac{1}{m} \iint_S z \mu(x, y, z) dS$$



6.3 APLICACIONES

Momentos de Inercia

$$I_{yz} = \int_{\gamma} x^2 \mu(x, y, z) ds; \quad I_{yz} = \iint_S x^2 \mu(x, y, z) dS$$

$$I_{xz} = \int_{\gamma} y^2 \mu(x, y, z) ds; \quad I_{xz} = \iint_S y^2 \mu(x, y, z) dS$$

$$I_{xy} = \int_{\gamma} z^2 \mu(x, y, z) ds; \quad I_{xy} = \iint_S z^2 \mu(x, y, z) dS$$

$$I_x = \int_{\gamma} (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) ds; \quad I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dS$$

$$I_o = \int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) ds; \quad I_o = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dS$$