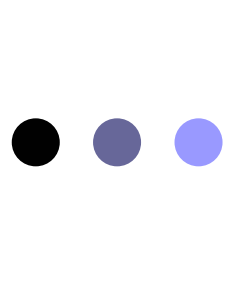




CAPÍTULO 4. FUNCIONES de VARIAS VARIABLES

- 4.1 EL ESPACIO $\mathbb{R}^n$
- 4.2 LÍMITES y CONTINUIDAD
- 4.3 DERIVADA Y DIFERENCIAL
- 4.4 EXTREMOS



4.1 EL ESPACIO $\mathbb{R}^n$ NORMA Y DISTANCIA

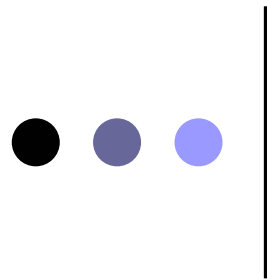
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Norma

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

Distancia

$$d(x, y) = \|x - y\|$$



4.1 EL ESPACIO $\mathbb{R}^n$ BOLAS y ENTORNOS

Bolas y entornos en $\mathbb{R}^n$

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| < r\}$$

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| \leq r\}$$

Así, en $\mathbb{R}$, $B(a, r)$ será el intervalo

En $\mathbb{R}^2$, $B(a, r)$ será el círculo

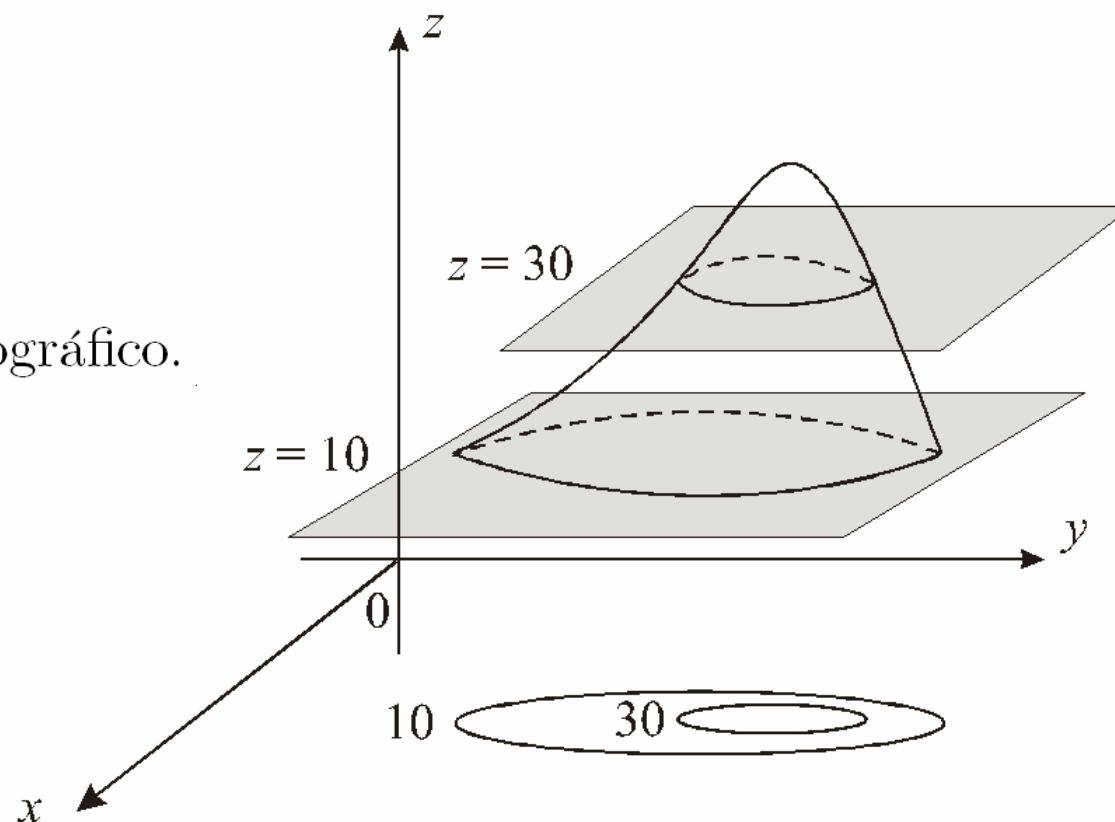
En $\mathbb{R}^3$, $B(a, r)$ será la esfera

4.2 LÍMITES y CONTINUIDAD

GRÁFICA de $z=f(x,y)$

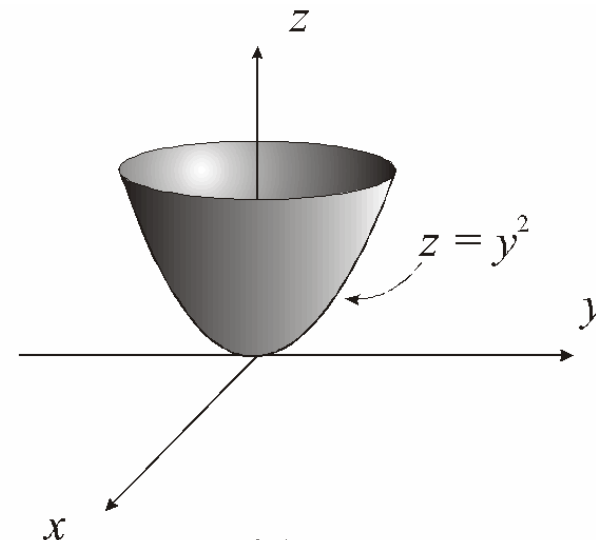
$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } X \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ (} z = f(x, y) \text{)}$$

Mapa topográfico.



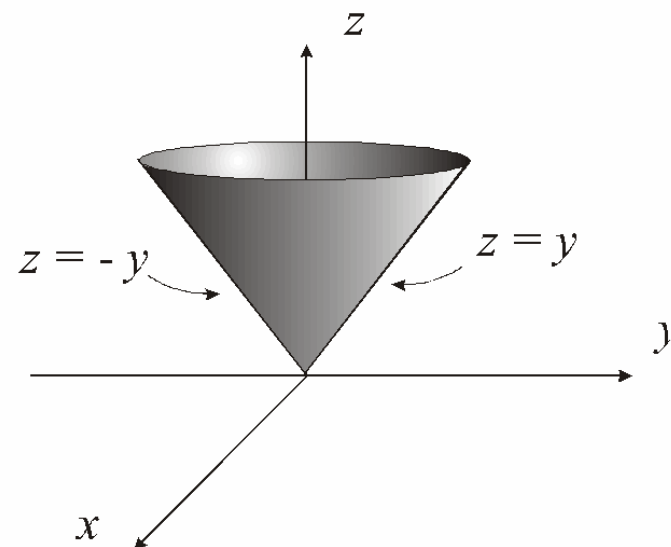
4.2 LÍMITES y CONTINUIDAD GRÁFICAS

(a) Paraboloide: $z = x^2 + y^2$



(a)

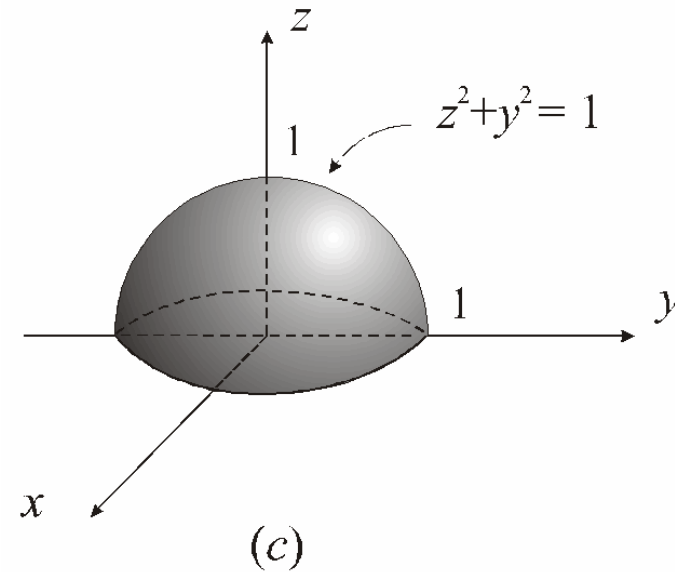
(b) Cono: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



(b)

4.2 LÍMITES y CONTINUIDAD GRÁFICAS

(c) Semiesfera: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$



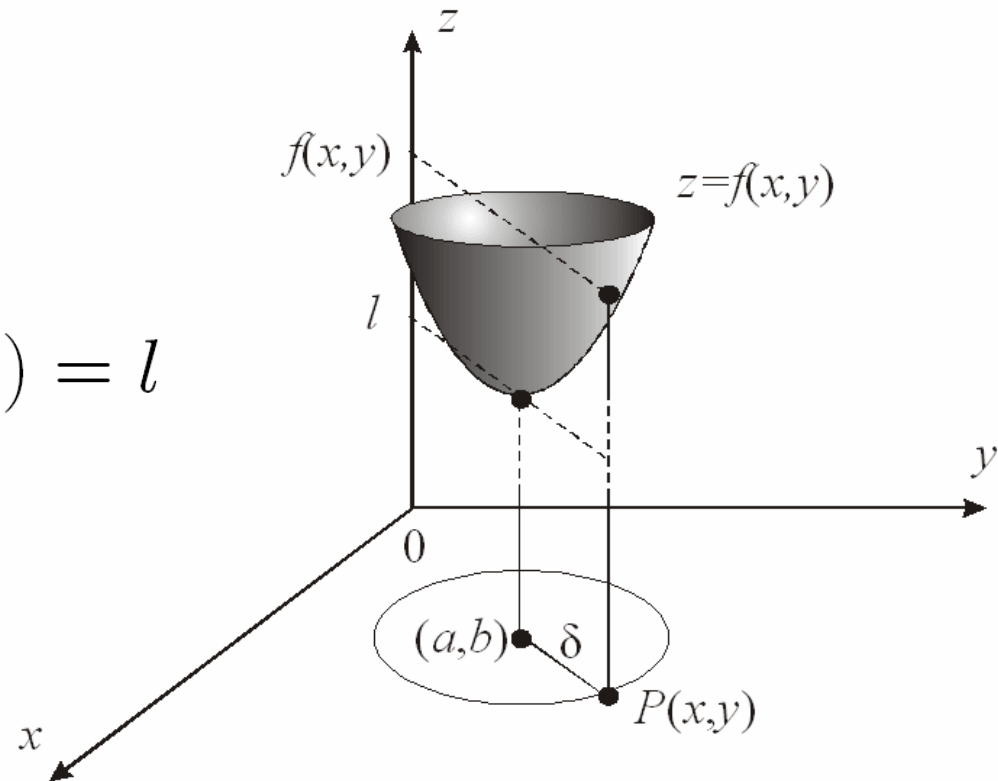


4.2 LÍMITES y CONTINUIDAD

LÍMITE de $z=f(x,y)$

Límite de una función $z = f(x, y)$ en un punto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l$$

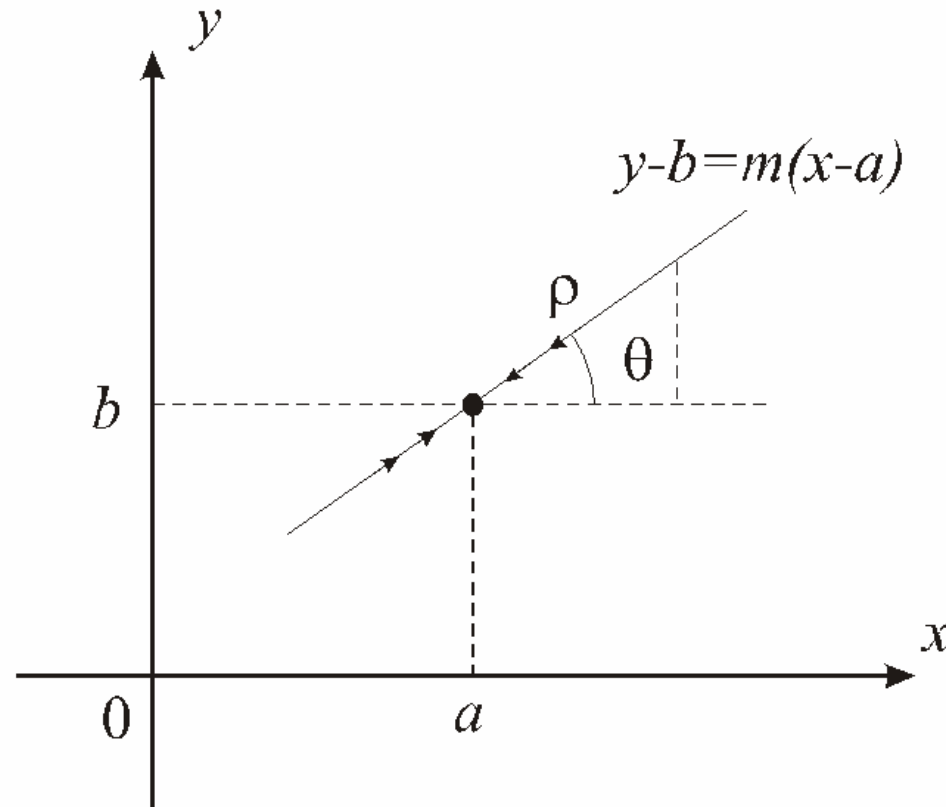




4.2 LÍMITES y CONTINUIDAD

LÍMITES RADIALES

Límites radiales



$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in X_m}} = \lim_{x \rightarrow a} f[x, b + m(x - a)]$$



4.2 LÍMITES y CONTINUIDAD

CRITERIO de la FUNCIÓN MAYORANTE

Dada una función $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

una condición necesaria y suficiente para que

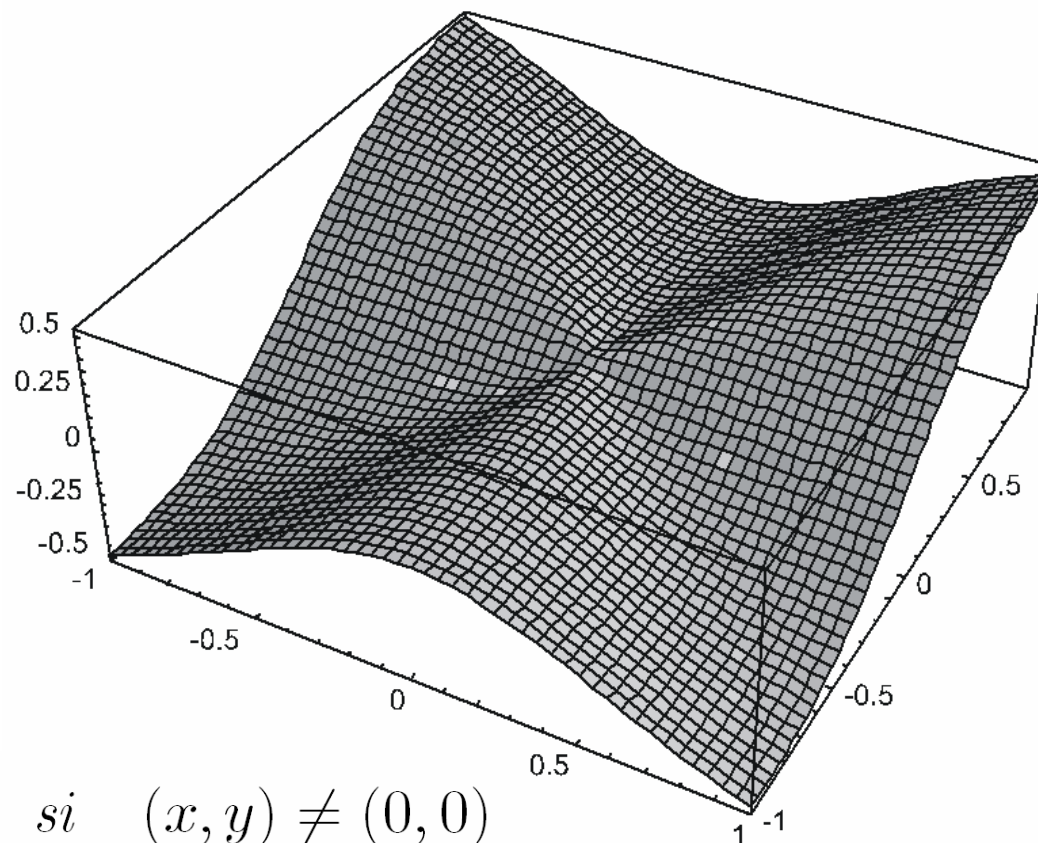
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = l$$

es que exista una función $F(\rho)$, en todo el campo de variación de θ

$$|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - l| \leq F(\rho) \quad y \quad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) = 0$$

4.2 LÍMITES y CONTINUIDAD

CRITERIO de la FUNCIÓN MAYORANTE



$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



4.2 LÍMITES y CONTINUIDAD

CONTINUIDAD en un PUNTO

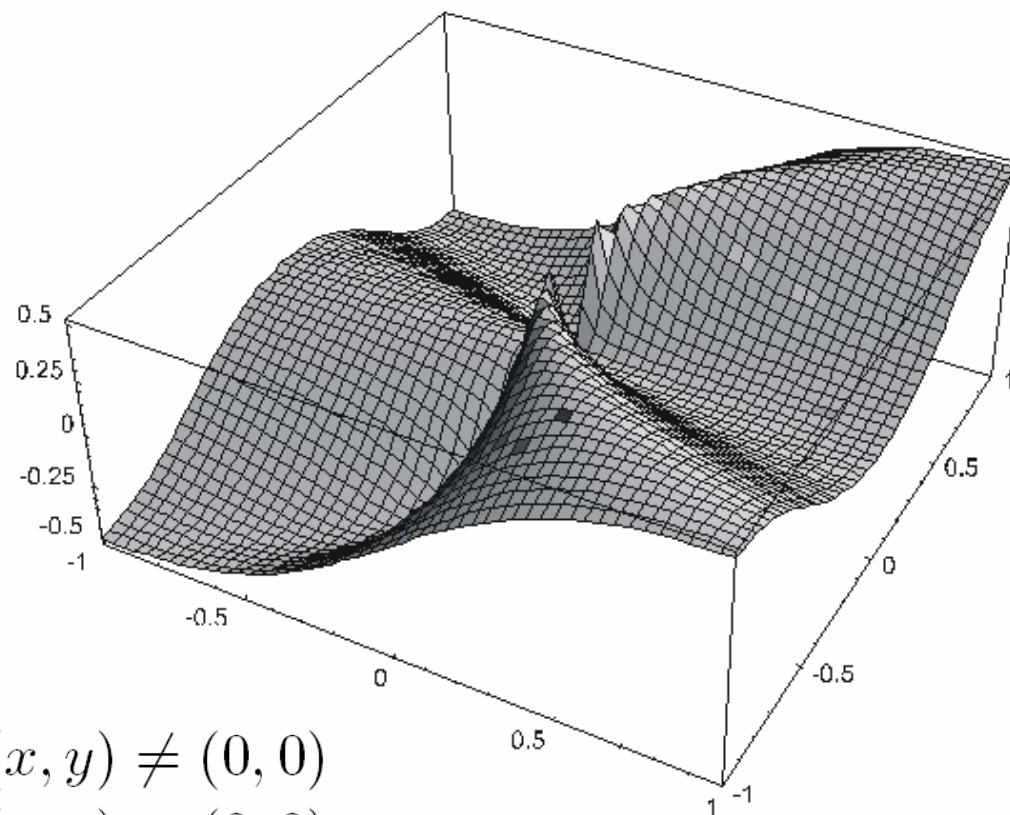
$$1) \quad \exists f(a, b)$$

$$2) \quad \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$$

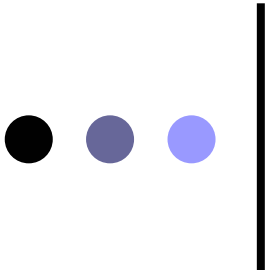
$$3) \quad f(a, b) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$$

4.2 LÍMITES y CONTINUIDAD

CONTINUIDAD en un PUNTO



$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



4.3 DERIVADA y DIFERENCIAL

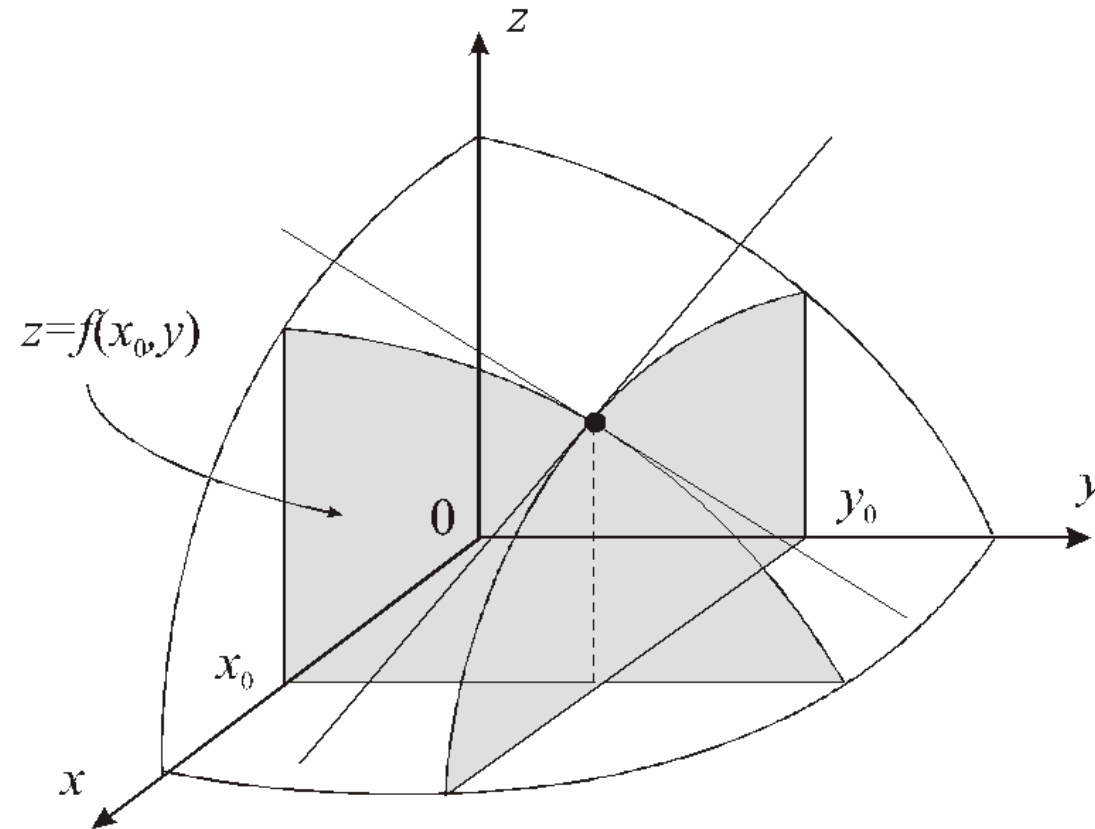
DERIVADAS PARCIALES de $z=f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

4.3 DERIVADA y DIFERENCIAL

DERIVADAS PARCIALES de $z=f(x,y)$



Derivadas parciales de $f(x, y)$



4.3 DERIVADA y DIFERENCIAL DIFERENCIAL de $z=f(x,y)$

Condición necesaria de diferenciabilidad

Si la función f es diferenciable en (a_1, a_2)

entonces es continua en este punto

entonces existen las derivadas parciales de f en el punto (a_1, a_2) y

$$df(a_1, a_2) = \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x} h + \frac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial y} k$$



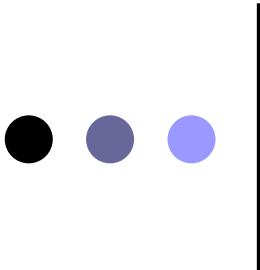
4.3 DERIVADA y DIFERENCIAL DIFERENCIAL de $z=f(x,y)$

Condición suficiente de diferenciabilidad

*Si existen las derivadas parciales de $f(x,y)$ en el punto
y al menos una de ellas es continua en dicho punto*

Condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1, a_2) - f'_x(a_1, a_2)h - f'_y(a_1, a_2)k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$



4.3 DERIVADA y DIFERENCIAL DERIVADA DIRECCIONAL

$a = (a_1, a_2)$ un punto de A y $v = (v_1, v_2)$ un vector

$$D_v f(a_1, a_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + hv_1, a_2 + hv_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en (x, y)

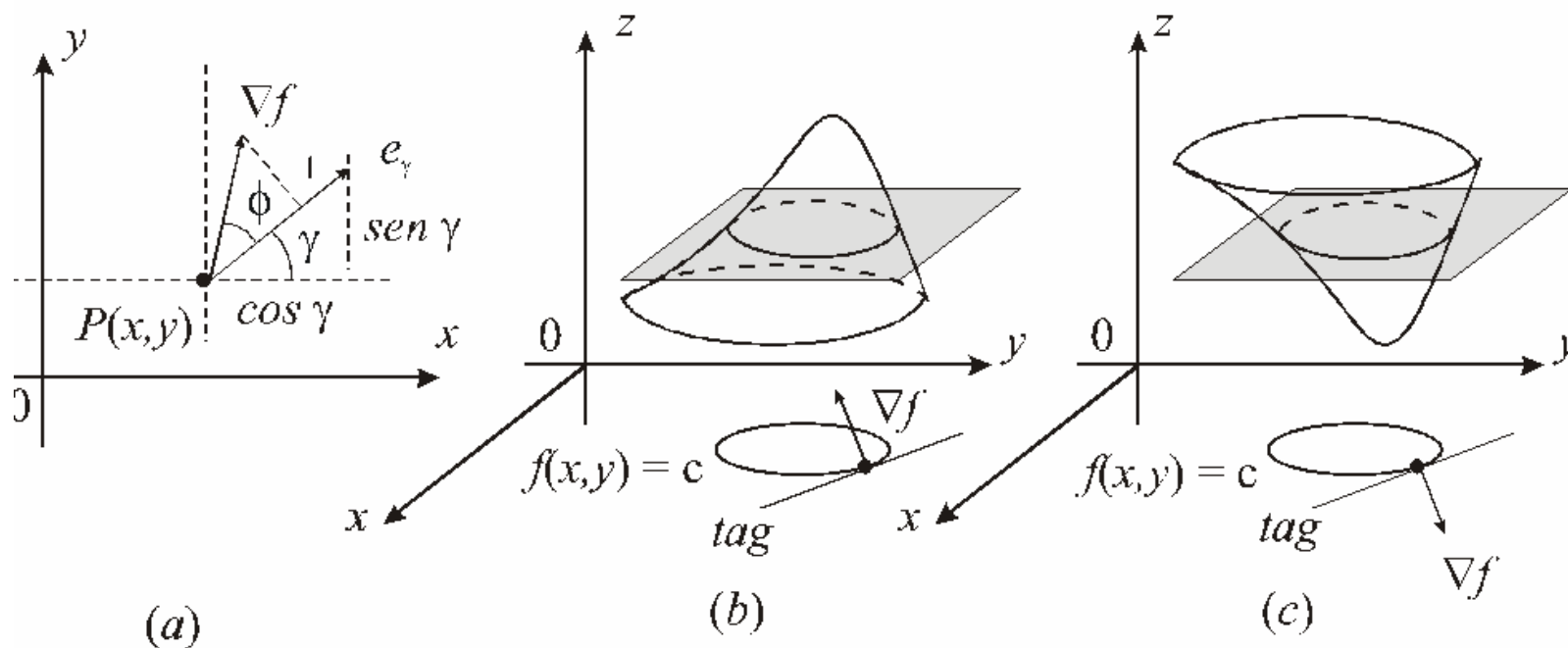
$$v = (\cos \gamma, \sin \gamma)$$

$$D_v f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \sin \gamma$$

4.3 DERIVADA y DIFERENCIAL GRADIENTE

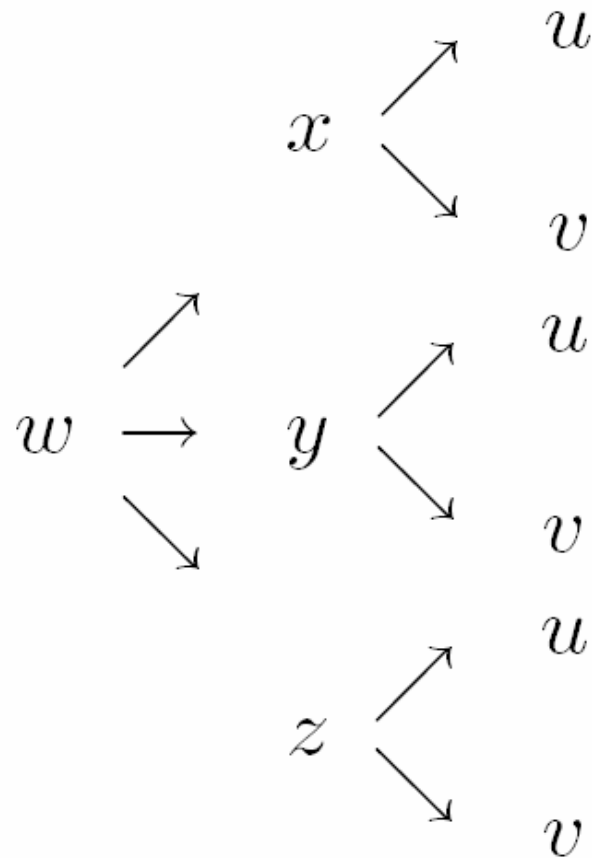
$$\text{grad}f(x, y) = \nabla f(x, y) = f'_x(x, y)i + f'_y(x, y)j$$

$$D_\gamma f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot e_\gamma$$



4.3 DERIVADA y DIFERENCIAL

DERIVADA de FUNCIÓN COMPUESTA





4.3 DERIVADA y DIFERENCIAL

DERIVADAS y DIFERENCIALES de ORDEN SUPERIOR

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) = f''_{xy}(a_1, a_2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$$

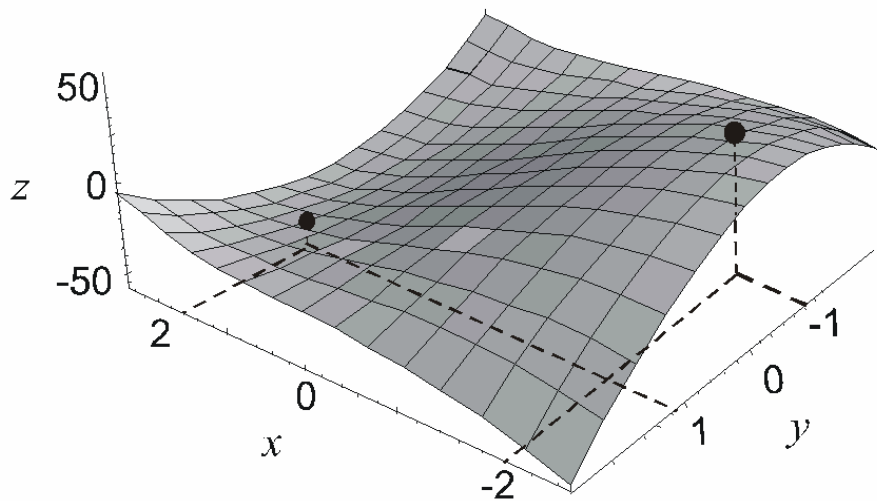
$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

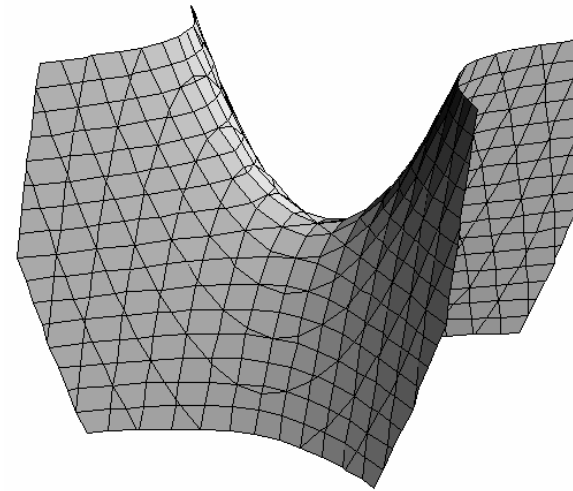
$$d^2 f = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(2)} f(x, y)$$



4.4 EXTREMOS EXTREMOS RELATIVOS



Extremos de $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.



Punto de silla de $f(x, y) = x^2 - y^2$

Condiciones Necesarias

Punto crítico

$$D_i f(a) = 0; \quad i = 1, \dots, n$$



4.4 EXTREMOS

EXTREMOS RELATIVOS

Condiciones Suficientes para $f(x, y)$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

$\Delta_2 > 0 \implies (x_0, y_0)$ es un punto de extremo estricto $\implies$

$$\begin{cases} \text{m\u00e1ximo estricto si } \Delta_1 = f''_{xx} < 0 \\ \text{m\u00ednimo estricto si } \Delta_1 = f''_{xx} > 0 \end{cases}$$

$\Delta_2 < 0 \implies (x_0, y_0)$ es un punto de silla

$\Delta_2 = 0 \implies$ el criterio no decide



4.4 EXTREMOS

EXTREMOS RELATIVOS

Condiciones Suficientes para $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$H = (D_{ij} f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}; \quad \dots$$

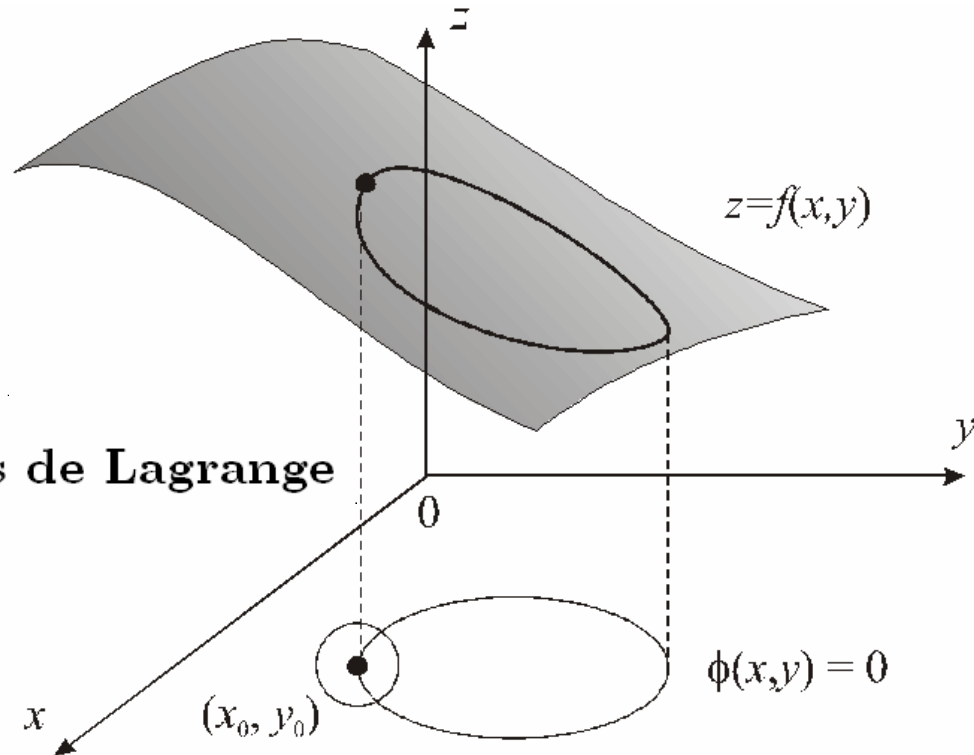
a) Si es $\Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, \dots, n$ entonces *mínimo*

b) Si es $(-1)^k \Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, \dots, n$ entonces *máximo*

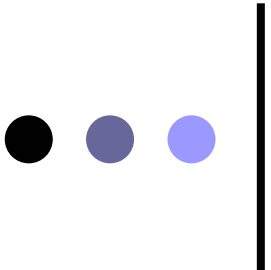
4.4 EXTREMOS EXTREMOS CONDICIONADOS

Eliminación de la condición

Método de los Multiplicadores de Lagrange



(a) $f(x, y)$ con la condición $\phi(x, y) = 0$.



4.4 EXTREMOS EXTREMOS CONDICIONADOS

Método de los Multiplicadores de Lagrange

(función de Lagrange o Lagrangiana)

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \phi(x, y)$$

Teorema de Lagrange. Condiciones necesarias

se demuestra que los extremos condicionados de $f(x, y)$

se pueden encontrar entre los puntos críticos de $F(x, y)$



4.4 EXTREMOS

EXTREMOS CONDICIONADOS

Teorema de Lagrange. Condiciones suficientes

$$d^2 F(dx, dy) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(2)} F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2$$

estando ligadas las diferenciales (dx, dy) por la relación

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

- Si $d^2 F > 0$ (forma cuadrática definida positiva) $\implies (x_0, y_0)$ es mínimo condicionado.*
Si $d^2 F < 0$ (forma cuadrática definida negativa) $\implies (x_0, y_0)$ es máximo condicionado.
Si $d^2 F \leq 0$ (forma cuadrática indefinida) $\implies (x_0, y_0)$ es punto de silla.