

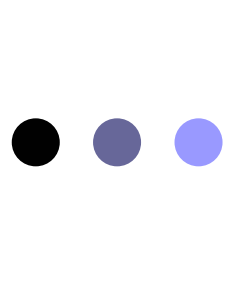


CAPÍTULO 3.

CÁLCULO INTEGRAL

en UNA VARIABLE

- o 3.1 INTEGRAL INDEFINIDA**
- o 3.2 INTEGRALES DEFINIDAS**
- o 3.3 INTEGRALES IMPROPIAS**
- o 3.4 APLICACIONES GEOMÉTRICAS**



3.1 INTEGRAL INDEFINIDA

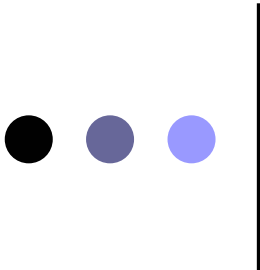
DEFINICIONES

Función primitiva

$$F'(x) = f(x)$$

Función integral indefinida

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$



3.1 INTEGRAL INDEFINIDA INMEDIATAS

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int p^x dx = \frac{p^x}{\ln p} + C, \quad p > 0, \quad p \neq 1$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{cotg} x dx = \ln |\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$



3.1 INTEGRAL INDEFINIDA

PROPIEDADES

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\text{Si } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ entonces } \int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$$

$$\text{Si } \int f(x) dx = F(x) + C \text{ entonces } \int f(x+b) dx = F(x+b) + C$$



3.1 INTEGRAL INDEFINIDA

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Cambio de variable

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t)dt$$

Integración por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

polinomio	·	función logarítmica
polinomio	·	función trigonométrica inversa
dv		u

polinomio	·	función exponencial
polinomio	·	función trigonométrica
u		dv



3.1 INTEGRAL INDEFINIDA TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integrales de funciones racionales $\frac{Q(x)}{f(x)}$

1) A cada raíz real simple
le corresponde una fracción:

$$\frac{A}{(x-a)}$$

2) A cada raíz real múltiple de orden n
le corresponden n fracciones:

$$\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-a)}$$



3.1 INTEGRAL INDEFINIDA TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

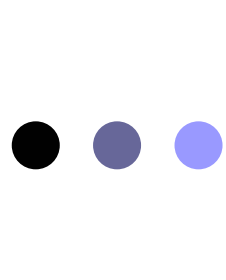
Integrales de funciones racionales $\frac{Q(x)}{f(x)}$

3) A cada par de raíces complejas conjugadas simples le corresponde una fracción:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

4) A cada par de raíces complejas conjugadas múltiples le corresponden n fracciones:

$$\frac{A_n x+B_n}{(x^2+px+q)^n} + \frac{A_{n-1} x+B_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \dots + \frac{A_1 x+B_1}{x^2+px+q}$$



3.1 INTEGRAL INDEFINIDA TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integrales de funciones racionales $\frac{Q(x)}{f(x)}$

$$1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C$$

$$2) \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C, \quad n \neq 1$$

$$3) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q} dx$$



3.1 INTEGRAL INDEFINIDA TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Integración de funciones trigonométricas $\int R(\sin x, \cos x) dx$

se pueden reducir siempre a una integral racional con el llamado *cambio universal* $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$

- i) Si R es una función impar en $\sin x$
($R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$) se resuelve con el cambio $\cos x = t$
- ii) Si R es una función impar en $\cos x$
($R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$) se resuelve con el cambio $\sin x = t$
- iii) Si R es una función par en $\sin x$ y $\cos x$
($R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$) se resuelve con el cambio $\operatorname{tg} x = t$

$$\int \sin^n x dx; \int \cos^n x dx \quad n \text{ un exponente positivo y par}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$



3.1 INTEGRAL INDEFINIDA TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

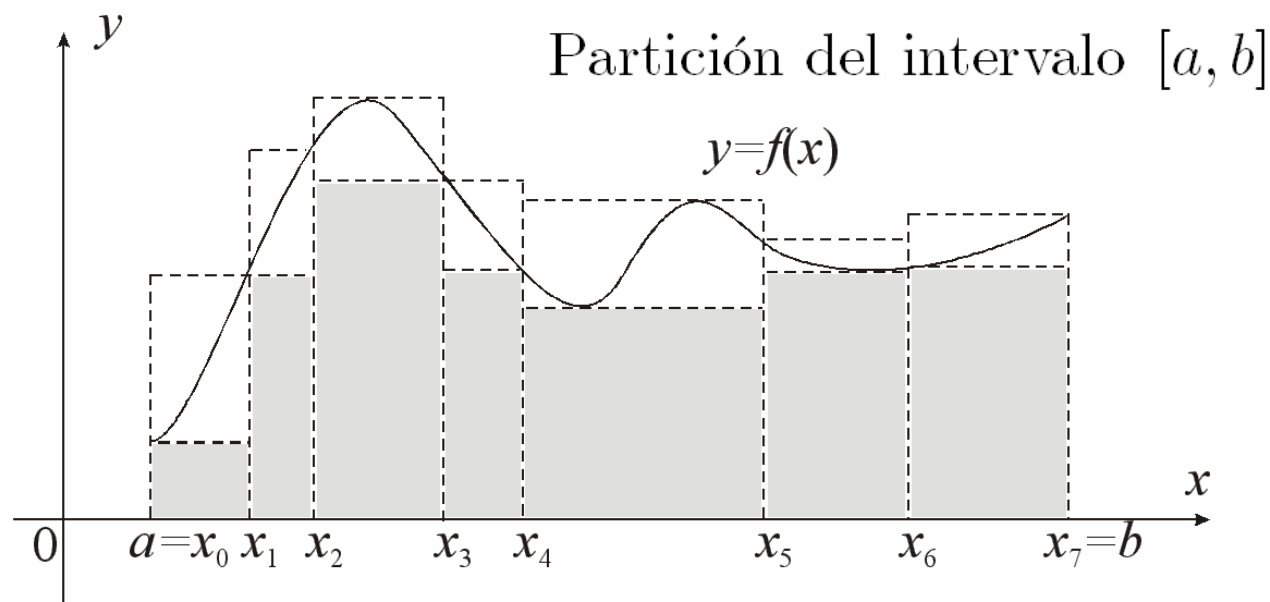
Integración de algunas funciones irracionales cuadráticas

$$\int R(x, \sqrt{a^2 \pm x^2}) dx \text{ y } \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	se resuelve con el cambio	$x = a \operatorname{sen} t$ o $x = a \operatorname{cost}$
$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$	se resuelve con el cambio	$x = a \operatorname{tg} t$ o $x = a \operatorname{sh} t$
$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	se resuelve con el cambio	$x = a \operatorname{sec} t$ o $x = a \operatorname{ch} t$

3.2 INTEGRALES DEFINIDAS

DEFINICIÓN



Suma inferior y suma superior

$$s_1(P_1) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$
$$S_1(P_1) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

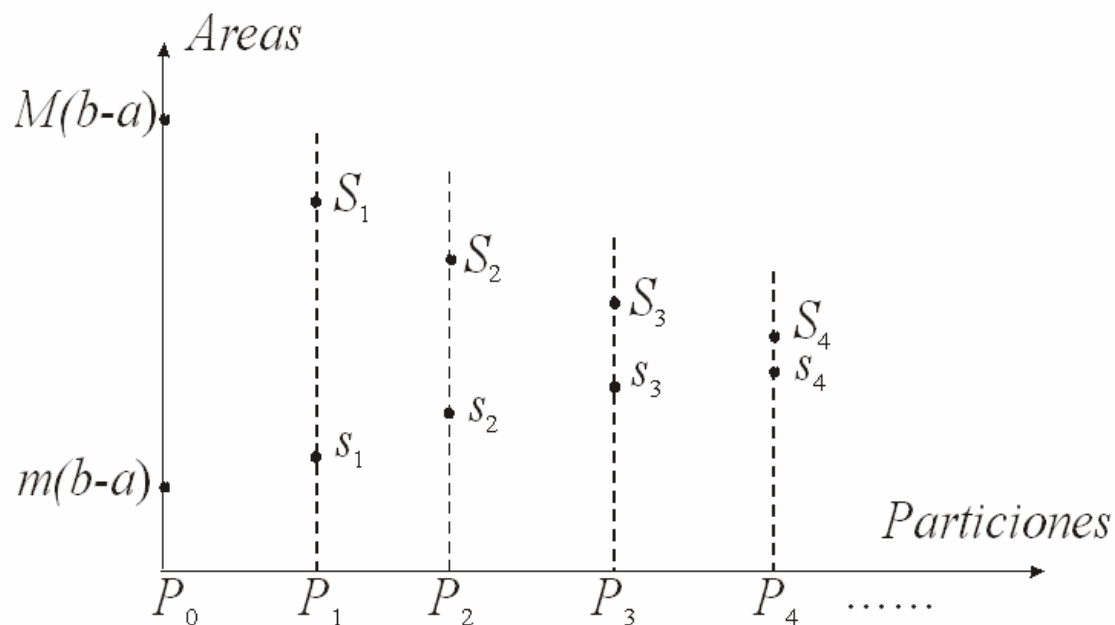


3.2 INTEGRALES DEFINIDAS

DEFINICIÓN

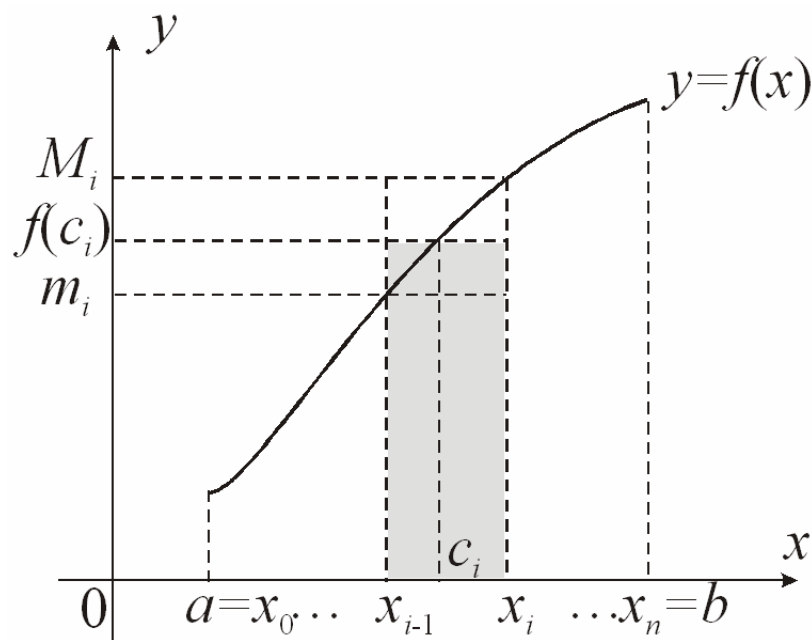
Función integrable en el sentido de Riemann $\int_a^b f(x)dx$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = s = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$$



3.2 INTEGRALES DEFINIDAS

DEFINICIÓN



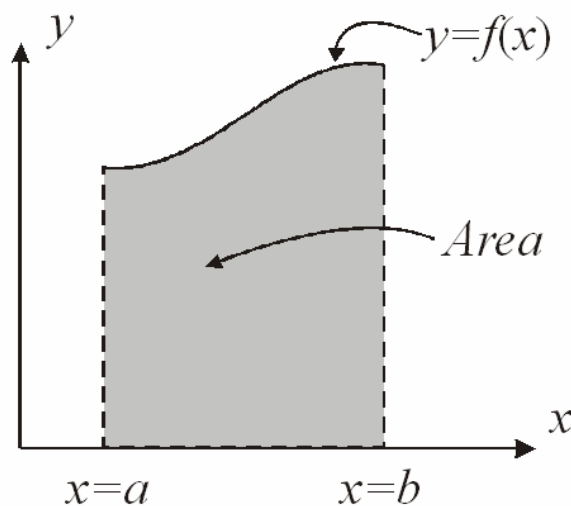
$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

Función integrable en el sentido de Riemann

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$



3.2 INTEGRALES DEFINIDAS PROPIEDADES



$$A = \int_a^b f(x) dx$$

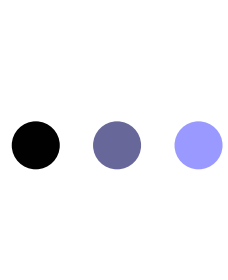
$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b K f(x) dx = K \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$



3.2 INTEGRALES DEFINIDAS PROPIEDADES

Valor medio

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Teorema del valor medio

Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ existe algún punto $c \in [a, b]$ tal que

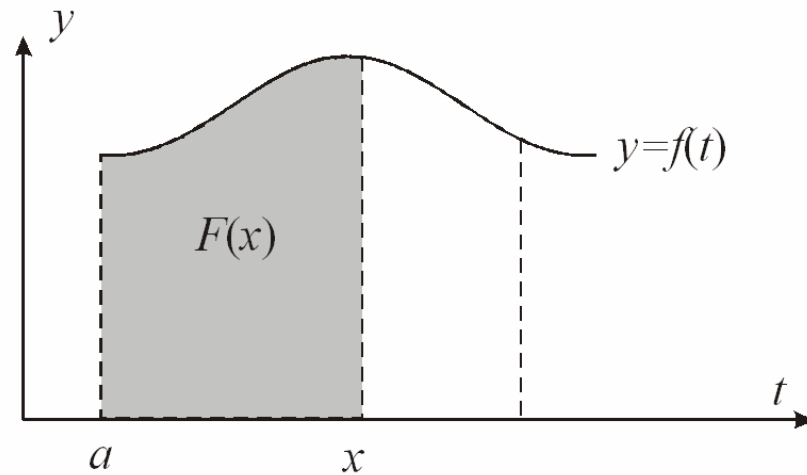
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



3.2 INTEGRALES DEFINIDAS

TEOREMAS FUNDAMENTALES del CÁLCULO

La integral como función de su límite superior



$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$



3.2 INTEGRALES DEFINIDAS

TEOREMAS FUNDAMENTALES del CÁLCULO

Primer teorema fundamental del cálculo

Sea $f(t)$ una función acotada e integrable en el intervalo $[a, b]$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{es continua en } [a, b]$$

si $f(t)$ es continua en el intervalo $[a, b]$

$F(x)$ es derivable

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$



3.2 INTEGRALES DEFINIDAS

TEOREMAS FUNDAMENTALES del CÁLCULO

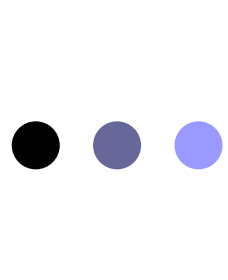
Segundo teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow

*Sea $f(x)$ una función integrable
supongamos que existe alguna función $F(x)$ continua*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$



3.2 INTEGRALES DEFINIDAS

CÁLCULO de INTEGRALES

Integración por partes

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

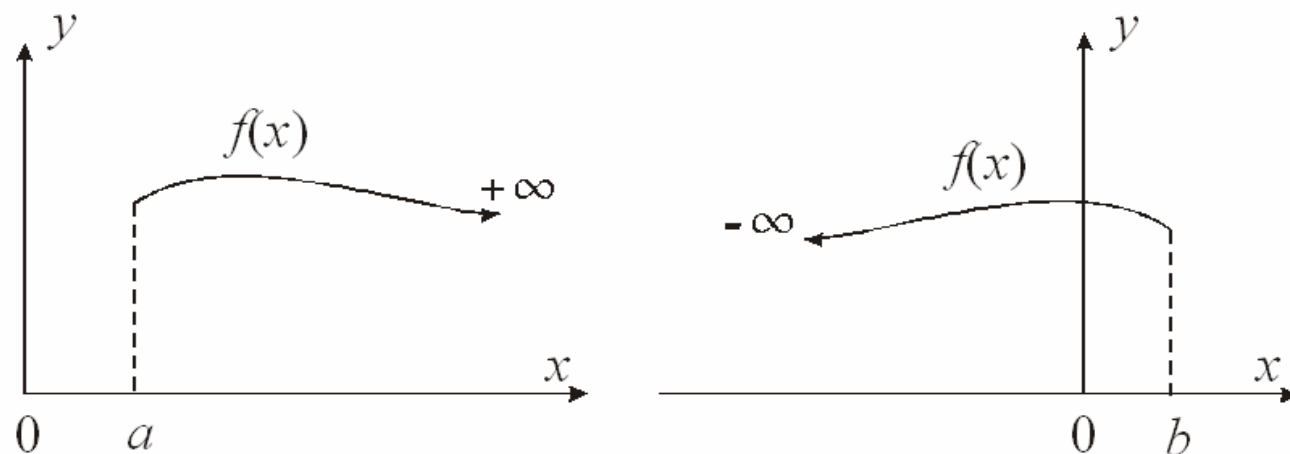
Cambio de variable

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$



3.3 INTEGRALES IMPROPIAS

1ª ESPECIE

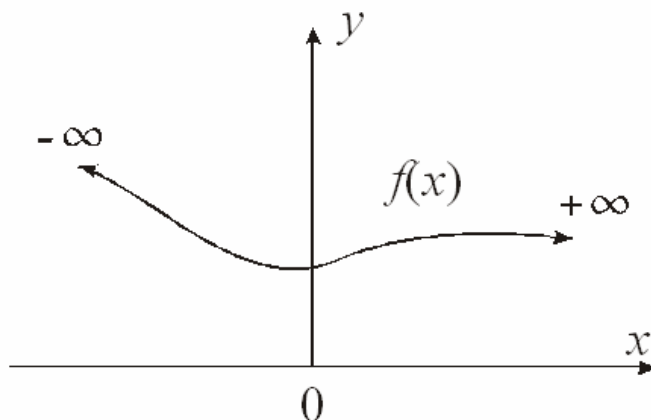


$$I = \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

$$I = \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^b f(x) dx$$

3.3 INTEGRALES IMPROPIAS

1ª ESPECIE



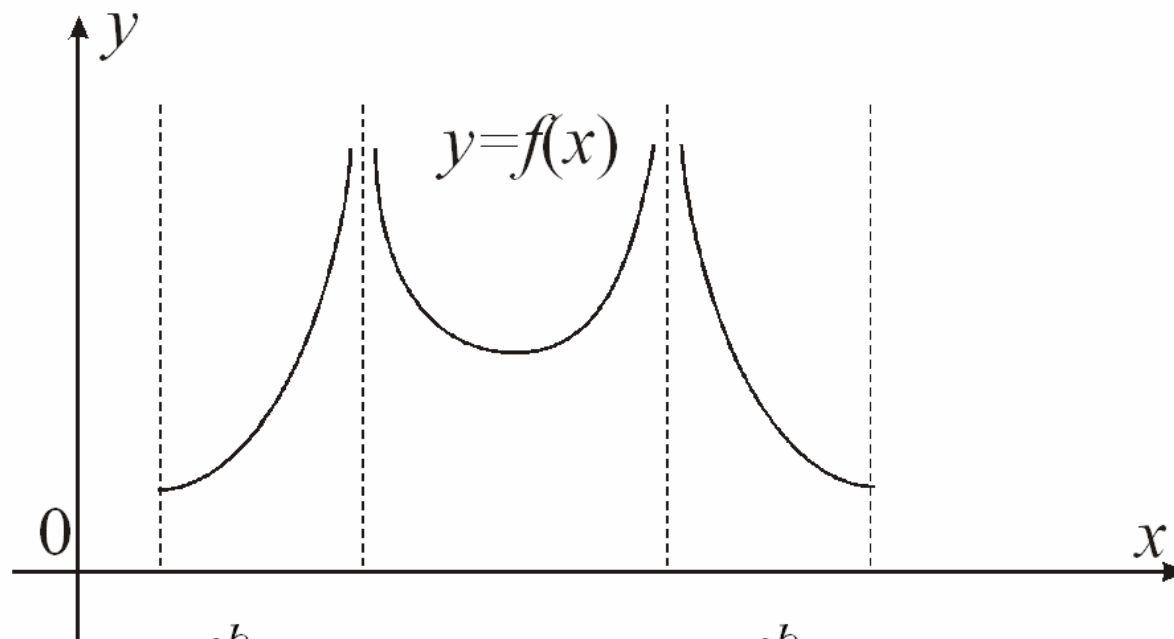
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_N^c f(x) dx + \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_c^M f(x) dx$$



3.3 INTEGRALES IMPROPIAS

2ª ESPECIE



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$



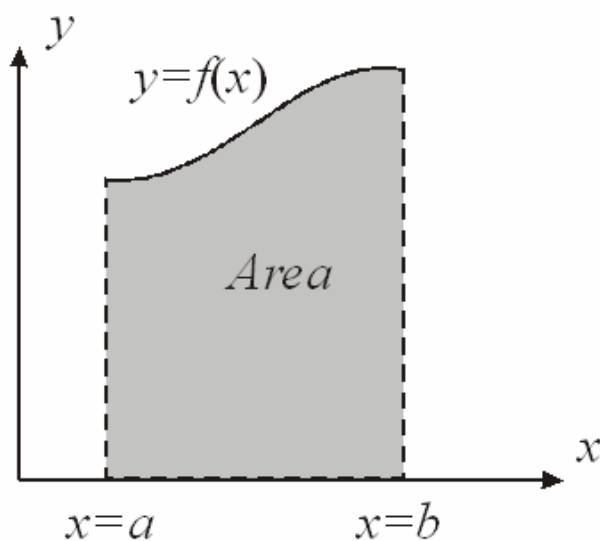
3.3 INTEGRALES IMPROPIAS

2ª ESPECIE

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)dx$$

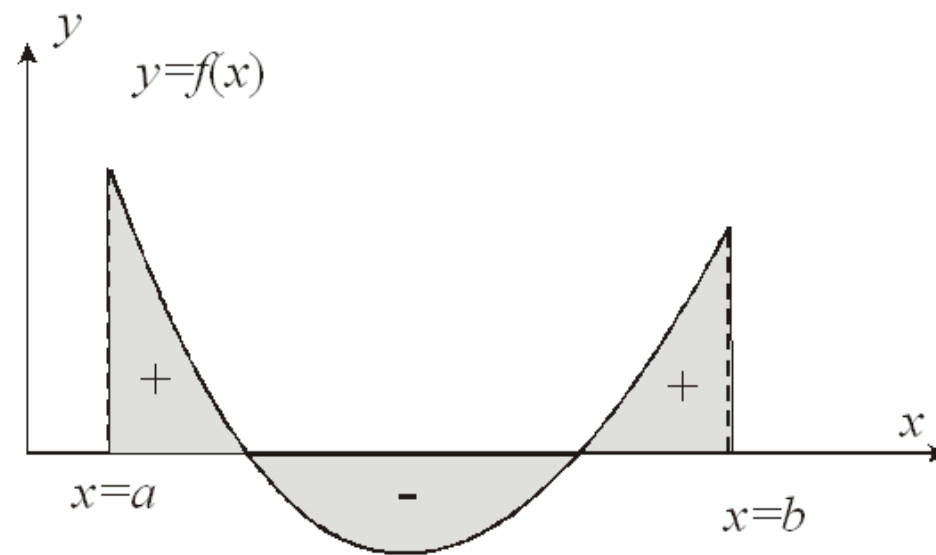
$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$$

3.4 APLICACIONES GEOMÉTRICAS ÁREAS PLANAS



a) $f(x) \geq 0$.

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

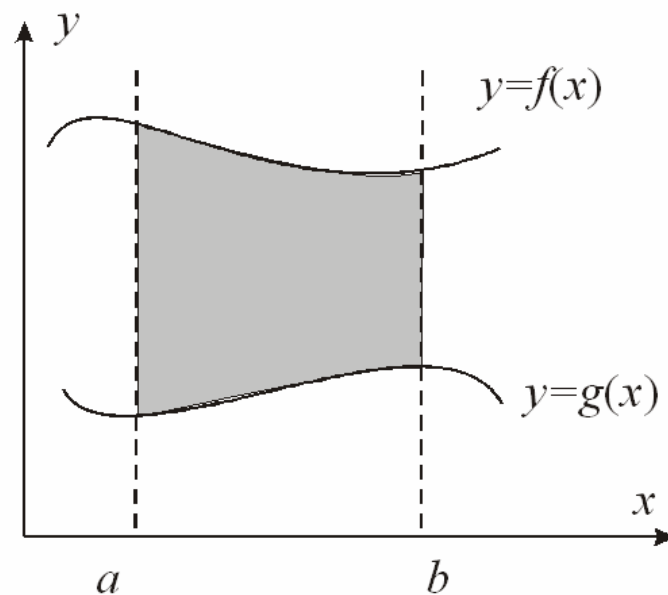


b) $f(x) \geq 0$.

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

3.4 APLICACIONES GEOMÉTRICAS

ÁREAS PLANAS

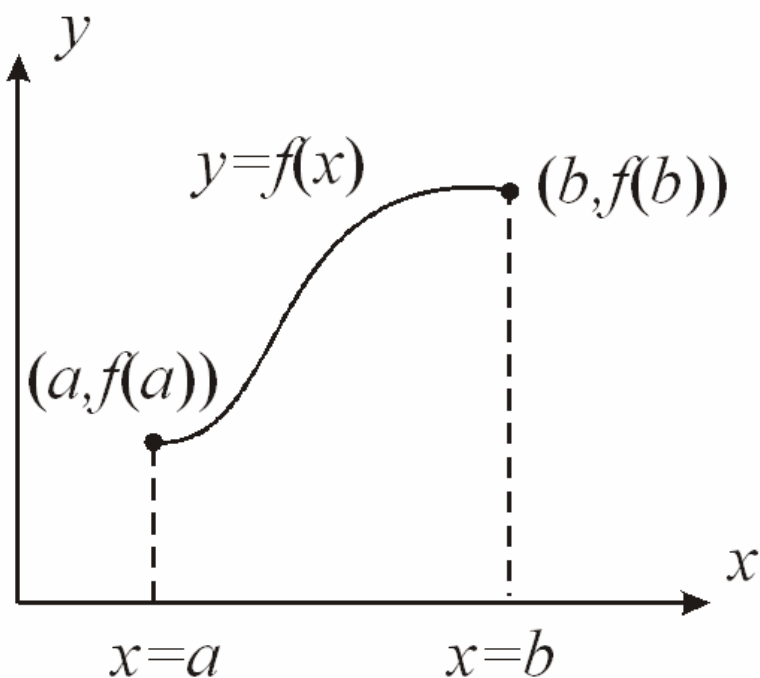


c) Entre dos curvas.

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

3.4 APLICACIONES GEOMÉTRICAS

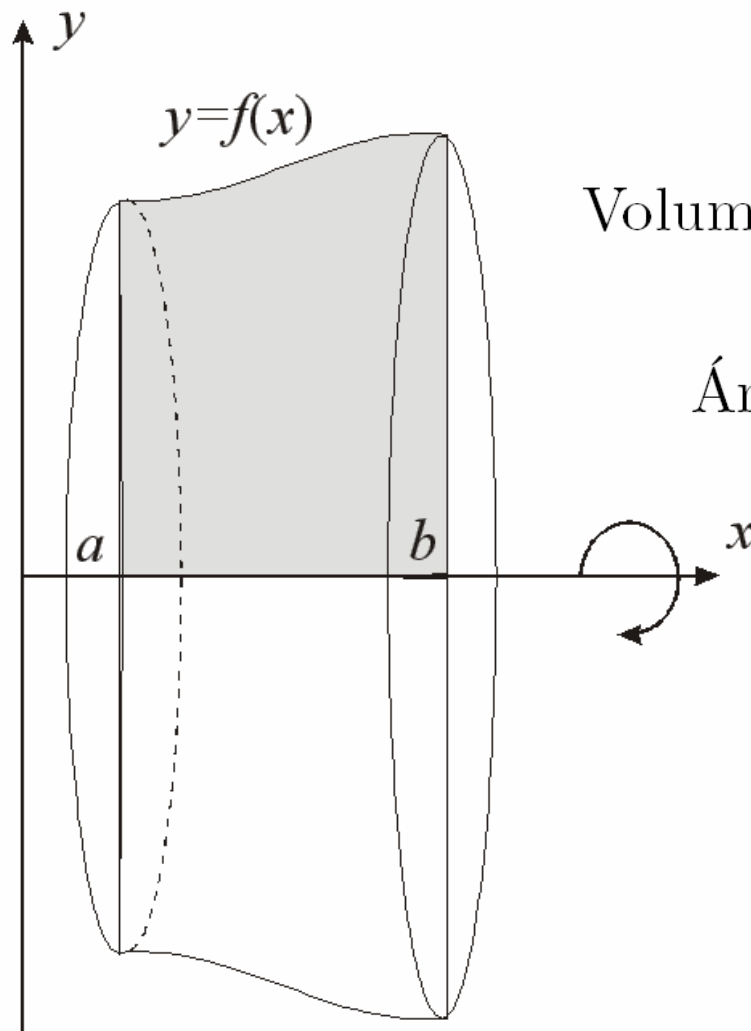
LONGITUD de un ARCO de CURVA



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$



3.4 APLICACIONES GEOMÉTRICAS CUERPOS de REVOLUCIÓN



$$\text{Volumen} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$\text{Área} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$