



CAPÍTULO 2.

CÁLCULO DIFERENCIAL

en UNA VARIABLE

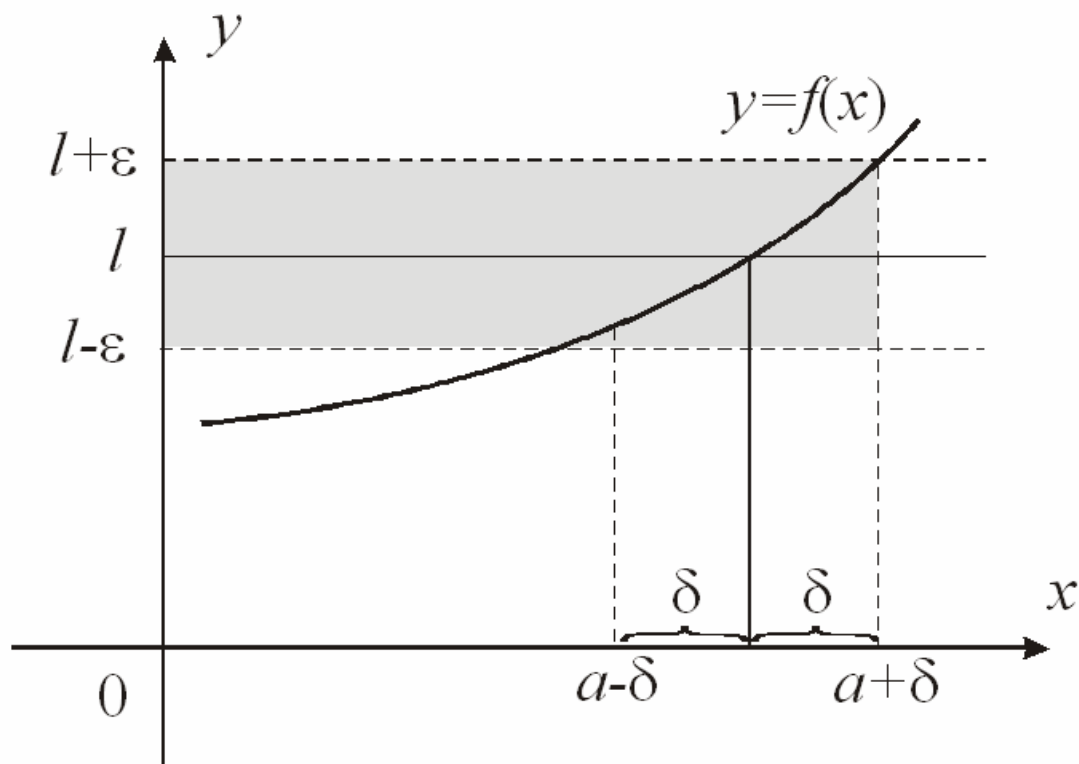
- **2.1 LÍMITE de una FUNCIÓN**
- **2.2 SUCESSIONES NUMÉRICAS**
- **2.3 SERIES NUMÉRICAS**
- **2.4 CONTINUIDAD de una FUNCIÓN**
- **2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN**
- **2.6 SERIES de POTENCIAS**



2.1 LÍMITE de una FUNCIÓN

DEFINICIÓN

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$



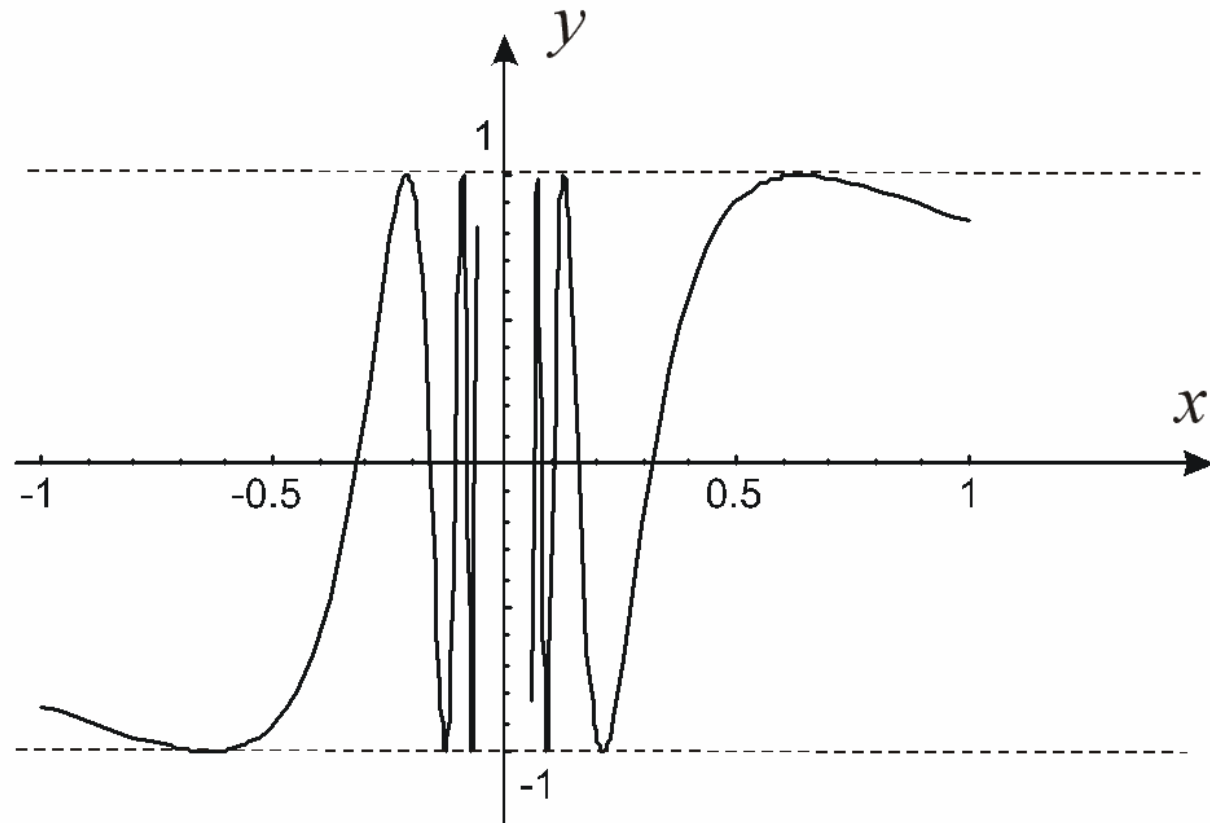
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall x \in A,$$

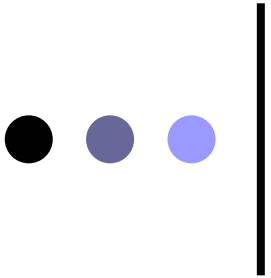
$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$



2.1 LÍMITE de una FUNCIÓN DEFINICIÓN

$$y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$





2.1 LÍMITE de una FUNCIÓN PROPIEDADES

$$i) \lim_{x \rightarrow a} [u(x) \pm v(x)] = \lim_{x \rightarrow a} u(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} v(x)$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow a} [u(x) \cdot v(x)] = \lim_{x \rightarrow a} u(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} v(x)$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} u(x)}{\lim_{x \rightarrow a} v(x)}; \quad (si \lim_{x \rightarrow a} v(x) \neq 0)$$

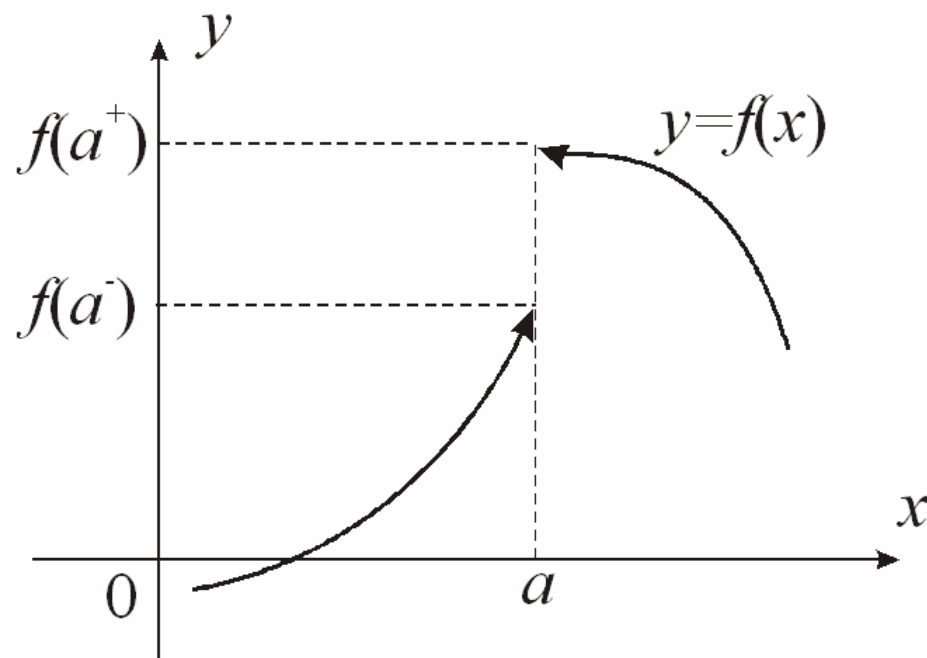


2.1 LÍMITE de una FUNCIÓN

LÍMITES LATERALES

$$f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

$$f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$



Límites laterales y existencia de límite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$



2.1 LÍMITE de una FUNCIÓN INDETERMINACIONES

$$\infty - \infty \quad \infty \cdot 0 \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 1^{\infty} \quad \infty^0 \quad 0^0$$



2.1 LÍMITE de una FUNCIÓN INFINITÉSIMOS

Comparación de Infinitésimos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \\ \infty \\ l \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \\ 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ f \text{ y } g \text{ son equivalentes} \\ \end{matrix} \quad f(x) \sim g(x)$$

Principio de Sustitución

$$\alpha(x) \sim f(x) \text{ y } \beta(x) \sim g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \cdot \beta(x)$$



2.1 LÍMITE de una FUNCIÓN INFINITÉSIMOS EQUIVALENTES

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} f(x) &\sim f(x) \sim \operatorname{tg} f(x) \\ \operatorname{arc} \operatorname{sen} f(x) &\sim f(x) \sim \operatorname{arc} \operatorname{tg} f(x) \end{aligned}$$

$$1 - \cos f(x) \sim \frac{f(x)^2}{2}$$

$$\ln(1 + f(x)) \sim f(x)$$

$$e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$$

$$(1 + f(x))^p - 1 \sim pf(x); \quad p \in \mathbb{R}$$

$$u(x) \rightarrow 1$$

$$\ln(u(x)) \sim u(x) - 1$$



2.1 LÍMITE de una FUNCIÓN INFINITOS

cuando $x \rightarrow \infty$ son equivalentes

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \sim a_n x^n$$

$$\ln(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) \sim \ln x^n$$

$$\ln x \ll x^k \ll a^x \ll x! \ll x^{bx}$$

Jerarquía de infinitos



2.1 LÍMITE de una FUNCIÓN INDETERMINACIONES

a) Límites de la forma: $0 \cdot \infty$

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

b) Límites de la forma: $\infty - \infty$

$$f(x) - g(x) = f(x) \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right]$$



2.1 LÍMITE de una FUNCIÓN INDETERMINACIONES

c) Límites de la forma 1^∞ , ∞^0 y 0^0

$$L = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$$

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}$$



2.2 SUCESSIONES NUMÉRICAS

DEFINICIÓN

Una sucesión de números reales es una aplicación $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(a_n)$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n - 1)d, \dots$$

$$a_1, a_1 \cdot r, a_1 \cdot r^2, \dots, a_1 \cdot r^{n-1}, \dots$$



2.2 SUCESSIONES NUMÉRICAS

LÍMITE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0(\varepsilon) \text{ tal que } \forall n > N_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$



2.3 SERIES NUMÉRICAS

DEFINICIÓN

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Carácter de una serie

Diremos que la serie es convergente si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S < \infty$$

y al número S se le llama *suma* de la serie. Diremos que la serie es divergente si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$$



2.3 SERIES NUMÉRICAS

CRITERIOS de CONVERGENCIA

Condición necesaria de convergencia

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.



2.3 SERIES NUMÉRICAS

CRITERIOS de CONVERGENCIA

Series de términos positivos

Convergencia de la serie armónica generalizada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leq 1$

Criterio del producto o de Pringsheim

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^{\alpha} = \lambda$. Entonces si $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ y $\begin{cases} \alpha > 1 \text{ la serie converge} \\ \alpha \leq 1 \text{ la serie diverge} \end{cases}$



2.3 SERIES NUMÉRICAS

CRITERIOS de CONVERGENCIA

Series de términos positivos

Criterio del cociente o Criterio de D'Alembert

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \text{ Entonces } \begin{cases} i) \text{ Si } \lambda < 1 \text{ la serie converge} \\ ii) \text{ Si } \lambda > 1 \text{ la serie diverge} \\ iii) \text{ Si } \lambda = 1 \text{ es un caso dudoso} \end{cases}$$

Criterio de la raíz o Criterio de Cauchy

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}. \text{ Entonces } \begin{cases} i) \text{ Si } \lambda < 1 \text{ la serie converge} \\ ii) \text{ Si } \lambda > 1 \text{ la serie diverge} \\ iii) \text{ Si } \lambda = 1 \text{ es un caso dudoso} \end{cases}$$



2.3 SERIES NUMÉRICAS

SERIES ALTERNADAS

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ donde } a_n \geq 0$$

Criterio de Leibniz

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie alternada que verifica

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \text{ ii) } |a_{n+1}| < |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$$

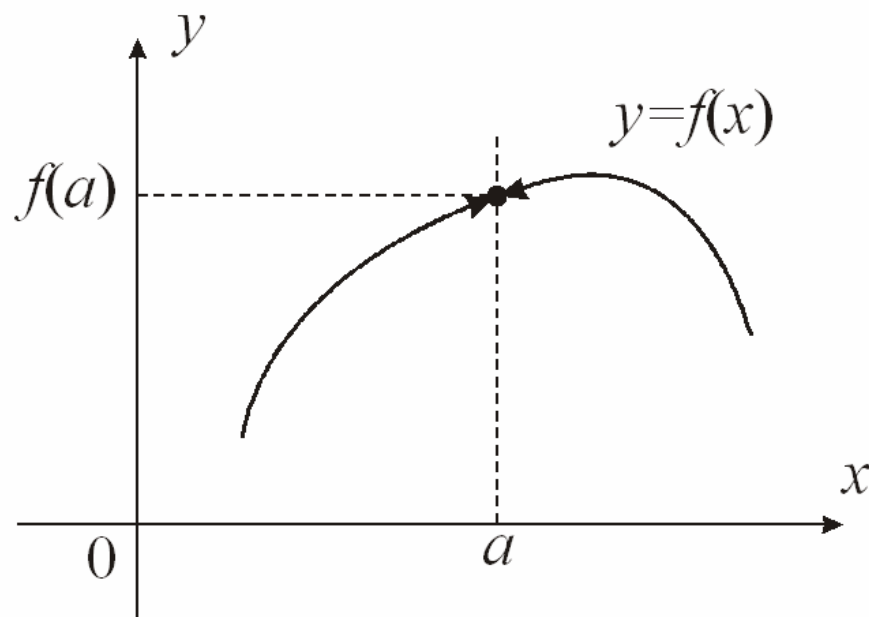
entonces la serie es convergente.

2.4 CONTINUIDAD de una FUNCIÓN

DEFINICIÓN

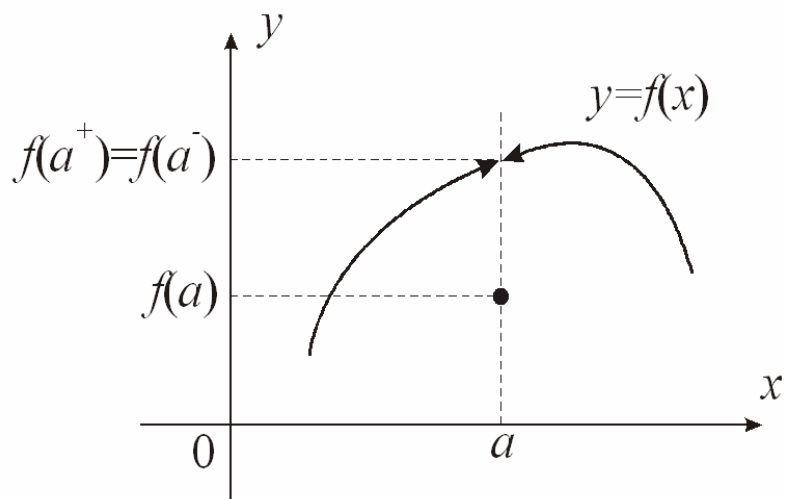
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

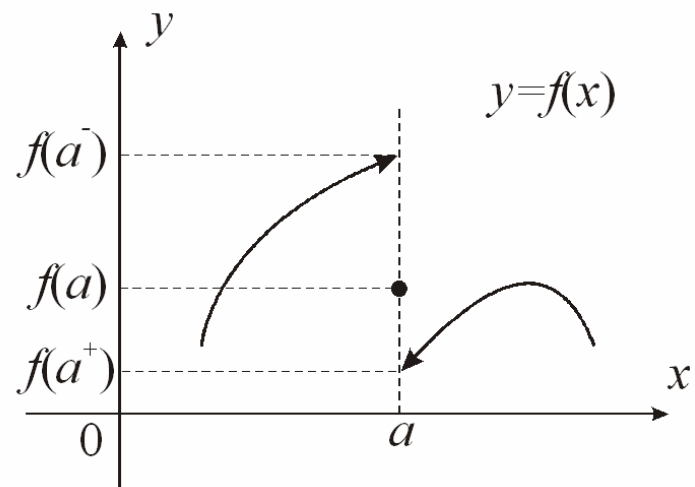




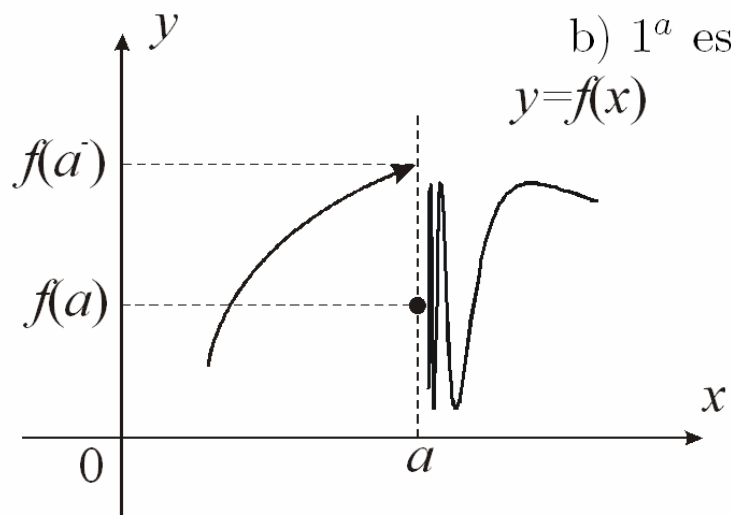
2.4 CONTINUIDAD de una FUNCIÓN DISCONTINUIDADES



a) 1ª especie evitable.



b) 1ª especie no evitable.



c) 2ª especie.



2.4 CONTINUIDAD de una FUNCIÓN PROPIEDADES

Operaciones con funciones continuas.

$$f(x) \pm g(x); \quad f(x).g(x); \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (g(a) \neq 0)$$

Continuidad de la funcion compuesta

$$y = f[\varphi(x)]$$

Continuidad de las funciones elementales

Toda función elemental es continua en todo punto en el cual esté definida.



2.4 CONTINUIDAD de una FUNCIÓN PROPIEDADES

Propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado

Teorema de Weierstrass

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ entonces $f(x)$ alcanza el máximo y el mínimo en $[a, b]$

Teorema de Darboux de los Valores intermedios

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y si $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ y $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, entonces

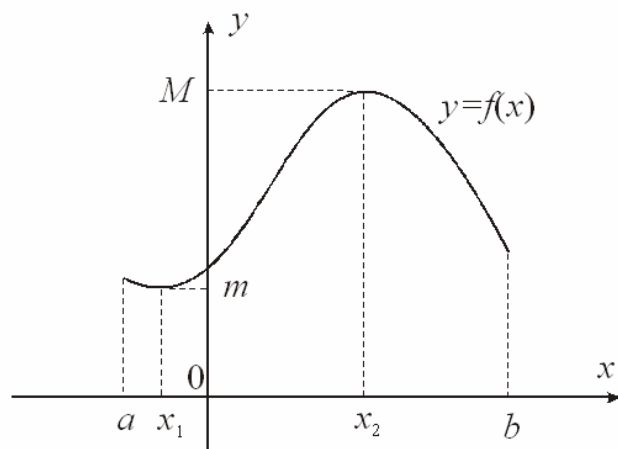
$$\forall A / m \leq A \leq M, \exists x_0 \in [a, b] \text{ tal que } f(x_0) = A$$

Teorema de Bolzano

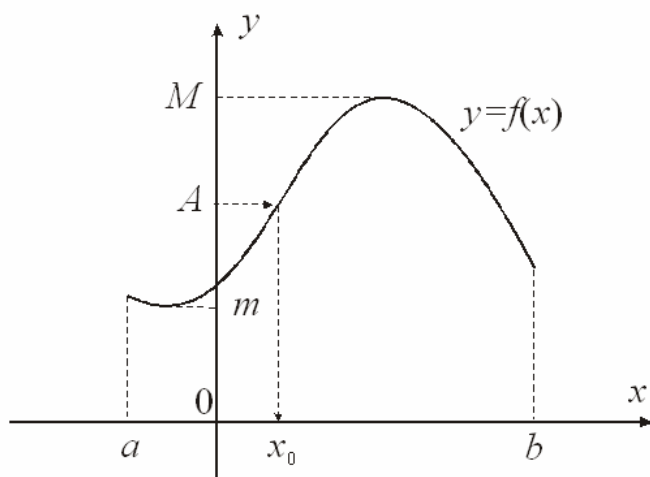
Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo

$$\text{si } f(a) \cdot f(b) < 0, \exists c \in (a, b) \text{ tal que } f(c) = 0$$

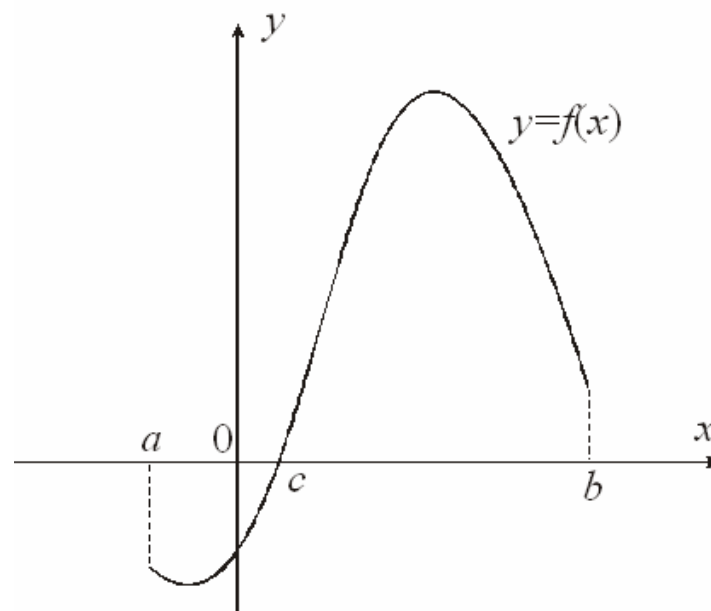
2.4 CONTINUIDAD de una FUNCIÓN PROPIEDADES



a) Teorema de Weierstrass.



b) Teorema de valores intermedios.



c) Teorema de Bolzano.



2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN

DEFINICIONES

Derivada en un punto

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

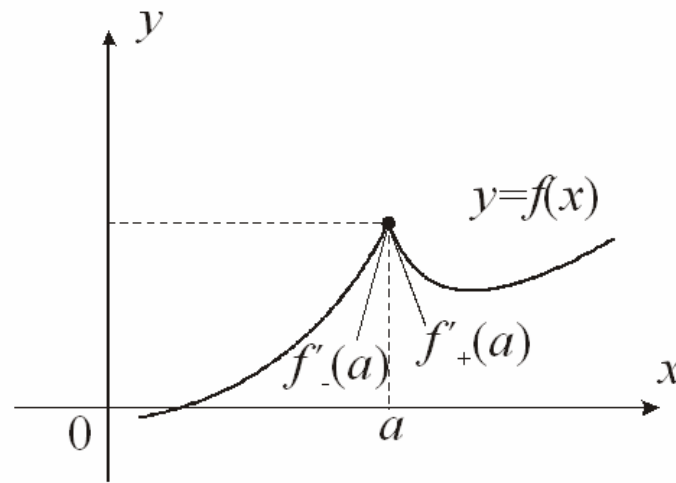
Derivadas laterales

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

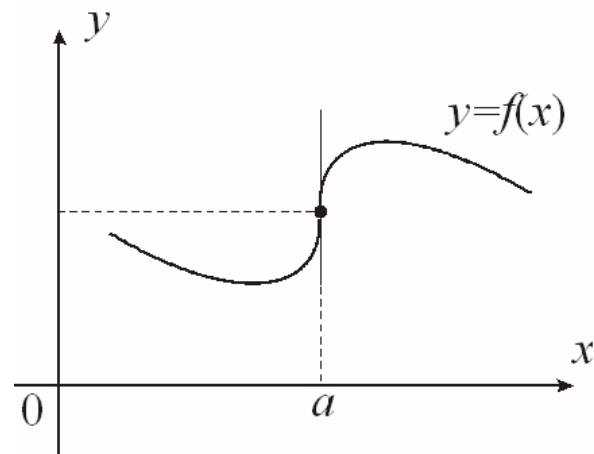
Derivadas laterales y Derivada

$$f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a)$$

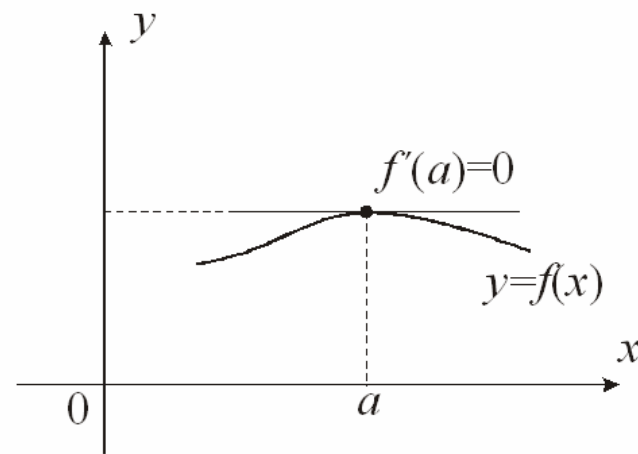
2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



a) Punto anguloso.



b) Tangente vertical.



c) Tangente horizontal.



2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN

FUNCIÓN DERIVADA

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

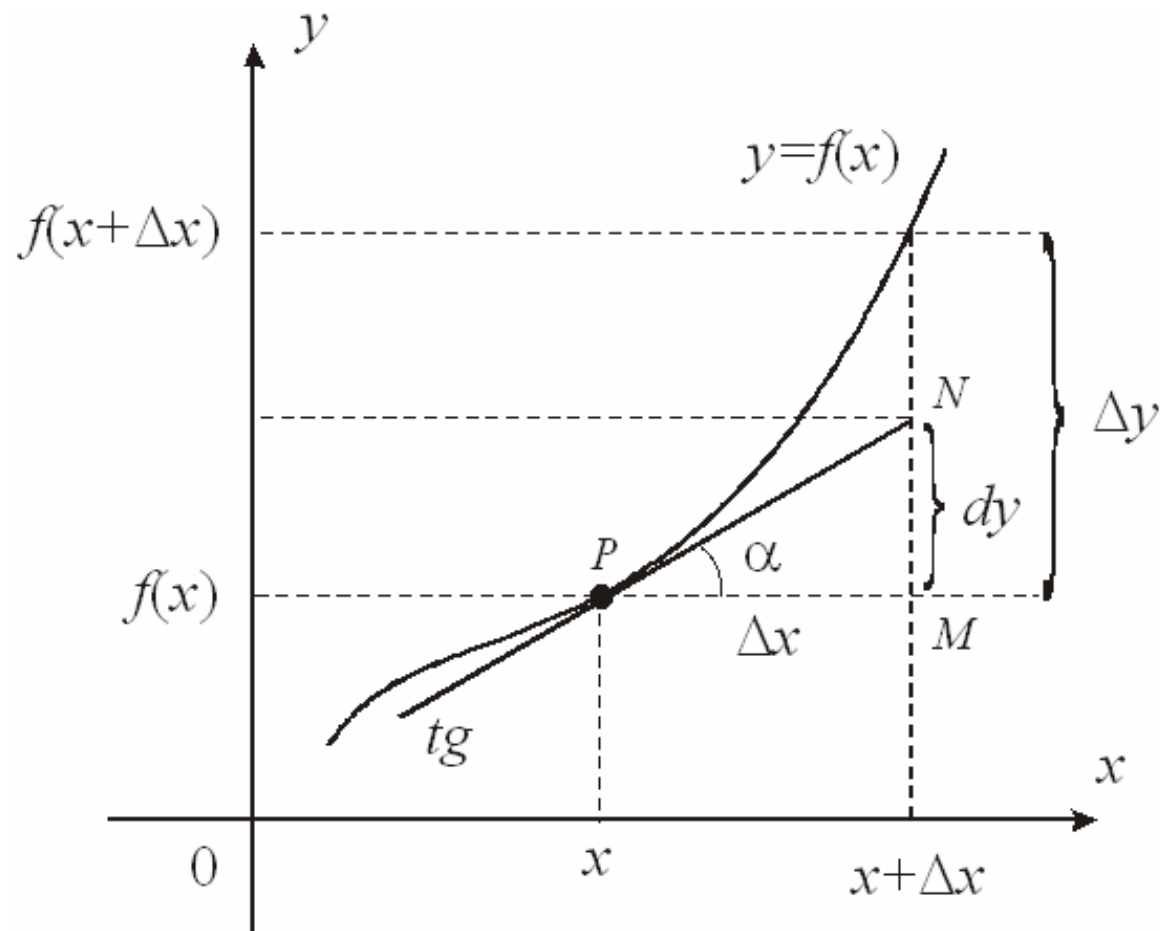
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon \Rightarrow \Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x$$



2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN DIFERENCIAL

$$dy = f'(x)\Delta x$$





2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN

DERIVADAS de FUNCIONES ELEMENTALES

$y = k$	$y' = 0$	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{arcsen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$	$y = \operatorname{arc} \cos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{sh} x$	$y' = \operatorname{ch} x$	$y = \operatorname{argsh} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$y = \operatorname{ch} x$	$y' = \operatorname{sh} x$	$y = \operatorname{argch} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$y = \operatorname{th} x$	$y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$y = \operatorname{argth} x$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$



2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN PROPIEDADES

Propiedades fundamentales de la derivada

Múltiplo constante	$y = cf$	$y' = cf'$
Regla de la suma o la diferencia	$y = f \pm g$	$y' = f' \pm g'$
Regla de linealidad	$y = af \pm bg$	$y' = af' \pm bg'$
Regla del producto	$y = f \cdot g$	$y' = f'g + fg'$
Regla del cociente	$y = \frac{f}{g}$	$y' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena

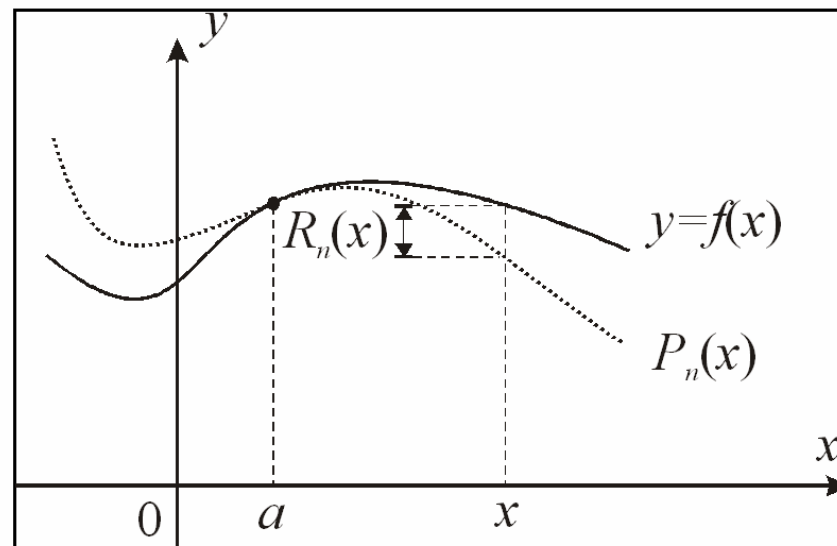
$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN POLINOMIO de TAYLOR

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + \dots + C_n(x - a)^n$$

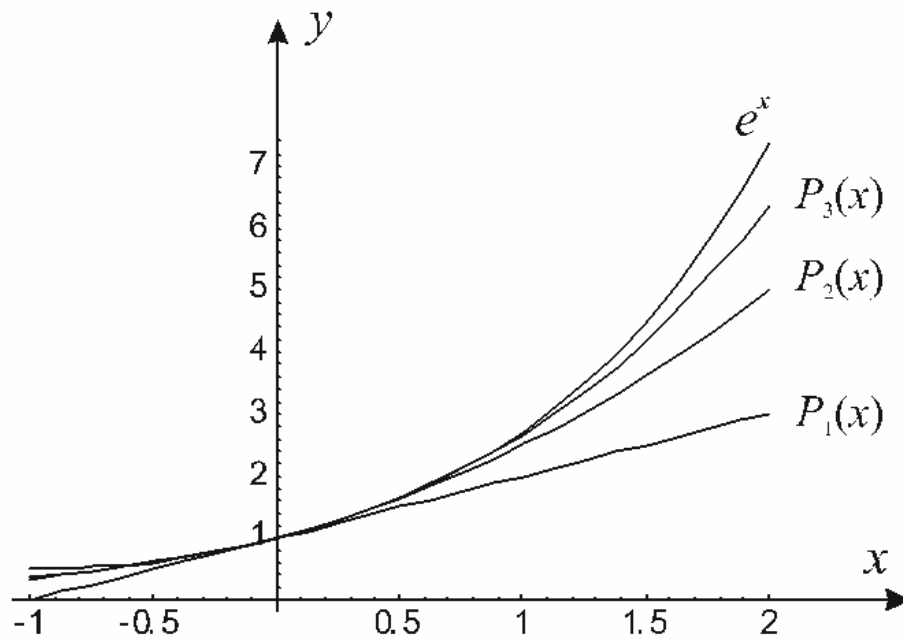
$$P_n(a) = f(a); P'_n(a) = f'(a); P''_n(a) = f''(a); \dots; P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

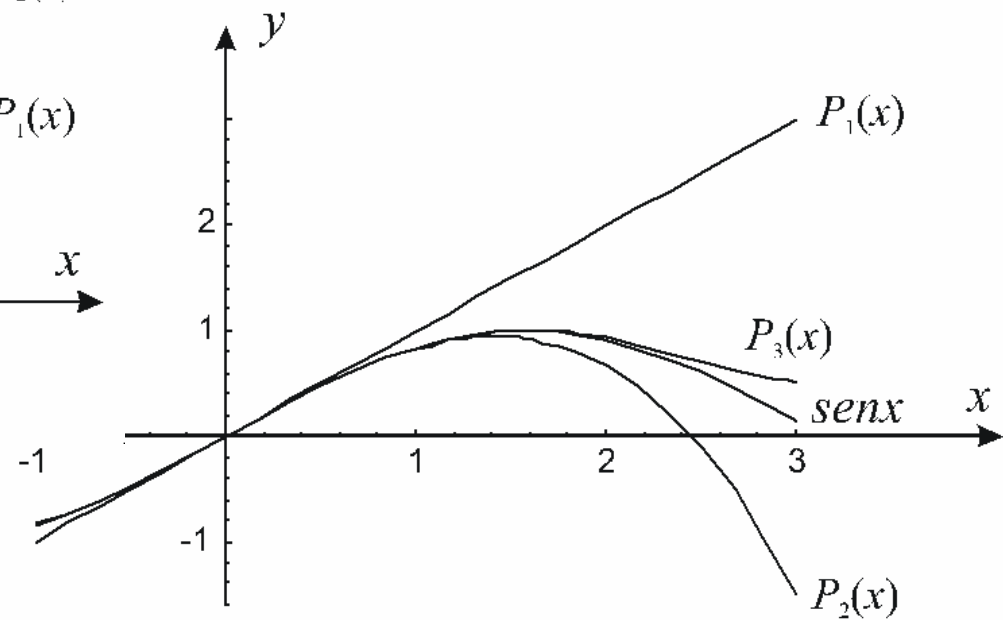




2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN POLINOMIO de TAYLOR



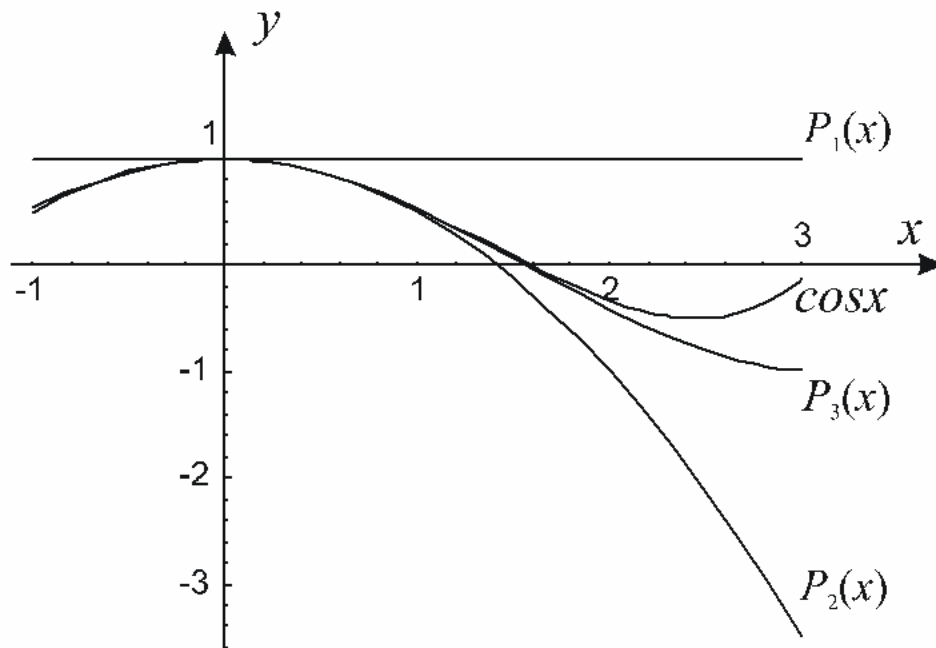
(a) $f(x) = e^x$



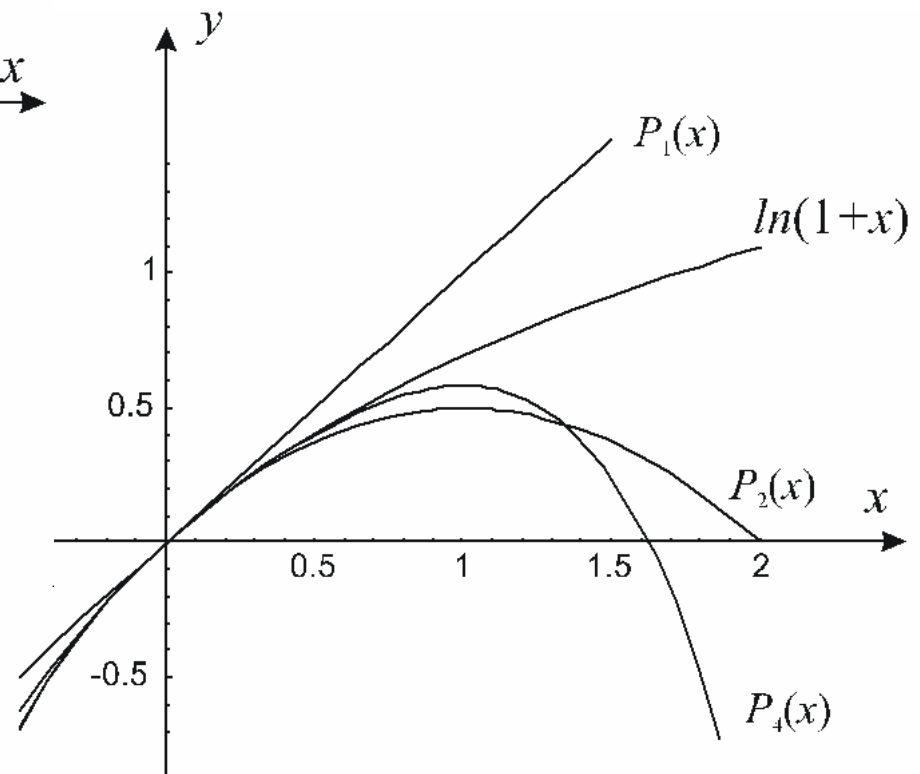
(b) $f(x) = \text{sen } x$



2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN POLINOMIO de TAYLOR



(c) $f(x) = \cos x$



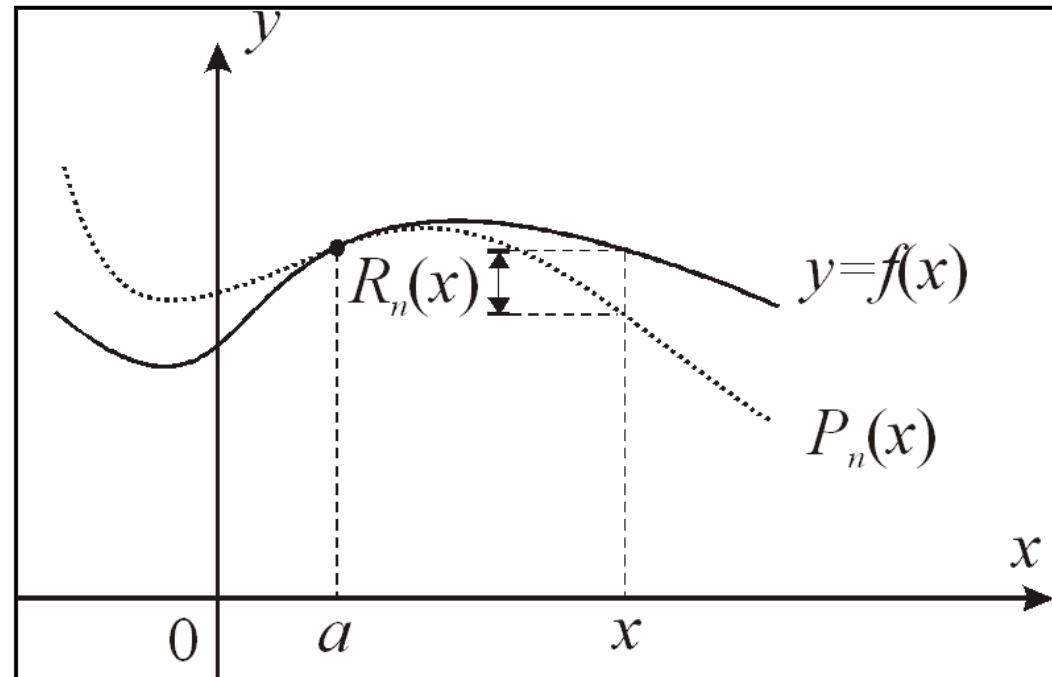
(d) $f(x) = \ln(1+x)$



2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN POLINOMIO de TAYLOR

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$



$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad t \in (a, x)$$

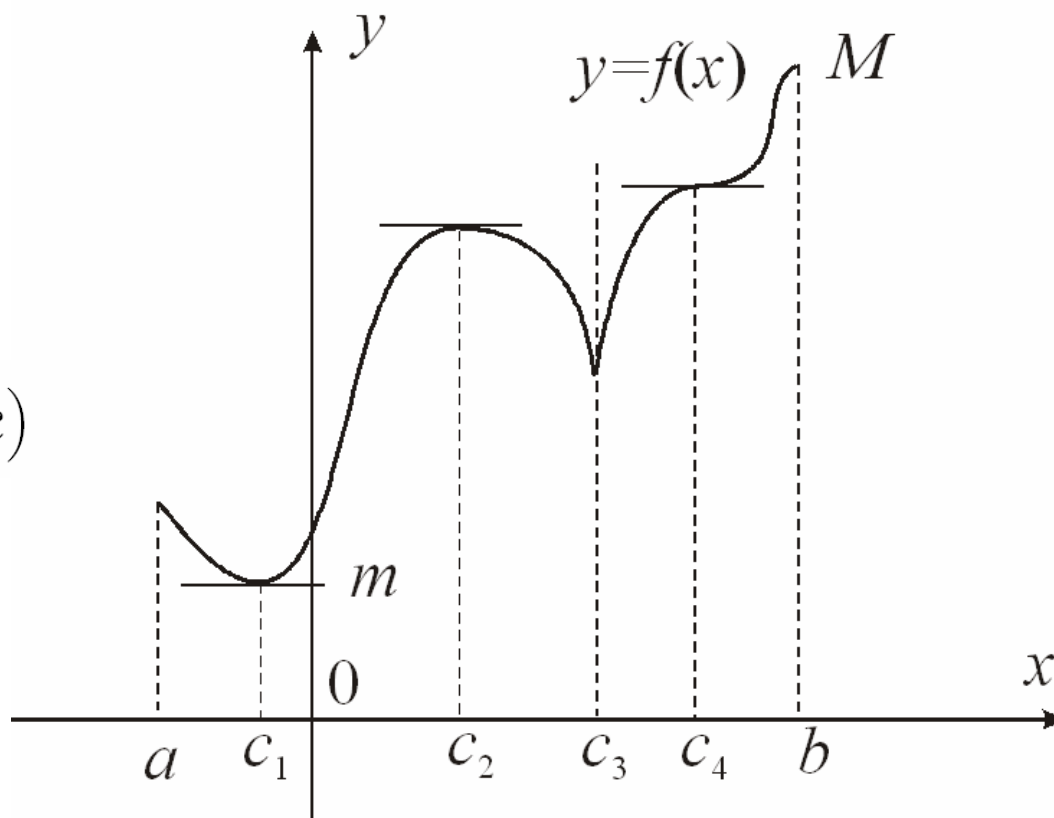


2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN

CONDICIÓN NECESARIA de EXTREMO

Punto crítico

$$f'(c) = 0 \text{ o bien } \nexists f'(c)$$



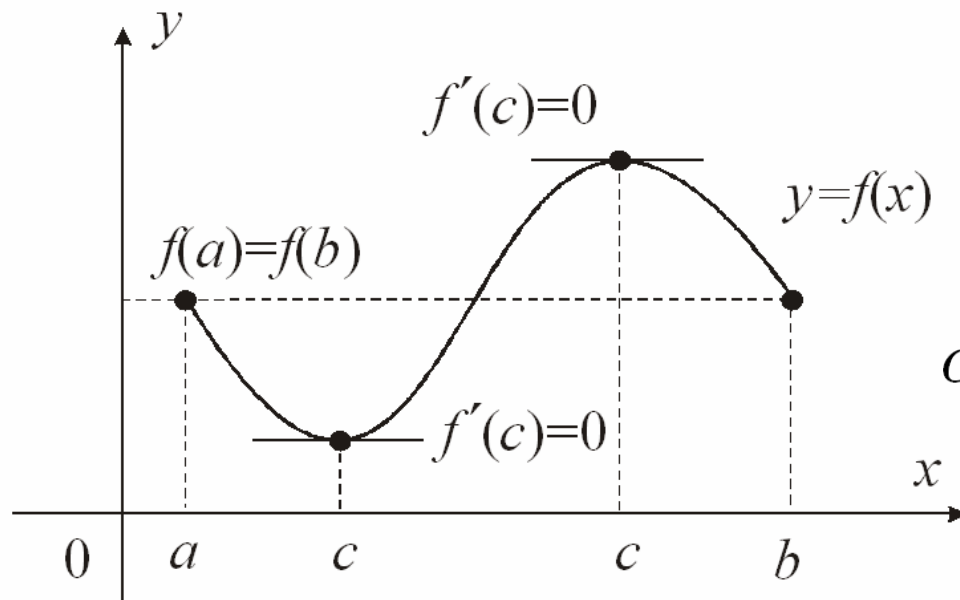
2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN

TEOREMA de ROLLE

Sea $f(x)$

continua $[a, b]$ y derivable en (a, b)

$$f(a) = f(b)$$



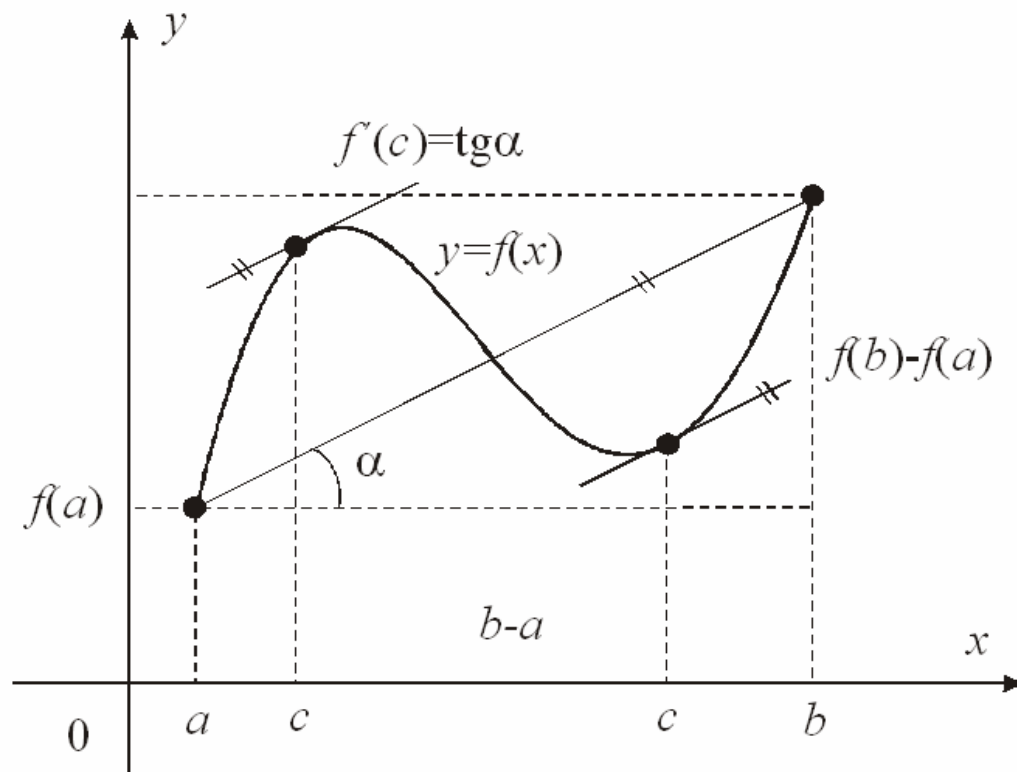
$c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN

TEOREMA del VALOR MEDIO de LAGRANGE

Sea $f(x)$

continua $[a, b]$ y derivable en (a, b)



$c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN

REGLA de L'HOPITAL

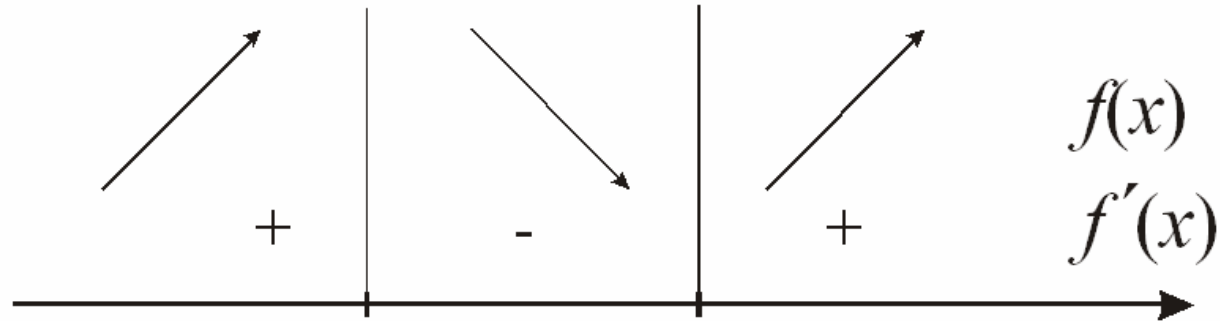
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN CRECIMIENTO y DECRECIMIENTO





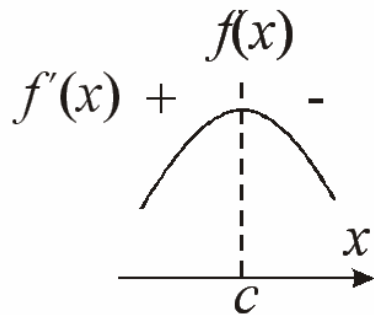
2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN CONDICIONES SUFICIENTES de EXTREMO

- 1) La Definición
- 2) Condición suficiente basada en la derivada primera
- 3) Condición suficiente basada en la derivada segunda
- 4) Condición suficiente basada en las derivadas superiores

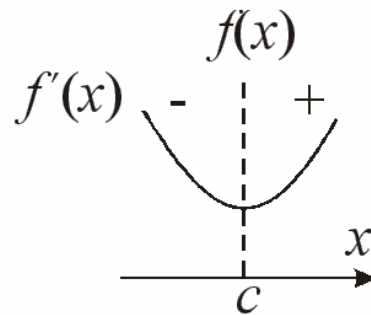
2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN

CONDICIONES SUFICIENTES de EXTREMO

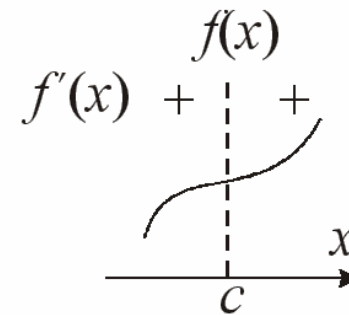
Condición suficiente basada en la derivada primera.



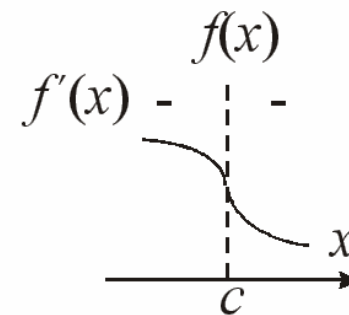
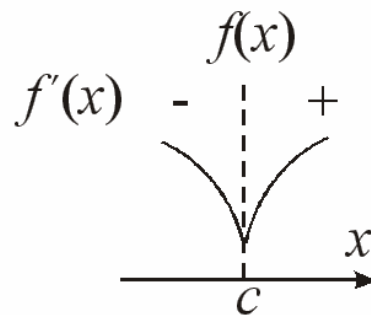
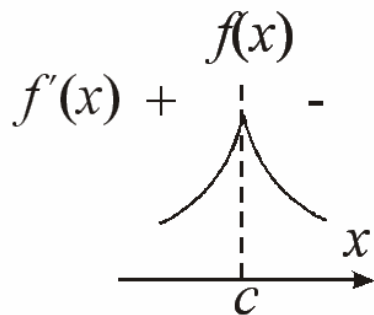
(a)



(b)



(c)



2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN

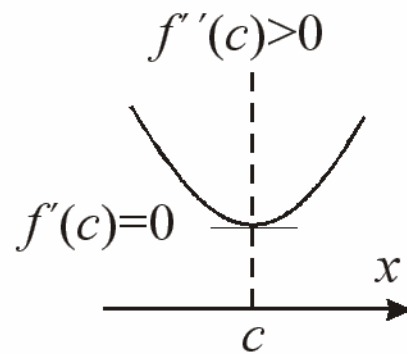
CONDICIONES SUFICIENTES de EXTREMO

Condición suficiente basada en la derivada segunda

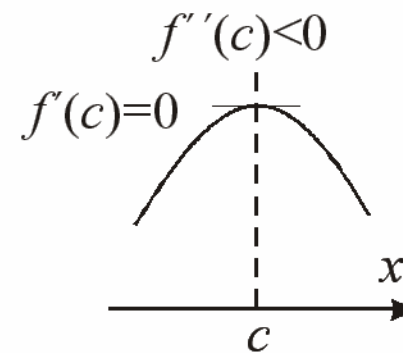
Si $f''(c) > 0 \Rightarrow c$ es mínimo relativo de f

Si $f''(c) < 0 \Rightarrow c$ es máximo relativo de f

Si $f''(c) = 0 \Rightarrow$ El criterio no decide



(a)

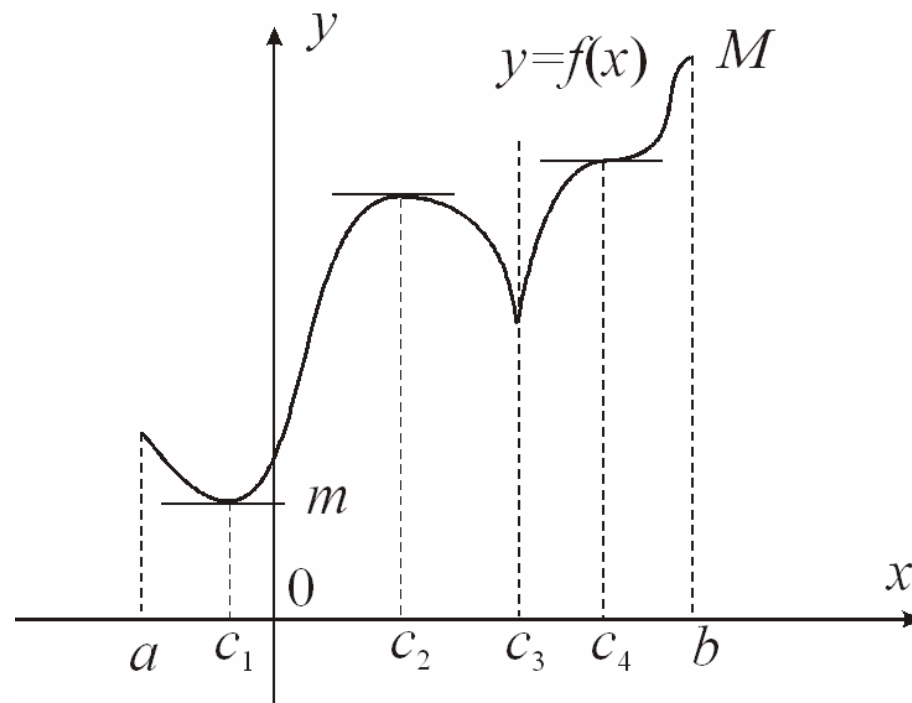


(b)



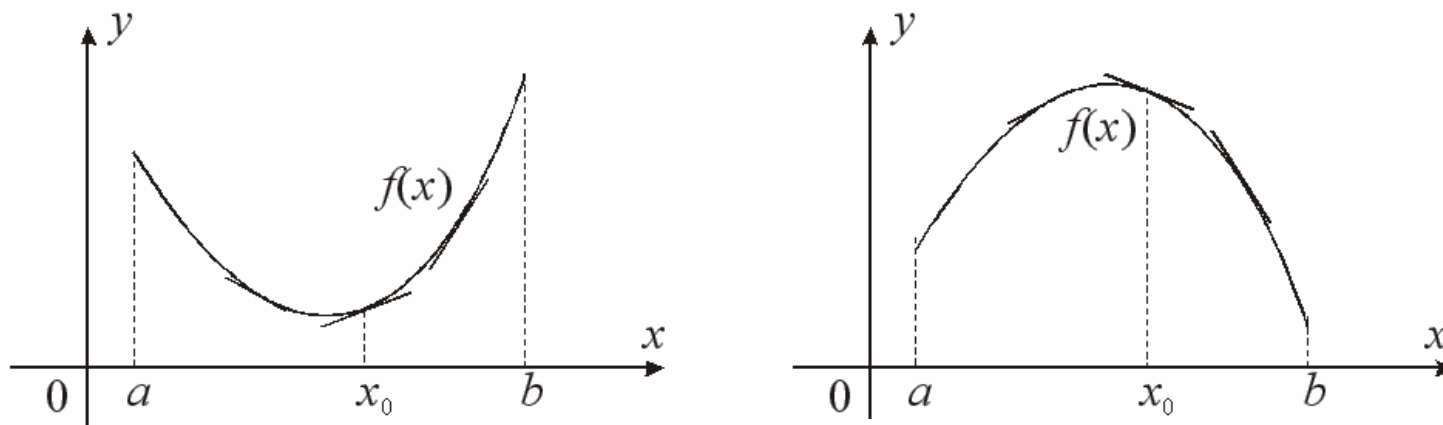
2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN EXTREMOS ABSOLUTOS

- 1) Calcular los puntos críticos de f en (a, b)
- 2) Hallar el valor de f en a , b y en los puntos críticos.
- 3) Comparar los valores obtenidos en el paso 2.

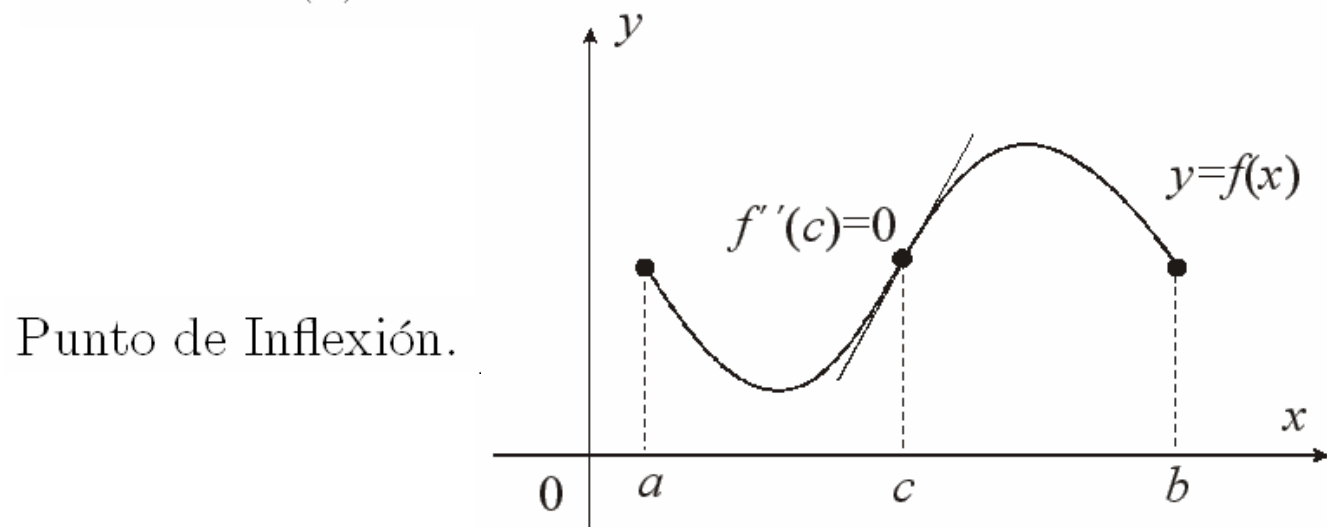




2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN CONCAVIDAD, CONVEXIDAD y PUNTOS de INFLEXIÓN



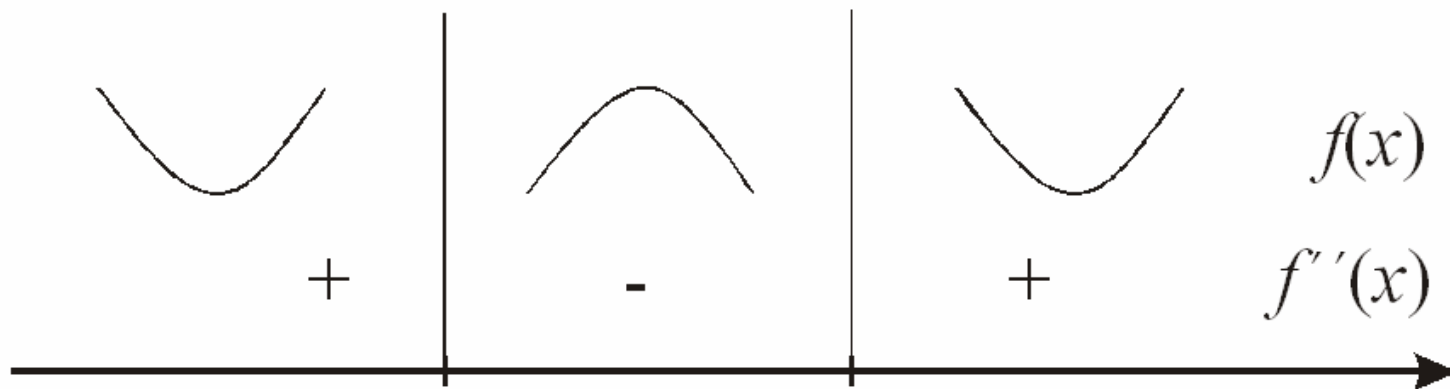
(a) Función convexa. (b) Función cóncava.



Punto de Inflexión.

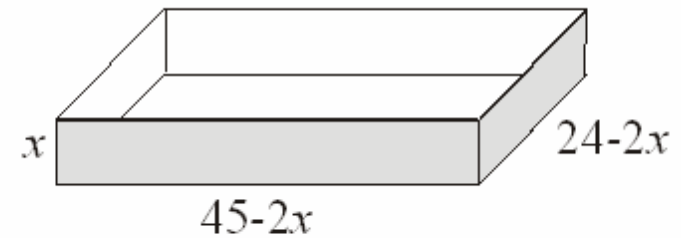
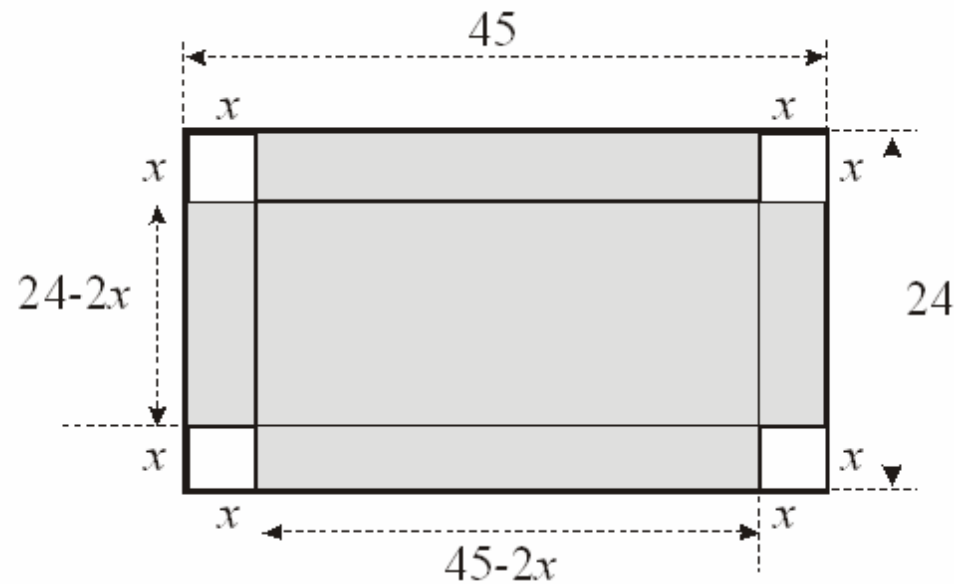


2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN CONCAVIDAD, CONVEXIDAD y PUNTOS de INFLEXIÓN

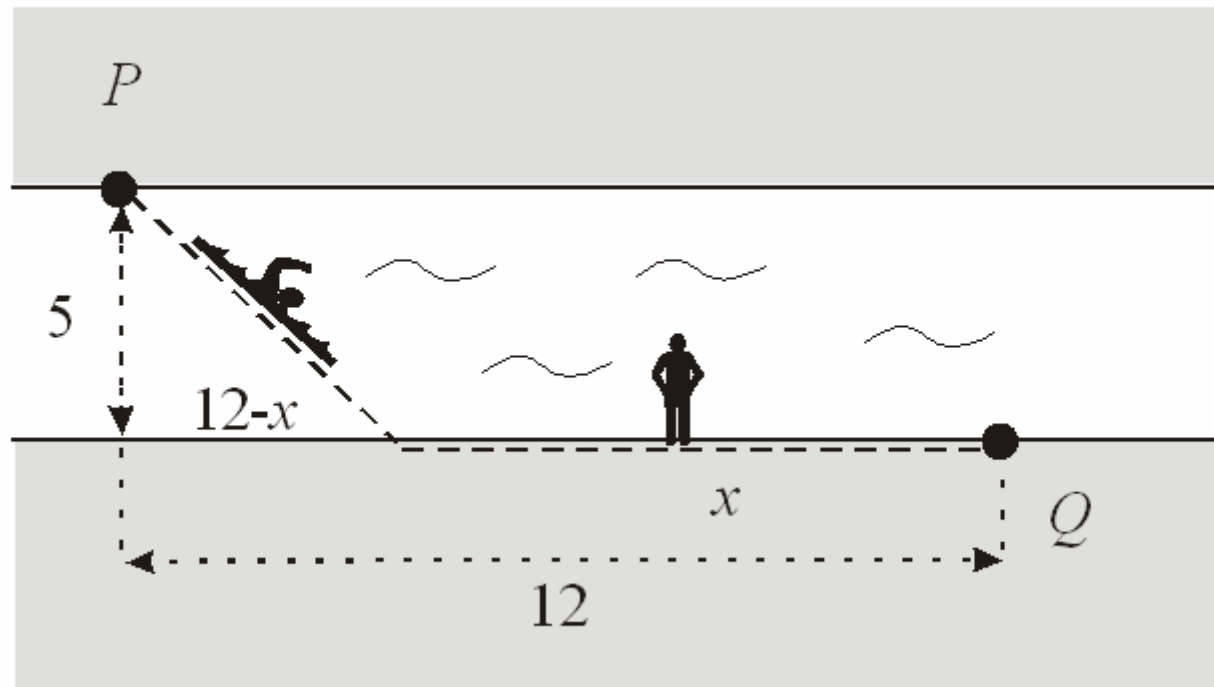




2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN OPTIMIZACIÓN en INGENIERÍA



2.5 DERIVADA y DIFERENCIAL de una FUNCIÓN OPTIMIZACIÓN en INGENIERÍA



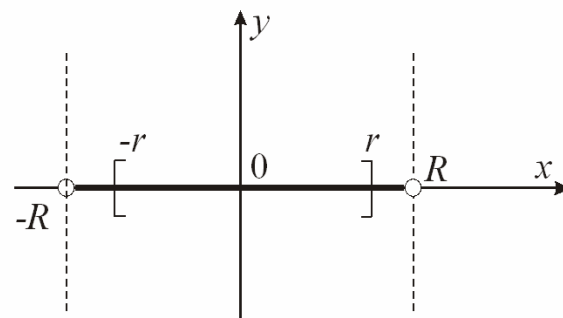


2.6 SERIES de POTENCIAS

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Convergencia de una serie de potencias

La serie converge para todo $|x - x_0| < R$.



fórmula de Hadamard

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}; \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

Desarrollo de una función en serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$