

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Fecha	Lunes, 26/05/2010	Página 1 de 9
	Centro		
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Convocatoria	Junio (Curso 2009-2010)	

Ejercicio 1.- Dado el problema de valor inicial
$$\begin{cases} y'(t) = -aty^2(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

- Obtener la solución analítica exacta {2 ptos}
- Resolver utilizando el método de Taylor de orden 2 para $a=1$ y tomando $h=0.5$. {4 ptos}.
- Determinar, en función del valor de a , la variación del tamaño del paso para que al aplicar una vez el método de Runge-Kutta adaptativo de orden 1-2 con paso inicial 0.5 el error sea menor que 0.1 {4 ptos}

Solución exacta {2 ptos}

La ecuación NO es lineal, por tanto será necesario utilizar el método de variables separables.

$$y'(t) = -aty^2(t) \rightarrow \frac{-y'(t)}{y^2(t)} = at \rightarrow \int \frac{-dy}{y^2(t)} = \int at dt \rightarrow \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{2}at^2 + cte \rightarrow y(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}at^2 + cte}$$

Aplicando la condición inicial

$$y(0) = \frac{1}{\frac{1}{2}a \cdot 0^2 + cte} = 2 \rightarrow cte = \frac{1}{2} \Rightarrow y(t) = \frac{2}{at^2 + 1}$$

Método de Taylor de orden 2 {4 ptos}

Los métodos de Taylor vienen dados como

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \rightarrow y(t_{k-1}) + h \left[y'(t_{k-1}) + \dots + y^{(n-1)}(t_{k-1}) \frac{h^{(n-2)}}{(n-1)!} \right] + y^{(n)}(\xi) \frac{h^{(n)}}{n!}$$

$$\begin{cases} w_0 = \alpha & t_k = a + kh \\ w_k = w_{k-1} + hT_{n-1}(h, t_{k-1}, w_{k-1}) & 1 \leq k \leq n \quad h = \frac{b-a}{n} \end{cases}$$

por tanto lo primero que se necesita es calcular las derivadas de la función (tomando $a=1$).

$$y' = -ty^2$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = -y^2 - 2tyy' = -y^2 - 2ty(-ty^2) = y^2(2t^2y - 1)$$

El método de Taylor de orden 2 queda pues como

$$\begin{cases} T_2(h, t, y) = (-ty^2) + \frac{h}{2}(y^2(2t^2y - 1)) \\ w_0 = 2 \\ w_k = w_{k-1} + hT_2(h, t_{k-1}, w_{k-1}) \\ = w_{k-1} + h \left[(-t_{k-1}w_{k-1}^2) + \frac{h}{2}(w_{k-1}^2(2t_{k-1}^2w_{k-1} - 1)) \right] \end{cases} \quad \begin{matrix} h = 0.5 & t_k = 0 + kh \\ 1 \leq k \leq 2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 + 0.5 \left[(-t_0 w_0^2) + \frac{h}{2}(w_0^2(2t_0^2 w_0 - 1)) \right] \\ &= 2 + 0.5 \left[(-0 \cdot 2^2) + \frac{0.5}{2}(2^2(2 \cdot 0^2 \cdot 2 - 1)) \right] = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1 + 0.5 \left[(-t_1 w_1^2) + \frac{h}{2}(w_1^2(2t_1^2 w_1 - 1)) \right] \\ &= \frac{3}{2} + 0.5 \left[\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right) + \frac{0.5}{2} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{3}{2} - 1 \right) \right) \right] = \frac{111}{128} \approx 0.8672 \end{aligned}$$

Método de Runge-Kutta adaptativo 1-2 {4 ptos}

El método se plantea como

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + k_1 \\ z_{n+1} &= y_n + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \right) \\ k_1 &= hf(t_n, y_n) \\ k_2 &= hf(t_n + h, y_n + k_1) \end{aligned}$$

Donde el error local y la variación del tamaño del paso viene dado respectivamente por

$$\delta_{actual} = \tau_{n+1}^k(h) = \frac{1}{h} |z_{n+1} - y_{n+1}| \quad q = \frac{\delta h}{|z_{n+1} - y_{n+1}|}$$

Aplicando a nuestro caso

$$\begin{aligned} k_1 &= h(-at_{k-1}w_{k-1}^2) \quad k_2 = h(-a(t_{k-1} + h)(w_{k-1} + k_1)^2) \\ y_{n+1} &= y_n + k_1 \quad z_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \right) \\ k_1 &= 0.5(-a \cdot 0 \cdot 2^2) = 0 \quad k_2 = 0.5(-a(0 + 0.5)(2 - 0)^2) = -a \\ y_1 &= y_0 + k_1 = 2 + 0 = 2 \quad z_1 = z_0 + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \right) = 2 + \left(\frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}(-a) \right) = 2 - \frac{a}{2} \end{aligned}$$

El error local depende del valor de a y viene dado por

$$\frac{1}{h} |z_1 - y_1| = 2 \left| 2 - \frac{a}{2} - 2 \right| = \frac{a}{2}$$

El nuevo tamaño del paso se obtiene como

$$q = \frac{\delta h}{|z_{n+1} - y_{n+1}|} = \frac{0.1 \cdot 0.5}{\frac{a}{2}} = \frac{0.1}{a}$$

Ejercicio 2.- Fernando Alonso realiza pruebas de neumáticos en el circuito de Montmeló, de 4.625 Km. Arrancando en parado con aceleración constante, alcanza los 200 Km/h a los 5.5", y finaliza la primera vuelta en 1'22" y en 1'21" la segunda.

- Obtener un único polinomio que interpole todo el trayecto y utilizarlo para obtener la distancia recorrida a los 2 minutos ¿es razonable?. {3 pts.}.
- Obtener el polinomio de interpolación segmentaria cúbico (spline) y utilizarlo para obtener la distancia recorrida a los 2 minutos ¿es razonable?. {3 pts.}.
- Sabiendo que el consumo es proporcional a la integral de la velocidad y tomando ésta como función del espacio, obtener una fórmula numérica que permita obtener el consumo en la primera vuelta a partir de los valores de la velocidad y la aceleración en el instante inicial y la velocidad en la primera vuelta ¿Cuál es el orden de la fórmula? ¿Es de Newton-Cotes? ¿Porqué? {3 pts.}.

a) Polinomio de interpolación clásica

Para obtener un polinomio único es necesario aplicar las diferencias divididas generalizadas de Newton, definidas, para un soporte ordenado, mediante

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \begin{cases} \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] - f[x_1, \dots, x_{k-1}, x_k]}{x_0 - x_k} & x_0 \neq x_k \\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} & x_0 = x_k \end{cases}$$

Previamente homogeneizamos los datos de que disponemos

Espacio (m): $f(0)=0$, $f(82)=4625$, $f(163)=9250$

Velocidad (m/s): $f'(0)=0$ m/s

Aceleración (m/s²): $f''(0)=200$ Km/h/5.5 s = 10.10

Para posteriormente generar la tabla

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, \dots, x_{k+3}]$	$f[x_k, \dots, x_{k+4}]$
$x_0=0.0$	0				
$x_1=0.0$	0	$f[x_0, x_1] = 0$			
$x_2=0.0$	0	$f[x_1, x_2] = 0$	$f[x_0, x_1, x_2] \approx 5.0505$		
$x_3=82$	4625	$f[x_2, x_3] \approx 56.4024$	$f[x_1, x_2, x_3] \approx 0.6878$	$f[x_0, \dots, x_3] \approx -0.0532$	
$x_4=163$	9250	$f[x_3, x_4] \approx 57.0988$	$f[x_2, x_3, x_4] \approx 0.0043$	$f[x_1, \dots, x_4] \approx -0.0042$	$f[x_0, \dots, x_4] \approx 0.3007 \cdot 10^{-3}$

Y puesto que

$$P_4(x) = f[x_0] + (x - x_0) \left(f[x_0, x_1] + (x - x_1) \left(f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2) \left(f[x_0, x_1, x_2, x_3] + (x - x_3) \left(f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \right) \right) \right) \right)$$

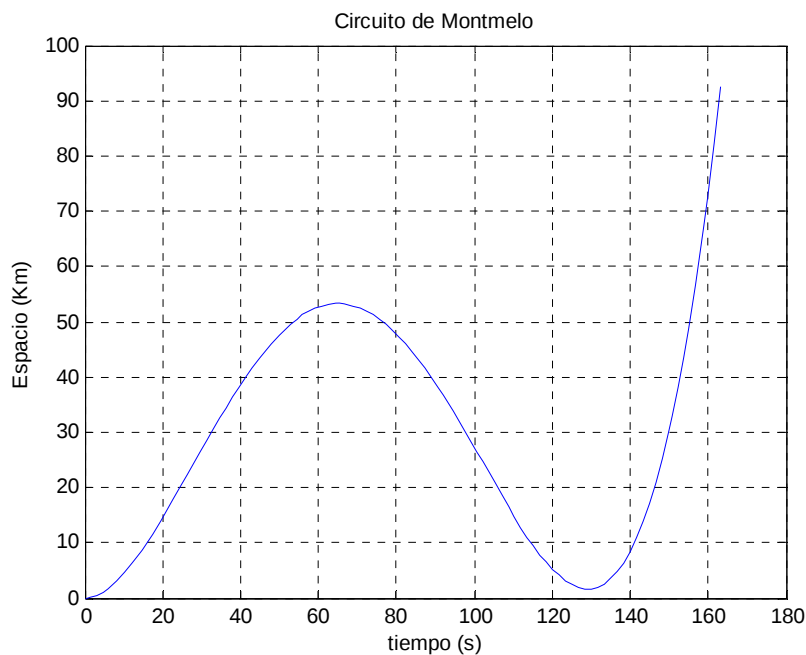
Setiene

$$P_4(x) = 0 + (x) \left(0 + (x) \left(5.0505 + (x-82) \left(-0.0532 + (x-163) \left(0.3007 \cdot 10^{-3} \right) \right) \right) \right) \\ = x^2 \left(5.0505 + (x-82) \left(-0.0532 + (x-163) \left(0.3007 \cdot 10^{-3} \right) \right) \right)$$

Evaluándolo a los dos minutos

$$P_4(120) = 120^2 \left(5.0505 + (120-82) \left(-0.0532 + (120-163) \left(0.3007 \cdot 10^{-3} \right) \right) \right) \approx 535.35$$

Este resultado resulta absurdo, ya que indicaría que se ha ido hacia atrás. Esto se observa más claramente si representamos el polinomio de interpolación en todo el intervalo.



b) Polinomio de interpolación segmentaria cúbica

Recordando la teoría, el polinomio de interpolación segmentaria cúbica viene definido mediante

$$P_k(x) = a_k(x - x_{k-1})^3 + b_k(x - x_{k-1})^2 + c_k(x - x_{k-1}) + d_k \quad \text{con } x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$$

Donde los coeficientes verifican de continuidad de la función y sus derivadas,

$$P_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1}) \wedge P_k(x_k) = f(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$P'_k(x_k) = P'_{k+1}(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

$$P''_k(x_k) = P''_{k+1}(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Junto con dos condiciones de contorno, que se desconocen inicialmente.

Primer intervalo [0,82]

$$P_1(x) = a_1(x-0)^3 + b_1(x-0)^2 + c_1(x-0) + d_1$$

$$P'_1(x) = 3a_1(x-0)^2 + 2b_1(x-0) + c_1$$

$$P''_1(x) = 6a_1(x-0) + 2b_1$$

Condiciones sobre valores conocidos

$$P_1(0) = 0 \rightarrow d_1 = 0$$

$$P_1'(0) = 0 \rightarrow c_1 = 1$$

$$P_1''(0) = 10.1010 \rightarrow b_1 = 5.0505 \quad P_1(82) = f(82) = 4625 \rightarrow a_1 \approx -0.0532$$

$$\text{Por tanto } P_1(x) = -0.0532x^3 + 5.0505x^2$$

Cálculo de las condiciones en el extremo

$$P_1'(82) = 3(-0.0532)(82)^2 + 2(5.0505)(82) = -244.9341 \quad P_2''(1) = 6(-0.0532)(82) + 2(5.0505) = -16.0750$$

Segundo intervalo [82,163]

$$P_2(x) = a_2(x-82)^3 + b_2(x-82)^2 + c_2(x-82) + d_2$$

$$P_2'(x) = 3a_2(x-82)^2 + 2b_2(x-82) + c_2$$

$$P_2''(x) = 6a_2(x-82) + 2b_2$$

Condiciones sobre valores conocidos

$$P_2(82) = P_1(82) = 4625 \rightarrow d_2 = 4625$$

$$P_2'(82) = P_1'(82) = -244.9341 \rightarrow c_2 = -244.9341$$

$$P_2''(82) = P_1''(82) = -16.0750 \rightarrow b_2 = -8.0375 \quad P_2(163) = f(163) = 9250 \rightarrow a_2 = 0.1453$$

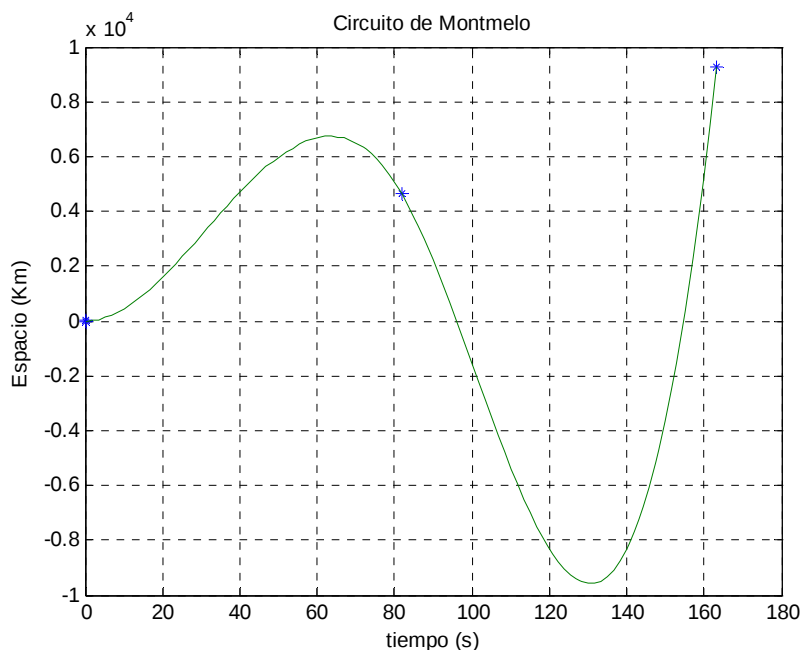
$$\text{Por tanto } P_2(x) = 0.1453(x-82)^3 - 8.0375(x-82)^2 - 244.9341(x-82) + 4625$$

Para estimar la distancia recorrida a los dos minutos es necesario utilizar $P_2(x)$

$$P_2(x) = 0.1453(120-82)^3 - 8.0375(120-82)^2 - 244.9341(120-82) + 4625 = -8317.8$$

El igual que el caso anterior, este resultado resulta absurdo, ya que indicaría que se ha ido hacia atrás.

Esto se observa más claramente si representamos la spline de interpolación en todo el intervalo.



c) Integración

Por los datos indicados, se debe buscar

$$\int_0^{4625} v(S) dS \approx \alpha_0 v(0) + \alpha_1 v'(0) + \alpha_2 v(4625)$$

Para ello aplicamos coeficientes indeterminados

$$f(x) = 1 \rightarrow \int_0^{4625} 1 dx = 4625 = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f'(0) + \alpha_2 f(4625) = \alpha_0 + \alpha_2$$

$$f(x) = x \rightarrow \int_0^{4625} x dx = \frac{4625^2}{2} = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f'(0) + \alpha_2 f(4625) = \alpha_1 + 4625\alpha_2$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow \int_0^{4625} x^2 dx = \frac{4625^3}{3} = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f'(0) + \alpha_2 f(4625) = 4625^2 \alpha_2$$

Resolviendo

$$\alpha_2 = \frac{4625}{3} \quad \alpha_1 = \frac{4625^2}{6} \quad \alpha_0 = \frac{9250}{3}$$

Por tanto la fórmula viene dada por

$$\int_0^{4625} v(S) dS \approx \frac{9250}{3} v(0) + \frac{4625^2}{6} v'(0) + \frac{4625}{3} v(4625)$$

Comprobamos el orden

$$f(x) = x^3 \rightarrow \begin{cases} \int_0^{4625} x^3 dx = \frac{4625^4}{4} \\ \frac{9250}{3} v(0) + \frac{4625^2}{6} v'(0) + \frac{4625}{3} v(4625) = \frac{4625}{3} 4625^3 \end{cases}$$

La fórmula es de orden 2.

Esta fórmula no es de Newton cotes puesto que aparece la derivada de la función.

Ejercicio 3.- Dado el sistema lineal $Ax=b$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Seleccionar de forma justificada el método de factorización más adecuado para su resolución. Resolver, utilizando racionales, por el método de Gauss con pivote doble. {3 pts}
- (b) Obtener la matriz de iteración del método de Jacobi y analizar su convergencia. Realizar dos iteraciones partiendo del vector nulo. A la vista de los resultados, ¿cuál será el comportamiento del método de Gauss-Seidel?. {5 pts}

- (c) Calcular, utilizando el método de Jacobi, el número de iteraciones para lograr un error (respecto a $\|\cdot\|_1$) menor que 10^{-5} , partiendo del vector nulo. {2 pts}

Apartado (a) Factorización y resolución por Gauss {3 pts}

La matriz del sistema es no tridiagonal, ni simétrica aunque es de diagonal estrictamente dominante. El único método de factorización es el de Doodlitle o LU.

Resolvemos el sistema mediante Gauss con pivote doble. Al ser de diagonal estrictamente dominante, no será necesario hacer intercambios, con lo que se reduce al método de Gauss sin pivotes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} = \\ F_2 \leftarrow F_2 - \frac{2}{3}F_1 \\ = \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -\frac{2}{3} & \frac{31}{3} \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} = \\ = \\ F_3 \leftarrow F_3 - \frac{2}{3}F_2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -\frac{2}{3} & \frac{31}{3} \\ 0 & 0 & \frac{31}{9} & -\frac{62}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(-5 - 2) = -1 \\ x_2 = \frac{1}{3}(\frac{31}{3} - \frac{4}{3}) = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Apartado (b) Matrices de Jacobi y convergencia {5 pts}

A partir de la descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$, donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{L} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{U} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene la matriz de iteración de Jacobi y el vector independiente

$$\mathbf{K}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_J = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al ser la matriz de diagonal estrictamente dominante, tanto el método de Jacobi como el de Gauss-Seidel son convergentes. Esto se comprueba fácilmente observando que

$$\|\mathbf{K}_J\|_\infty = \max\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\} = \frac{2}{3} < 1, \text{ o bien que } P_x(\mathbf{K}_J) = -x^3 - \frac{4}{27} \Rightarrow \rho(\mathbf{K}_J) = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \approx 0.5291 < 1$$

Realizamos las iteraciones pedidas

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= \mathbf{K}_J x^{(0)} + c_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.6667 \\ 2.333 \\ 0 \end{pmatrix} \\
x^{(2)} &= \mathbf{K}_J x^{(1)} + c_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{31}{9} \\ -\frac{14}{9} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.6667 \\ 3.4444 \\ -1.5556 \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
x^{(13)} &= \begin{pmatrix} -0.9995 \\ 2.9986 \\ -1.9990 \end{pmatrix} \quad x^{(14)} = \begin{pmatrix} -1.0003 \\ 2.9997 \\ -1.9998 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Al ser la matriz de diagonal estrictamente dominante, Gauss-Seidel también es convergente.

Apartado (c) Numero de iteraciones {2 pts}

El número mínimo de iteraciones necesarias para asegurar que el error sea menor que un ε dado se calcula como:

$$\|x - x^{(n)}\| \leq \frac{\|\mathbf{K}\|^n}{1 - \|\mathbf{K}\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| < \varepsilon \rightarrow n \geq \frac{\ln \frac{(1 - \|\mathbf{K}\|)\varepsilon}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|}}{\ln \|\mathbf{K}\|}$$

Obtenemos los valores necesarios

$$\|\mathbf{K}_J\|_1 = \max \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\} = \frac{2}{3} \quad \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_1 = \|c\|_1 = \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + 0 = \frac{12}{3}$$

$$n \geq \frac{\ln \frac{(1 - \frac{2}{3})10^{-5}}{\frac{12}{3}}}{\ln \frac{2}{3}} = \frac{\ln 10^{-5} / 12}{\ln \frac{2}{3}} \approx 23.16$$

Se necesitan al menos 24 iteraciones

Sin embargo, se ha comprobado que el número real de iteraciones necesarias es 14

$$\|x - x^{(14)}\|_1 = |-1 + 1.0003| + |3 - 2.9997| + |-2 + 1.9998| = 0.0003 + 0.0003 + 0.0002 = 0.0008$$

Criterios de puntuación:

Ejercicio	Apartado	Criterios	Valoración
1	A (1 pts)	Aplicación del método de resolución analítica Obtención correcta de la solución	0.75 0.25
	B (2 pts)	Expresión del Método de Euler Aplicación correcta del método Comparación con resultados reales	0.75 1 0.25
	C (2 pts)	Selección del intervalo y obtención del interpolante Aplicación	2x0.75 2x0.25
	D (3 pts)	Expresión del Método de Taylor de orden 3 Cálculo de las derivadas necesarias Aplicación correcta del método Comparación con resultados reales	0.5 1 1.25 0.25
	E (2 pts)	Selección del intervalo y obtención del interpolante Aplicación	2x0.75 2x0.25
2	A (3 pts)	Planteamiento del método de coeficientes indeterminados Resolución del sistema Expresión de la fórmula y su orden Aplicación	1 0.5 0.5 1
	B (2.5 pts)	Planteamiento del polinomio de aproximación Resolución y expresión del polinomio	1.5 1.0
	C (2.5 pts)	Condiciones (4) del método de Newton Iteraciones (2)	2 0.5
	D (2 pts)	Razonamiento del método adecuado Aplicación	1.0 1.0
3	A (3 pts)	Justificación del método de factorización Resolución con pivote doble	1.0 2.0
	B (5 pts)	Matrices de Jacobi Convergencia de Jacobi Iteraciones Convergencia de Gauss-Seidel	1.5 1.5 1.0 1.0
	C (2 pts)	Expresión de la formula Cálculo de las normas Cálculo del valor	0.5 1.0 0.5