

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Fecha	Lunes, 25/01/2010	Página 1 de 12
	Centro	E.T.S.I.M.O.	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Convocatoria	Febrero (Curso 2009-2010)	

Ejercicio 1.- Dado el problema de valor inicial $\begin{cases} y'(t) = -aty(t) + t & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

- (a) Obtener la solución analítica exacta {2 ptos}
- (b) Resolver, tomando $h=0.5$, utilizando el método de Taylor de orden 2 {4 ptos}.
- (c) Determinar, en función del valor de a , la variación del tamaño del paso para que al aplicar una vez el método de Runge-Kutta adaptativo de orden 1-2 con paso inicial 0.5 el error sea menor que 0.1 {4 ptos}

Solución exacta {2 ptos}

La ecuación es lineal de primer orden, de la forma $\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$. Cuya solución se obtiene obteniendo el factor integrante y resolviendo:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} \quad y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int \mu(t)q(t)dt + c \right)$$

En este caso $y'(t) + aty(t) = t$

$$\mu(t) = e^{\int atdt} = e^{\frac{1}{2}at^2}$$

$$y(t) = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}at^2}} \left(\int te^{\frac{1}{2}at^2} dt + c \right) = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}at^2}} \left(\frac{1}{a} e^{\frac{1}{2}at^2} + c \right) = \frac{1}{a} + \frac{c}{e^{\frac{1}{2}at^2}} \rightarrow y(0) = 0 \xrightarrow{c = -\frac{1}{a}} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{c}{e^{\frac{1}{2}at^2}} \right)$$

Método de Taylor de orden 2 {4 ptos}

Los métodos de Taylor vienen dados como

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \rightarrow y(t_{k-1}) + h \left[y'(t_{k-1}) + \dots + y^{(n-1)}(t_{k-1}) \frac{h^{(n-2)}}{(n-1)!} \right] + y^{(n)}(\zeta) \frac{h^{(n)}}{n!}$$

$$\begin{cases} w_0 = \alpha & t_k = a + kh \\ w_k = w_{k-1} + hT_{n-1}(h, t_{k-1}, w_{k-1}) & 1 \leq k \leq n \quad h = \frac{b-a}{n} \end{cases}$$

por tanto lo primero que se necesita es calcular las derivadas de la función.

$$y' = -aty + t$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = -ay - aty' + 1 = -ay - at(-aty + t) + 1 = ay(at^2 - 1) + (1 - at^2)$$

El método de Taylor de orden 2 queda pues como

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2(h, t, y) = (-aty + t) + \frac{h}{2} \left(ay(at^2 - 1) + (1 - at^2) \right) \\ w_0 = 0 \\ w_k = w_{k-1} + hT_2(h, t_{k-1}, w_{k-1}) \\ \quad = w_{k-1} + h \left[(-at_{k-1}w_{k-1} + t_{k-1}) + \frac{h}{2} \left(aw_{k-1}(at_{k-1}^2 - 1) + (1 - at_{k-1}^2) \right) \right] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} h = 0.5 \quad t_k = 0 + kh \\ 1 \leq k \leq 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 + 0.5 \left[(-at_0w_0 + t_0) + \frac{0.5}{2} \left(aw_0(at_0^2 - 1) + (1 - at_0^2) \right) \right] \\ &= 0 + 0.5 \left[(-a \cdot 0 \cdot 0 + 0) + \frac{0.5}{2} \left(a \cdot 0(a \cdot 0^2 - 1) + (1 - a0^2) \right) \right] = \frac{1}{8} = 0.125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1 + 0.5 \left[(-at_1w_1 + t_1) + \frac{0.5}{2} \left(aw_1(at_1^2 - 1) + (1 - at_1^2) \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \left[(-a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} \left(a \cdot \frac{1}{2} \left(a \cdot \frac{1}{2}^2 - 1 \right) + (1 - a \frac{1}{2}^2) \right) \right] = (a^2 - 20a + 128)^{\frac{1}{256}} \end{aligned}$$

Método de Runge-Kutta adaptativo 1-2 {4 pts}

El método viene dado por

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + k_1 \\ z_{n+1} &= y_n + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \right) \\ k_1 &= hf(t_n, y_n) \\ k_2 &= hf(t_n + h, y_n + k_1) \end{aligned}$$

Donde el error local y la variación del tamaño del paso viene dado respectivamente por

$$\delta_{actual} = \tau_{n+1}^k(h) = \frac{1}{h} |w_{n+1}^{k+1} - w_{n+1}^k| \quad q = \sqrt[k]{\frac{\delta h}{|w_{n+1}^{k+1} - w_{n+1}^k|}}$$

Aplicando a nuestro caso

$$\begin{aligned} k_1 &= h(-at_{k-1}w_{k-1} + t_{k-1}) \quad k_2 = h(-a(t_{k-1} + h)(w_{k-1} + k_1) + (t_{k-1} + h)) \\ y_{n+1} &= y_n + k_1 \quad z_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \right) \\ k_1 &= 0.5(-a \cdot 0 \cdot 0 + 0) = 0 \quad k_2 = 0.5(-a(0 + 0.5)(0 + 0) + (0 + 0.5)) = \frac{1}{4} \\ w_1^1 &= w_0^2 + k_1 = 0 + 0 = 0 \quad w_1^2 = w_0^1 + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \right) = 0 + \left(\frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

El error local es independientemente del valor de a y viene dado por

$$\frac{1}{h} |w_1^2 - w_1^1| = 2 \left| \frac{1}{8} - 0 \right| = \frac{1}{4} > 0.01 \forall a$$

El nuevo tamaño del paso se obtiene como

$$q = \sqrt[k]{\frac{\delta h}{|w_{n+1}^{k+1} - w_{n+1}^k|}} = \frac{0.01}{\frac{1}{8}} = 0.08$$

Ejercicio 2.- Se deposita una bola en la superficie de un fluido y se suelta, dejándola hundirse mientras se toman medidas. Al cabo de un segundo, se ha hundido 2.8383m, y 7.5458 al cabo de dos segundos.

- Obtener el polinomio de interpolación segmentaria cúbico (spline), considerando que en el instante inicial la bola tiene velocidad nula y esta sometida a la aceleración de la gravedad ($g=9.81\text{m/s}^2$). Estimar la profundidad al cabo de 1.5s. {3 pto.}
- Sabiendo que la solución exacta es $S(t) = \frac{g(2t-1+e^{-2t})}{4}$, seleccionar el método de intervalo más adecuado para determinar cuanto tarda la bola en alcanzar los 100m. Justifíquese la respuesta y realicé 2 iteraciones del método elegido. {2 pto.}
- Obténgase una función de punto fijo y un intervalo que cumplan las condiciones de convergencia y sirvan para solucionar la ecuación planteada en el apartado (b) Realizar dos iteraciones a partir del valor $t=25$. {2.5 pto.}
- Verifíquese si la ecuación planteada en el apartado (b) verifica las condiciones suficientes de convergencia del método de Newton en $[20,30]$. Realizar dos iteraciones a partir del valor $t=25$. {2.5 pto.}

a) Polinomio de interpolación segmentaria cúbica

Recordando la teoría, el polinomio de interpolación segmentaria cúbica viene definido mediante

$$P_k(x) = a_k(x - x_{k-1})^3 + b_k(x - x_{k-1})^2 + c_k(x - x_{k-1}) + d_k \quad \text{con } x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$$

Donde los coeficientes verifican de continuidad de la función y sus derivadas,

$$P_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1}) \wedge P_k(x_k) = f(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$P'_k(x_k) = P'_{k+1}(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

$$P''_k(x_k) = P''_{k+1}(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Junto con dos condiciones de contorno, que se desconocen inicialmente.

Primer intervalo [0,1]

$$P_1(x) = a_1(x - 0)^3 + b_1(x - 0)^2 + c_1(x - 0) + d_1$$

$$P'_1(x) = 3a_1(x - 0)^2 + 2b_1(x - 0) + c_1$$

$$P''_1(x) = 6a_1(x - 0) + 2b_1$$

Condiciones sobre valores conocidos

$$P_1(0) = 0 \rightarrow d_1 = 0$$

$$P_1'(0) = 0 \rightarrow c_1 = 1 \quad P_1''(0) = 9.81 \rightarrow b_1 = 4.905$$

$$P_1(1) = f(1) = 2.8383 \rightarrow a_1 = -2.0667$$

$$\text{Por tanto } P_1(x) = -2.0667x^3 + 4.905x^2$$

Cálculo de las condiciones en el extremo

$$P_1'(1) = 3(-2.0667)(1)^2 + 2(4.905)(1) = 3.6099 \quad P_2''(1) = 6(-2.0667)(1) + 2(4.905) = -2.5902$$

Segundo intervalo [1,2]

$$P_2(x) = a_2(x-1)^3 + b_2(x-1)^2 + c_2(x-0) + d_2$$

$$P_2'(x) = 3a_2(x-1)^2 + 2b_2(x-1) + c_2$$

$$P_2''(x) = 6a_2(x-1) + 2b_2$$

Condiciones sobre valores conocidos

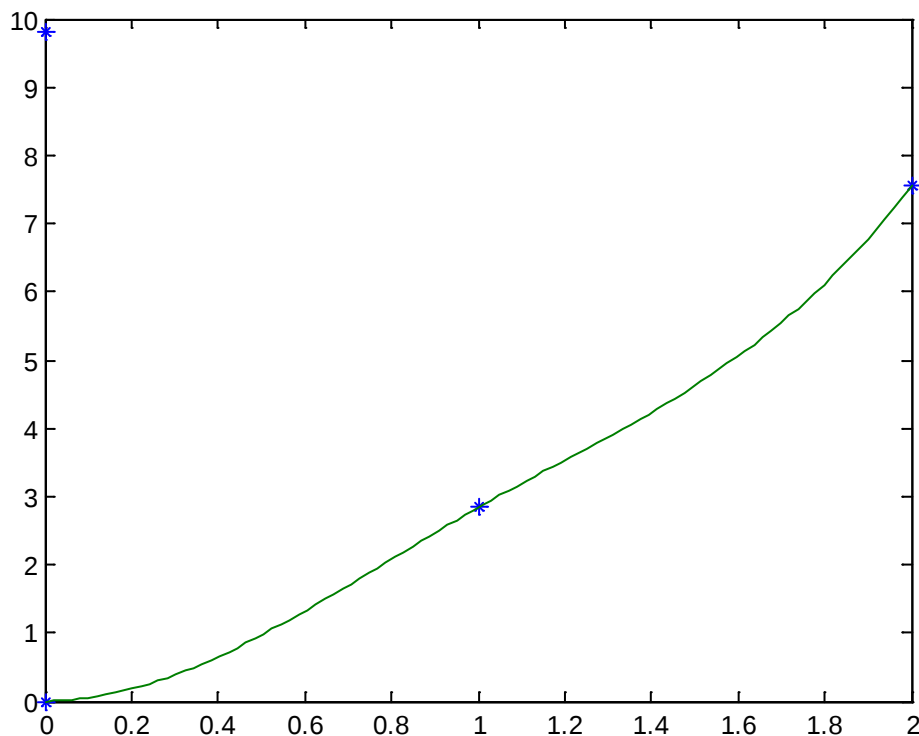
$$P_2(1) = P_1(1) = 2.8383 = d_2$$

$$P_2'(1) = P_1'(1) = 3.6099 = c_2 \quad P_2''(1) = P_1''(1) = -2.5902 \rightarrow b_2 = -1.2951$$

$$P_2(2) = f(2) = 7.5458 \rightarrow a_2 = 2.3927$$

$$\text{Por tanto } P_2(x) = 2.3727(x-1)^3 - 1.2951(x-1)^2 + 3.6099(x-1) + 2.8383$$

Representando la spline obtenida



Para estimar la profundidad al cabo de 1.5" es necesario utilizar $P_2(x)$

$$P_2(1.5) = 2.3727(1.5-1)^3 - 1.2951(1.5-1)^2 + 3.6099(1.5-1) + 2.8383 = 4.6186$$

b) Métodos de intervalo

Se debe resolver $S(t) = \frac{g(2t-1+e^{-2t})}{4} = 100 \rightarrow F(t) = \frac{g(2t-1+e^{-2t})}{4} - 100$ mediante un método de intervalo. Dado que la función es continua, utilizamos Bolzano para asegurar la existencia de la raíz

$$F(20) = \frac{9.81(40-1+e^{-40})}{4} - 100 = -4.3525 \quad F(25) = \frac{9.81(50-1+e^{-50})}{4} - 100 = 20.1725$$

Existe una raíz en $[20,25]$, pero para esos valores de t , tenemos que

$\frac{g(2t-1+e^{-2t})}{4} - 100 \approx \frac{g(2t-1)}{4} - 100$, que es la ecuación de una recta. Por tanto el método más adecuado será “Regula Falsi”, que aproxima por una recta la función. **Aunque sólo es necesario realizar las iteraciones con el método seleccionado**, lo comprobamos con todos métodos estudiados:

Bisección: $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

$$x_1 = \frac{20 + 25}{2} = 22.5 \rightarrow f(22.5) > 0 \quad x_2 = \frac{20 + 22.5}{2} = 21.25 \rightarrow f(21.25) > 0$$

	Iteración	a	f(a)	b	f(b)	x	f(x)
Bisección	1	20.0000	-	25.0000	+	22.5000	+
	2	20.0000	-	22.5000	+	21.2500	+
	3	20.0000	-	21.2500	+	20.6250	-
	4	20.6250	-	21.2500	+	20.9375	+
	5	20.6250	-	20.9375	+	20.7813	-
	6	20.7813	-	20.9375	+	20.8594	-
	7	20.8594	-	20.9375	+	20.8984	+
	8	20.8594	-	20.8984	+	20.8789	-
	9	20.8789	-	20.8984	+	20.8887	+

Regula Falsi: $x_n = a_n - f(a_n) \frac{a_n - b_n}{f(a_n) - f(b_n)}$

$$x_1 = 20 - f(20) \frac{20 - 25}{f(20) - f(25)} = 20 - (-4.3525) \frac{20 - 25}{-4.3525 - 20.1725} = 20.8874 \rightarrow f(20.8874) = 1.7664 \cdot 10^{-8}$$

No es necesario realizar más iteraciones

Regula Falsi Modificada

La sucesión se genera igual que la anterior, por lo que obtendremos el mismo resultado

Muller

En este caso, la aproximación de la función se hace mediante un polinomio de segundo grado que pasa por tres puntos $\{a, b, m\}$. Se comienza calculando los coeficientes de la parábola

$$\alpha_2(x-m)^2 + \alpha_1(x-m) + \alpha_0 \text{ mediante el sistema}$$

$$\begin{pmatrix} (a-m)^2 & a-m & 1 \\ (b-m)^2 & b-m & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \\ f(m) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = f(m) \\ \begin{pmatrix} (a-m)^2 & a-m \\ (b-m)^2 & b-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) - f(m) \\ f(b) - f(m) \end{pmatrix} \end{cases}, \text{ y por tanto}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases} \text{ con } \Delta = \begin{vmatrix} (a-m)^2 & a-m \\ (b-m)^2 & b-m \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} (a-m)^2 & f(a) - f(m) \\ (b-m)^2 & f(b) - f(m) \end{vmatrix} \text{ y } \Delta_2 = \begin{vmatrix} f(a) - f(m) & a-m \\ f(b) - f(m) & b-m \end{vmatrix}$$

Una vez obtenidos los coeficientes, se calculan los puntos de corte con el eje X utilizando la fórmula alternativa

$$r = m - \frac{2\alpha_0}{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}$$

y eligiendo el signo de la raíz de forma que el valor absoluto del denominador sea lo mayor posible. La raíz así calculada estará entre m y uno de los extremos a ó b ; si está entre m y a (respectivamente b), se sustituye b (respectivamente a) por m y m por r .

Comenzamos el algoritmo añadiendo a los dos extremos, el punto medio

$$m = \frac{b-a}{2} = 22.5 \rightarrow f(m) = 7.91$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2.5^2 & -2.5 \\ 2.5^2 & 2.5 \end{vmatrix} = 31.25 \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2.5^2 & -12.2625 \\ 2.5^2 & 12.2625 \end{vmatrix} = 153.2812 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -12.2625 & -2.5 \\ 12.2625 & 2.5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha_0 = 7.91 \quad \alpha_1 = \frac{153.2812}{31.25} = 4.9050 \quad \alpha_2 = \frac{0}{31.25} = 0$$

Se observa que la parábola ha degenerado en una recta, y al aplicar la fórmula se obtiene el mismo valor que con Regula Falsi

$$r = 22.5 - \frac{2 \cdot 7.91}{-4.9050 - \sqrt{4.9050^2 - 4 \cdot 0 \cdot 7.91}} = 20.8874 \rightarrow f(r) = 1.7664 \cdot 10^{-8}$$

c) Método de iteración funcional

Para emplear los métodos de punto fijo, se debe seleccionar adecuadamente la función de forma que $\forall x \in (a, b): g(x) \in (a, b) \wedge \|g'(x)\| < 1$. Aunque en la mayoría de los casos, esa selección no es simple, sí lo es en el ejemplo, puesto que a la vista del apartado anterior sabemos que la función se comporta de forma casi lineal en el intervalo que la contiene. Por tanto, $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$, donde m es la pendiente en el intervalo, es una buena elección de la función de iteración.

En este caso se tiene que $F'(t) = \frac{g(2-2e^{-2t})}{4}$ y $F'(20) \approx F'(25) = \frac{g}{2} = 4.905$. Por tanto, la función de iteración será

$$g(t) = t - \frac{2F(t)}{g} = t + \frac{200}{g} - \frac{1}{2}(2t - 1 + e^{-2t}) = \frac{200}{g} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Comprobamos que cumple las hipótesis

$$1. \quad g(x) \in C[a, b]$$

Al ser combinación de sumas y exponenciales

$$2. \quad \forall x \in [a, b]: g(x) \in [a, b]$$

$$g(20) = \frac{200}{g} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-40} \approx 20.8874 \approx g(25)$$

$$3. \quad \forall x \in [a, b]: |g'(x)| \leq k < 1$$

$$g'(t) = e^{-2t} < e^{-40} < 1$$

Realizamos las iteraciones pedidas, probando con ambos extremos

$$x_0 = 20 \quad x_1 = g(x_0) = g(20) = 20.8874 \quad x_2 = g(x_1) = g(20.8874) = 20.8874$$

$$x_0 = 25 \quad x_1 = g(x_0) = g(25) = 20.8874 \quad x_2 = g(x_1) = g(20.8874) = 20.8874$$

También se habría podido despejar de la función inicial

$$F(t) = \frac{g(2t - 1 + e^{-2t})}{4} - 100 \rightarrow \begin{cases} g_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{400}{g} + 1 - e^{-2t}\right) \\ g_2(t) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{400}{g} + 1 - 2t\right) \end{cases}$$

Analizando por separado cada función para valores positivos del tiempo

$$g_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{400}{g} + 1 - e^{-2t}\right) \rightarrow g_1'(t) = e^{-2t}$$

$g_1(t)$ es positiva y monótona creciente acotada por $[g_1(0), g_1(\infty)] = \left[\frac{200}{g}, \frac{200}{g} + \frac{1}{2}\right]$. Tomamos un intervalo que incluya la imagen, por ejemplo el $[20, 25]$.

$g_1'(t)$ es positiva y monótona decreciente acotada superiormente en por $[20, 25]$ por $g_1'(20) < 5 \cdot 10^{-18}$.

Así pues la función $g_1(t)$ verifica las condiciones de punto fijo. Realizamos las iteraciones

$$x_0 = 20 \quad x_1 = g_1(x_0) = g_1(20) = 20.8874 \quad x_2 = g_1(x_1) = g_1(20.8874) = 20.8874$$

$$x_0 = 25 \quad x_1 = g_1(x_0) = g_1(25) = 20.8874 \quad x_2 = g_1(x_1) = g_1(20.8874) = 20.8874$$

$$g_2(t) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{400}{g} + 1 - 2t\right) \rightarrow g_2'(t) = \frac{1}{\frac{400}{g} + 1 - 2t}$$

$g_2(t)$ es monótona creciente acotada inferiormente por $g_2(0) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{400}{g} + 1\right) \approx -1.8661$ y su dominio es

$\left[0, \frac{200}{g} + \frac{1}{2}\right]$. Antes de seleccionar el intervalo, comprobamos la condición sobre la derivada. $g_2'(t)$ es

positiva y monótona creciente hasta la discontinuidad en $t = \frac{200}{g} + \frac{1}{2}$. Esta acotada por la unidad cuando $t < \frac{200}{g}$. Pero $g_2\left(\frac{200}{g}\right) = 0$ y dado que $g_2(0) < 0$, no hay ningún intervalo que verifique las condiciones.

d) Método de Newton

Dada la función $F(t) = \frac{g(2t-1+e^{-2t})}{4} - 100$, donde $F(t) \in C^2[a, b]$, las condiciones suficientes de convergencia del método de Newton en el intervalo $[a, b]$ son:

1. $F(a)F(b) < 0$ $F(20) \approx -4.3525 < 0$ $F(30) \approx 44.6975 > 0$ ✓
2. $F'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ $F'(t) = \frac{g(1-e^{-2t})}{2} = 0 \Rightarrow t = 0 \notin [20, 30]$ ✓
3. $\text{signo}(F''(x)) = \text{cte} \forall x \in [a, b]$ $F''(t) = ge^{-2t} > 0 \forall t \in [20, 30]$ ✓
4. $\max \left\{ \left| \frac{F(a)}{F'(a)} \right|, \left| \frac{F(b)}{F'(b)} \right| \right\} \leq |b-a|$ $\max \left\{ \left| \frac{-4.3525}{4.9050} \right|, \left| \frac{44.6975}{4.9050} \right| \right\} = \max \{0.8874, 9.1126\} \leq |b-a| = 10$ ✓

Por tanto el método de Newton es convergente para cualquier valor inicial elegido

La función de iteración del método de Newton viene dada por

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} = x - \frac{g(2x-1+e^{-2x})-400}{g(2-2e^{-2x})}$$

Realizando las iteraciones pedidas

$$x_0 = 25$$

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \approx 25 - \frac{20.1725}{4.9050} \approx 25 - 4.1126 \approx 20.8874$$

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)} \approx 20.8874 - \frac{0}{4.9050} \approx 20.8874$$

Ejercicio 3.- Se tienen los siguientes datos que relacionan la profundidad de un canal con la distancia hasta una referencia:

Distancia	1	3	7	8
Profundidad	-2.5	-4.2	-7.8	-8.5

- (a) Ajustar, por el método de mínimos cuadrados, los datos anteriores a la función $f(x) = -P_{\max} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}$ donde $P_{\max}=9$, y obtener el error cuadrático {4 pts.}
- (b) Suponiendo que los valores de a y b sean respectivamente 10 y 8, obtener dos puntos tales que la curva de ajuste no varíe al añadirlos {1 pts.}
- (c) Utilizar la regla de integración adaptativa para estimar el caudal Q del canal ($Q=v \cdot A$), donde el área viene dada por $A = \left| \int_0^{20} 9e^{-\left(\frac{x-10}{8}\right)^2} dx \right|$ y la velocidad del agua del canal es $v=10\text{m/s}$, con un error inferior a $1\text{m}^3\text{s}^{-1}$ {5 pts.}

(a) Ajuste

Para aplicar el método de mínimos cuadrados es necesario que la función de ajuste sea lineal en sus parámetros, esto es $f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$. Puesto que esa condición no se cumple, será necesario previamente linealizar la función:

$$f(x) = -P_{\max} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{-f(x)}{P_{\max}}\right) = -\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{-\ln\left(\frac{-f(x)}{P_{\max}}\right)} = \frac{x-a}{b} = \frac{-a}{b} + \frac{x}{b}$$

$$\tilde{y} = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) \xleftarrow{\tilde{y} = \ln\left(\frac{-f(x)}{P_{\max}}\right)} \begin{cases} c_1 = \frac{-a}{b} & \phi_1(x) = 1 \\ c_2 = \frac{1}{b} & \phi_2(x) = x \end{cases}$$

Recordando la teoría, al anular las derivadas parciales de ambas variables, se llega al sistema

$$X^t X \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = X^t Y \text{ donde } X = \begin{pmatrix} \phi_1(1) & \phi_2(1) \\ \phi_1(3) & \phi_2(3) \\ \phi_1(7) & \phi_2(7) \\ \phi_1(8) & \phi_2(8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad Y = \sqrt{\ln\left(\frac{P_{\max}}{-f(x)}\right)} = \begin{pmatrix} 1.1318 \\ 0.8730 \\ 0.3783 \\ 0.2391 \end{pmatrix}$$

esto es

$$\begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 19 & 123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6222 \\ 8.3114 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{Bmatrix} = \\ 2^2 - 19/4 \times 1^2 \end{Bmatrix}} \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 0 & 32.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6222 \\ -4.1438 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1.2565 \\ c_2 = -0.1265 \end{cases}$$

Y por tanto $b = \frac{1}{c_2} = 9.9310$ $a = \frac{-c_1}{c_2} = -7.9034$, y la curva de ajuste obtenida es $f(x) = -P_{\max} e^{-\left(\frac{x-9.9310}{-7.9034}\right)^2}$

El error cuadrático viene dado como

$$MEC = \sum_{i=0}^3 (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^3 \left(-9e^{-\left(\frac{x-9.9310}{-7.9034}\right)^2} - y_i \right)^2 = (-2.5100 - (-2.5))^2 +$$

$$+ (-4.1710 - (-4.2))^2 + (-7.8436 - (-7.8))^2 + (8.4785 - (-8.5))^2 =$$

$$(-0.01)^2 + (0.029)^2 + (-0.0436)^2 + (0.0215)^2 = 0.0033$$

Nota:

Se podría haber tomado

$$f(x) = -P_{\max} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} \leftrightarrow \ln\left(\frac{-f(x)}{P_{\max}}\right) = -\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 \leftrightarrow \ln\left(\frac{-f(x)}{P_{\max}}\right) = -\frac{1}{b^2}(x^2 - 2ax + a^2)$$

Pero en este caso la función no es lineal en los parámetros.

(b) Invarianza de la curva de ajuste

El único motivo por el que la curva de ajuste se puede mantener invariable, es que el error añadido por los nuevos puntos sea nulo, esto es, la curva ya pasa por los puntos indicados. Por tanto es suficiente tomar

pares $\left(x, -P_{\max} e^{-\left(\frac{x-10}{8}\right)^2}\right)$, y dada la simetría de la función con respecto al punto $x=10$, es suficiente tomar

(19,-2.5), (17-3,-4.2), (13,-7.8), (12,-8.5)

(c) Regla Integración adaptativa

La integración adaptativa compara la diferencia de resultados entre el obtenido por Simpson para el intervalo total y la suma de los obtenidos en los semi-intervalos, esto es

$$\left| \int_b^a f(x)dx - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| \approx \frac{1}{15} \left| S(a,b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right|$$

Como el error total debe ser menor que $1\text{m}^3/\text{s}$, eso indica que el error en el área no debe llegar a 0.1m^2 .

Aplicando Simpson para obtener los valores

$$S(0,20) = \frac{20-0}{6} \left[-P_{\max} e^{-\left(\frac{0-10}{8}\right)^2} + 4P_{\max} e^{-\left(\frac{10-10}{8}\right)^2} - P_{\max} e^{-\left(\frac{20-10}{8}\right)^2} \right] = -265.1534$$

$$S(0,10) = \frac{10-0}{6} \left[-P_{\max} e^{-\left(\frac{0-10}{8}\right)^2} + 4P_{\max} e^{-\left(\frac{5-10}{8}\right)^2} - P_{\max} e^{-\left(\frac{10-10}{8}\right)^2} \right] = -117.4844$$

$$S(10,20) = \frac{20-10}{6} \left[-P_{\max} e^{-\left(\frac{10-10}{8}\right)^2} + 4P_{\max} e^{-\left(\frac{15-10}{8}\right)^2} - P_{\max} e^{-\left(\frac{20-10}{8}\right)^2} \right] = -117.4844$$

$$\frac{1}{15} |S(0,20) - S(0,10) - S(10,20)| = \frac{1}{15} |-265.1534 - (-117.4844 - 117.4844)| = 2.0123 > 0.1$$

Al no alcanzar la precisión requerida es necesario subdividir de nuevo el intervalo

$$S(0,5) = \frac{5-0}{6} \left[-P_{\max} e^{-\left(\frac{0-10}{8}\right)^2} + 4P_{\max} e^{-\left(\frac{2.5-10}{8}\right)^2} - P_{\max} e^{-\left(\frac{5-10}{8}\right)^2} \right] = -38.2079$$

$$S(5,10) = \frac{10-5}{6} \left[-P_{\max} e^{-\left(\frac{5-10}{8}\right)^2} + 4P_{\max} e^{-\left(\frac{7.5-10}{8}\right)^2} - P_{\max} e^{-\left(\frac{10-10}{8}\right)^2} \right] = -79.5671$$

$$\frac{1}{15} |S(0,10) - S(0,5) - S(5,10)| = \frac{1}{15} |-117.4844 - (-38.2079 - 79.5671)| = 0.0194 < 0.05$$

Ahora ya se ha alcanzado la precisión requerida, y dada la simetría de la función

$$A = \left| \int_0^{20} 9e^{-\left(\frac{x-10}{8}\right)^2} dx \right| = 2 \left| \int_0^{10} 9e^{-\left(\frac{x-10}{8}\right)^2} dx \right| \approx 2(S(0,5) + S(5,10)) = 15.7033 \Rightarrow q = 157.033$$

Criterios de puntuación:

Ejercicio	Apartado	Criterios	Valoración
1	A (1 pts)	Aplicación del método de resolución analítica Obtención correcta de la solución	0.75 0.25
	B (2 pts)	Expresión del Método de Euler Aplicación correcta del método Comparación con resultados reales	0.75 1 0.25
	C (2 pts)	Selección del intervalo y obtención del interpolante Aplicación	2x0.75 2x0.25
	D (3 pts)	Expresión del Método de Taylor de orden 3 Cálculo de las derivadas necesarias Aplicación correcta del método Comparación con resultados reales	0.5 1 1.25 0.25
	E (2 pts)	Selección del intervalo y obtención del interpolante Aplicación	2x0.75 2x0.25
2	A (3 pts)	Planteamiento del método de coeficientes indeterminados Resolución del sistema Expresión de la fórmula y su orden Aplicación	1 0.5 0.5 1
	B (2.5 pts)	Planteamiento del polinomio de aproximación Resolución y expresión del polinomio	1.5 1.0
	C (2.5 pts)	Condiciones (4) del método de Newton Iteraciones (2)	2 0.5
	D (2 pts)	Razonamiento del método adecuado Aplicación	1.0 1.0
3	A (3 pts)	Justificación del método de factorización Resolución con pivote doble	1.0 2.0
	B (5 pts)	Matrices de Jacobi Convergencia de Jacobi Iteraciones Convergencia de Gauss-Seidel	1.5 1.5 1.0 1.0
	C (2 pts)	Expresión de la formula Cálculo de las normas Cálculo del valor	0.5 1.0 0.5