

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Fecha	Lunes, 02/02/2009	Página 1 de 13
	Centro	I. Geólogo - E.P.S. Guillermo Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Convocatoria	Febrero (Curso 2008-2009)	

Ejercicio 1.- Dado el problema de valor inicial $y'(t) = \frac{y+1}{t}$ $1 \leq t \leq 2$ $y(1) = 0$

- Calcular la solución analítica exacta. {1 pto}
- Aplique el método de Taylor de orden tres con paso $h = \frac{1}{3}$ para aproximar la solución y compárela con los valores reales de y . {2 ptos}
- Al aplicar el método de Taylor de orden uno con paso $h = \frac{1}{4}$ se ha obtenido los siguientes valores {0.25, 0.5, 0.75, 1.0}. Utilice la interpolación segmentaria lineal para estimar $y(x)$ en los siguientes valores {(1.2), (1.9)} y compárelos con los valores reales de $y(x)$ ¿Qué resultados se hubieran obtenido de utilizar la interpolación cúbica de Hermite (función y derivada)? ¿Cuál da un resultado mejor? {4 ptos}
- Justifique si mediante la aplicación del método de Runge-Kutta-Fehlberg con un paso inicial de 1 será necesario cambiar el tamaño del paso cuando se desea que el error de truncamiento local sea menor que 0.000001. {3 ptos}

Apartado (a) Solución exacta {1 pto}

La ecuación es lineal de primer orden, de la forma $\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$. Cuya solución se obtiene obteniendo el factor integrante y resolviendo:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} \quad y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int \mu(t)q(t)dt + c \right)$$

En este caso $y'(t) - \frac{1}{t}y = \frac{1}{t}$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{-1}{t}dt} = e^{-\ln t} = t^{-1} = \frac{1}{t}$$

$$y(t) = t \left(\int \frac{1}{t^2} dt + c \right) = t \left(\frac{-1}{t} + c \right) = ct - 1 \rightarrow y(1) = 0 \xrightarrow{c=1} \Rightarrow y(t) = t - 1$$

Apartado (b) Método de Taylor de orden 3 {2 pto}

El Método de Taylor de orden 3 para el P.V.I. $y'(t) = f(t, y)$ $a \leq t \leq b$ con $y(a) = \alpha$ se escribe como:

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_k = w_{k-1} + hT_3(h, t_{k-1}, w_{k-1}) \quad 1 \leq k \leq n \end{cases} \quad \begin{matrix} t_k = a + kh \\ h = \frac{b-a}{n} \end{matrix} \quad \text{con } T_3 \approx \left[y'(t_{k-1}) + y''(t_{k-1}) \frac{h}{2!} + y'''(t_{k-1}) \frac{h^2}{3!} \right]$$

Particularizando

$$y'(t) = \frac{y+1}{t} \quad y''(t) = \frac{y't - (y+1)1}{t^2} = \frac{0}{t^2} = 0 \quad y'''(t) = 0$$

Por tanto cualquier método de Taylor se reduce para esta E.D.O. al método de Euler

$$w_{k+1} = w_k + hf(t_k, w_k) = w_k + h \left(\frac{w_k + 1}{t_k} \right) \quad 1 \leq k \leq 2 \quad w_0 = 0 \quad t_0 = 1 \quad h = \frac{1}{3}$$

$$t_1 = t_0 + h = \frac{4}{3} \quad w_1 = w_0 + h \left(\frac{w_0 + 1}{t_0} \right) = 0 + \frac{1}{3} \left(\frac{0+1}{1} \right) = \frac{1}{3} \approx 0.3333$$

$$t_2 = t_1 + h = \frac{5}{3} \quad w_2 = w_1 + h \left(\frac{w_1 + 1}{t_1} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{1}{3} + 1}{\frac{4}{3}} \right) = \frac{2}{3} \approx 0.6667$$

$$t_3 = t_2 + h = \frac{6}{3} \quad w_3 = w_2 + h \left(\frac{w_2 + 1}{t_2} \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{2}{3} + 1}{\frac{5}{3}} \right) = 1$$

Dado que el método de Taylor de orden n es exacto para polinomios de grado n, y se ha obtenido que la segunda derivada es nula (esto es, la solución será un polinomio de primer grado), el error será nulo para todos los pasos.

Solución	$t_0=1$	$t_1=1+\frac{1}{3}$	$t_2=1+\frac{2}{3}$	$t_3=2$
Euler	0.0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Exacta	0.0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Error	0.0	0.0	0.0	0.0

Apartado (c) Interpolación lineal {2 ptos}

La interpolación lineal, utilizando los polinomios de Lagrange, viene dada por

$$\forall t \in [1.25, 1.5] \quad P_1(t) = \frac{t-1.5}{1.25-1.5} f(1.25) + \frac{t-1.25}{1.5-1.25} f(1.5)$$

$$P(1.3) = \frac{1.3-1.5}{1.25-1.5} 0.25 + \frac{1.3-1.25}{1.5-1.25} 0.5 = 0.3$$

$$\forall t \in [1.75, 2.0] \quad P_1(t) = \frac{t-2.0}{1.75-2.0} f(1.75) + \frac{t-1.75}{2.0-1.75} f(2.0)$$

$$P(1.9) = \frac{1.9-2.0}{1.75-2.0} 0.75 + \frac{1.9-1.75}{2.0-1.75} 1.0 = 0.9$$

Puesto que la solución de la E.D.O. era un polinomio de primer grado, no hay error cuando se utiliza la interpolación lineal.

Los cálculos también se podría haber hecho utilizando diferencias divididas

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$
$x_0=1.0$	0	
$x_1=1.25$	0.25	
$x_2=1.5$	0.5	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_1] - f[x_2]}{x_1 - x_2} = 1$
$x_3=1.75$	0.75	
$x_4=2.0$	1.0	$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_4] - f[x_5]}{x_4 - x_5} = 1$

$$\forall t \in [1.25, 1.5] \quad P_1(t) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) = 0.25 + 1.0(x - 1.25) \rightarrow P_1(1.3) = 0.3$$

$$\forall t \in [1.75, 2.0] \quad P_1(t) = f[x_4] + f[x_4, x_5](x - x_4) = 0.75 + 1.0(x - 1.75) \rightarrow P_1(1.9) = 0.9$$

Punto	1.3	1.9
Interpolada	0.3	0.9
Exacta	0.3	0.9
Error	0	0

No merece la pena utilizar la interpolación de Hermite puesto que el error también será nulo. De todas formas se realiza para comprender los pasos a realizar. Para cada intervalo se necesita el valor de la función y su derivada en ambos extremos del intervalo. El cálculo de la derivada se obtiene de la expresión de la ecuación diferencial.

Punto	Función (w_k)	Derivada $\left(\frac{w_k + 1}{t_k} \right)$
$x_1=1.25$	0.25	$\frac{0.25+1}{1.25} = 1$
$x_2=1.5$	0.5	$\frac{0.5+1}{1.5} = 1$
$x_3=1.75$	0.75	$\frac{0.75+1}{1.75} = 1$
$x_4=2.0$	1	$\frac{1+1}{2} = 1$

Se observa que, en ambos casos, al hacer las diferencias divididas generalizadas, los términos de grado superior a uno son nulos, lo que conduce a obtener los mismos polinomios que en el caso anterior.

$$f[z_0, \dots, z_n] = \begin{cases} \frac{f[z_1, \dots, z_n] - f[z_0, \dots, z_{n-1}]}{z_n - z_0} & z_0 \neq z_n \\ \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} & z_0 = z_n \end{cases}$$

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
$x_0=1.25$	0.25			
$x_1=1.25$	0.25	$f[x_0, x_1] = f'(x_0) = 1$		
$x_2=1.5$	0.5	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_1] - f[x_2]}{x_1 - x_2} = 1$	$f[x_0, x_1, x_2] = 0$	
$x_3=1.5$	0.5	$f[x_2, x_3] = f'(x_2) = 1$	$f[x_1, x_2, x_3] = 0$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0$

Apartado (d) Método de Runge-Kutta-Felberg {3 pts}

Visto que la solución es un polinomio lineal, y el método de Runge Kutta Felhberg combina un procedimiento de cuarto orden con otro de quinto orden, en ambos el error será nulo, y por tanto obtendrán la solución exacta en un solo paso. A continuación se verifica el razonamiento anterior

$$k_1 = hf(t_0, w_0) = 1 \left(\frac{w_0 + 1}{t_0} \right) = \frac{0 + 1}{1} = 1$$

$$k_2 = hf\left(t_0 + \frac{1}{4}h, w_0 + \frac{1}{4}k_1\right) = 1 \left(\frac{\left(0 + \frac{1}{4}\right) + 1}{1 + \frac{1}{4}} \right) = 1$$

$$k_3 = hf\left(t_0 + \frac{3}{8}h, w_0 + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) = 1 \left(\frac{\left(0 + \frac{3}{32} + \frac{9}{32}\right) + 1}{1 + \frac{3}{8}} \right) = 1$$

$$k_4 = hf\left(t_n + \frac{12}{13}h, w_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) = 1 \left(\frac{\left(0 + \frac{1932}{2197} - \frac{7200}{2197} + \frac{7296}{2197}\right) + 1}{1 + \frac{12}{13}} \right) = 1$$

$$k_5 = hf\left(t_n + h, w_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) = 1 \left(\frac{\left(0 + \frac{439}{216} - 8 + \frac{3680}{513} - \frac{845}{4104}\right) + 1}{1 + 1} \right) = 1$$

$$k_6 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, w_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right) = 1 \left(\frac{\left(0 - \frac{8}{27} + 2 - \frac{3544}{2565} + \frac{1859}{4104} - \frac{11}{40}\right) + 1}{1 + \frac{1}{2}} \right) = 1$$

$$\left. \begin{aligned} w_{n+1}^4 &= w_n + \left(\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \right) = 1 \\ w_{n+1}^5 &= w_n + \left(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{5}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \right) = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \delta_{actual} = \tau_{n+1}^4(h) = \frac{1}{h} |w_{n+1}^5 - w_{n+1}^4| = 0$$

Ejercicio 2.-

- (a) Determine los valores de $x_0 < x_1 < x_2$ del intervalo $[-1,1]$ que satisfacen {2.5 pts}

$$\int_{-1}^1 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)x^k dx = 0 \quad k = 0, 1, 2$$

- (b) Utilice los valores anteriores (x_0, x_1, x_2) para encontrar una regla de integración numérica aplicando el método de coeficientes indeterminados ¿Cuál es su orden? {2.5 pts}
- (c) Al realizar la integración para cierta función que depende de un parámetro α se han obtenido los siguientes valores $(\alpha, I(\alpha)) = \{(-0.2, -8/65), (0.1, 0.05), (0.5, 0.2)\}$. Encontrar los parámetros a y b que hacen mínimo el error cuadrático cuando se ajusta mediante la función $f(x) = \frac{ax}{b+x}$. Añadir, de forma razonada, otro par de puntos de forma que los parámetros a y b no se modifiquen. {2.5 pts}
- (d) Suponiendo que los resultados del apartado anterior son $a=1, b=2$, estúdiese si es posible aplicar el método de Régula Falsi y de Newton en el intervalo $[-4,4]$ para encontrar el punto en que $f(x)=0.5$ ¿Y en el intervalo $[-1,3]$? {2.5 pts}

(a) Puntos de integración

Aplicando la condición exigida, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)x^k dx &= \int_{-1}^1 (x^{3+k} - x^{2+k}(x_0 + x_1 + x_2) + x^{1+k}(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) - x^k x_0x_1x_2) dx = \\ &= \left[\frac{x^{4+k}}{4+k} - \frac{x^{3+k}}{3+k}(x_0 + x_1 + x_2) + \frac{x^{2+k}}{2+k}(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) - \frac{x^{1+k}}{1+k}x_0x_1x_2 \right]_{-1}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k=0 \quad & \left. \begin{aligned} \frac{-2}{3}(x_0 + x_1 + x_2) - 2x_0x_1x_2 &= 0 \\ \frac{2}{5} + \frac{2}{3}(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_0x_1x_2 &= \frac{-1}{3}(x_0 + x_1 + x_2) \rightarrow x_0x_1x_2 = 0 \quad (I) \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{3}(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) &= 0 \rightarrow \frac{1}{5} + \frac{1}{3}(-x_0x_0 + x_1x_2) = 0 \quad (II) \end{aligned} \\ k=2 \quad & \left. \begin{aligned} \frac{-2}{5}(x_0 + x_1 + x_2) - \frac{2}{3}x_0x_1x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{-2}{5}(x_0 + x_1 + x_2) - \frac{2}{3} \frac{-1}{3}(x_0 + x_1 + x_2) &= 0 \rightarrow x_0 + x_1 + x_2 = 0 \quad (III) \end{aligned} \end{aligned}$$

La condición (I) indica que uno de los valores es nulo, mientras que la (III) muestra que hay dos valores de signos opuestos (dado que uno es nulo). Tomamos pues como nulo el valor intermedio, esto es:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ \rightarrow \frac{1}{5} + \frac{1}{3}(-x_0x_0) &= 0 \Rightarrow x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \approx -0.7746 \\ x_0 &= -x_2 \end{aligned}$$

(b) Regla de integración

Al aplicar el método de coeficientes indeterminados, se deben obtener los valores α_i tales que

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \alpha_0 f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Se comienza a sustituir $f(x)$ por los polinomios de la base canónica en orden creciente

$$\left. \begin{aligned} f(x) = 1 &\rightarrow \int_{-1}^1 1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 2 = \alpha_0 1 + \alpha_1 1 + \alpha_2 1 & \alpha_0 1 + \alpha_1 1 + \alpha_2 1 = 2 \\ f(x) = x &\rightarrow \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0 = \alpha_0 \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \alpha_1 0 + \alpha_2 \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) & \alpha_0 = \alpha_2 \\ f(x) = x^2 &\rightarrow \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} = \alpha_0 \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 + \alpha_1 0^2 + \alpha_2 \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 & 2\alpha_0 \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{5}{9} \\ \alpha_1 &= \frac{8}{9} \\ \alpha_2 &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Por tanto la regla numérica viene expresada mediante $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

Falta por determinar el orden

$$\left. \begin{aligned} f(x) = x^3 &\rightarrow \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0 = \frac{5}{9} \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 + \frac{8}{9} 0^3 + \frac{5}{9} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 \\ f(x) = x^4 &\rightarrow \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5} = \frac{5}{9} \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 + \frac{8}{9} 0^3 + \frac{5}{9} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 \\ f(x) = x^5 &\rightarrow \int_{-1}^1 x^5 dx = \frac{x^6}{6} \Big|_{-1}^1 = 0 = \frac{5}{9} \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 + \frac{8}{9} 0^5 + \frac{5}{9} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5 \\ f(x) = x^6 &\rightarrow \int_{-1}^1 x^6 dx = \frac{x^7}{7} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{7} \neq \frac{5}{9} \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6 + \frac{8}{9} 0^6 + \frac{5}{9} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^6 = \frac{6}{25} \end{aligned} \right\}$$

Por tanto la fórmula es de orden 5

(c) Linealización y ajuste

Se pretende ajustar la función $f(x) = \frac{ax}{b+x}$ de forma que el error cuadrático $\sum_{k=0}^N \left(y_i - \frac{ax_i}{b+x_i}\right)^2$ sea mínimo. Pero para aplicar la teoría vista es necesario previamente linealizar la ecuación.

$$f(x) = \frac{ax}{b+x} \leftrightarrow z = \frac{1}{f(x)} = \frac{b+x}{ax} = \frac{b}{a} \frac{1}{x} + \frac{1}{a} = c_1 \phi_1(t) + c_0 \phi_0(t) \begin{cases} \phi_1(t) = \frac{1}{x} \\ \phi_0(t) = 1 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 10 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -65/8 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \quad X^t X t = X^t Y \quad \begin{pmatrix} 129 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2005/8 \\ 135/8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 15/8 \\ c_0 = 10/8 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio

$$\begin{cases} a = \frac{1}{c_0} = 0.8c_1 \\ b = \frac{c_1}{c_0} = 1.5 \end{cases}$$

Y la función de ajuste es $f(x) = \frac{\frac{8}{10}x}{\frac{15}{10} + x} = \frac{8x}{15 + 10x}$

Para que no se modifiquen los coeficientes al añadir nuevos puntos, éstos no deben aportar ningún error (el ajuste es perfecto). Así pues basta sustituir dos valores en la expresión de la función de ajuste.

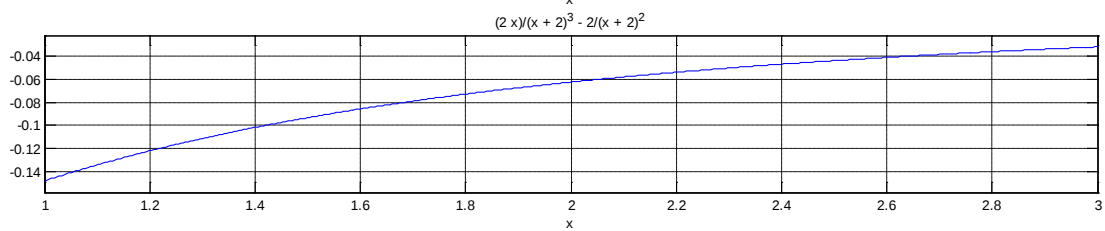
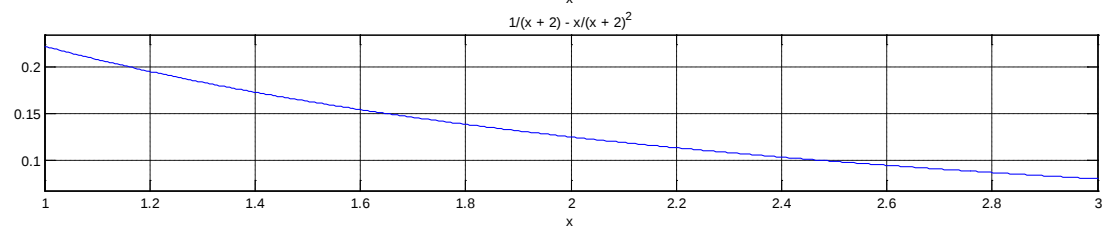
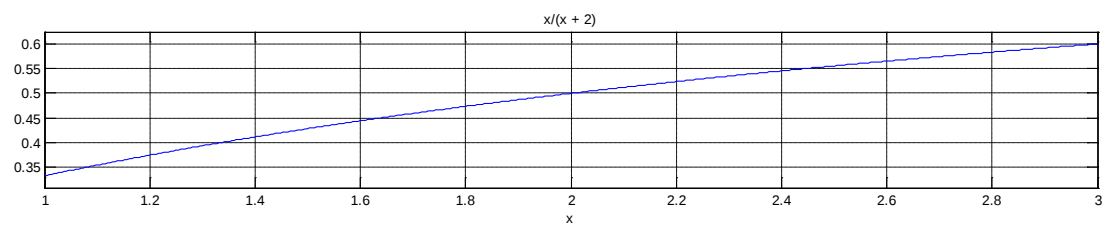
(d) Ecuación no lineal

Esta función es continua y monótona decreciente en $(-\infty, -2)$ y monótona creciente en $(-2, \infty)$. No está definida (es discontinua) en $x=-2$; fuera de ese punto la función tiene derivadas continuas de cualquier orden. Por tanto en el intervalo $[-4, 4]$ no son aplicables ni los métodos de intervalo ni los de iteración funcional **Vt > 25**.

Sin embargo, el teorema de Bolzano se verifica en $[1, 3]$, puesto que $f(1) < 0$ y $f(3) > 0$, y por tanto se puede aplicar cualquier método de intervalo. Las condiciones generales de convergencia del método de Newton vienen dadas para $f(x) \in C^2[a, b]$ por

1. $f(a)f(b) < 0$ Se cumple en $[1, 3]$, como se ha visto
2. $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} > 0 \forall x \in [1, 3]$
3. $\text{signo}(f''(x)) = \text{cte} \forall x \in [a, b]$ $f''(x) = \frac{-4}{(x+2)^3} < 0 \forall x \in [1, 3]$
4. $\max \left\{ \left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right|, \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| \right\} \leq |b - a|$ $\max \left\{ \left| \frac{-1/6}{2/9} \right|, \left| \frac{1/10}{2/25} \right| \right\} = \max \left\{ \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right\} = \frac{5}{4} \leq |b - a| = 2$

Por tanto el método de Newton es convergente para cualquier valor inicial elegido.



Ejercicio 3.- Dado el sistema lineal $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Resolver, utilizando racionales, por el método de Gauss con pivote simple. {2 ptos}
- Obtener las matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ que factorizan la matriz $\mathbf{A}$ y permiten escribir el sistema inicial como $\mathbf{L Ux}=\mathbf{Mb}$. {2 ptos}
- Obtener el condicionamiento del sistema utilizando $\|\cdot\|_\infty$ (El cálculo de la inversa se debe realizar utilizando el método de Gauss-Jordan o usando la factorización LU anterior). Calcular el condicionamiento si se utiliza la $\|\cdot\|_1$. {3 ptos}
- Obtener la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel y analizar su convergencia. Realizar dos iteraciones partiendo del vector nulo. A la vista de los resultados, ¿cuál será el comportamiento del método de Jacobi? {4 ptos}
- Calcular, si es posible y utilizando el método de Gauss-Seidel, el número de iteraciones para lograr un error (respecto a $\|\cdot\|_1$) menor que 10^{-3} , partiendo del vector nulo. {1 pto}

Apartado (a) Resolución por Gauss con pivote simple {2 ptos}

La matriz del sistema es tridiagonal, simétrica y de diagonal dominante (no estrictamente dominante, ya que falla la segunda fila), por tanto no va a ser necesario realizar pivoteo, lo que facilita la operatoria.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - \frac{2}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(-2 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1) = -1 \\ x_2 = \frac{2}{3}(1 - 1 \cdot 1) = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Apartado (b) Factorización {2 ptos}

Se pueden utilizar los cálculos del apartado anterior, puesto que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \wedge \mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

No es necesario realizar intercambio de filas.

También se puede hacer planteando directamente la factorización e igualando

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_2^1 & 1 & 0 \\ l_3^1 & l_3^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ 0 & u_2^2 & u_2^3 \\ 0 & 0 & u_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ l_2^1 u_1^1 & l_2^1 u_1^2 + u_2^2 & l_2^1 u_1^3 + u_2^3 \\ l_3^1 u_1^1 & l_3^1 u_1^2 + l_3^2 u_2^2 & l_3^1 u_1^3 + l_3^2 u_2^3 + u_3^3 \end{pmatrix}$$

Apartado (c) Condicionamiento {2.5 pts}

El Condicionamiento se define como el producto de la norma de la matriz por la de su inversa, utilizando la norma indicada. Por tanto $\kappa(\mathbf{A}, \infty) = \|\mathbf{A}\|_{\infty} \|\mathbf{A}^{-1}\|_{\infty}$. Se necesita calcular la inversa, para lo que se utiliza el método de Gauss-Jordan (utilizando parte de lo operado en el apartado anterior)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftarrow \frac{1}{2} F_1]{F_2 \leftarrow F_2 - \frac{1}{2} F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 \leftarrow \frac{2}{3} F_2]{F_1 \leftarrow F_1 - \frac{1}{3} F_2, F_3 \leftarrow F_3 - \frac{2}{3} F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 \leftarrow \frac{3}{4} F_3]{F_1 \leftarrow F_1 + \frac{1}{4} F_3, F_2 \leftarrow F_2 - \frac{1}{3} F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

O también usando la factorización vista en el apartado (b)

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max \{2+1+0, 1+2+1, 0+1+2\} = \max \{3, 4, 3\} = 4$$

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_{\infty} = \max \left\{ \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right\} = \max \left\{ \frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2} \right\} = 2 \text{ ans} =$$

$$\kappa(\mathbf{A}, \infty) = \|\mathbf{A}\|_{\infty} \|\mathbf{A}^{-1}\|_{\infty} = 4 \cdot 2 = 8$$

Si utilizamos la $\|\cdot\|_1$, el resultado es el mismo dada la simetría de la matriz

Apartado (d) Matrices de Gauss-Seidel y convergencia {2.5 pts}

A partir de la descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$, donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{L} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{U} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene la matriz de iteración de Gauss-Seidel y el vector independiente

$$\mathbf{K}_G = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$c_G = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Al ser la matriz de diagonal dominante, con una fila estrictamente dominante, el método de Gauss-Seidel es convergente. De todas formas se comprueba fácilmente con las normas o el radio espectral:

$$\|\mathbf{K}_G\|_1 = \max\{0, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}\} = \frac{7}{8} < 1 \quad \|\mathbf{K}_G\|_\infty = \max\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}\} = \frac{3}{4} < 1,$$

$$P_x(\mathbf{K}_G) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \rho(\mathbf{K}_G) = \frac{1}{2} < 1$$

Realizamos las iteraciones pedidas (y algunas más para comparar con el siguiente apartado)

$$x^{(1)} = \mathbf{K}_G x^{(0)} + c_G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \mathbf{K}_G x^{(1)} + c_G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.25 \\ 0.25 \\ 0.875 \end{pmatrix}$$

⋮

$$x^{(10)} = \begin{pmatrix} -1.002 \\ 0.002 \\ 0.999 \end{pmatrix} \quad x^{(11)} = \begin{pmatrix} -1.0010 \\ 0.0010 \\ 0.9995 \end{pmatrix} \quad x^{(12)} = \begin{pmatrix} -1.0005 \\ 0.0005 \\ 0.9998 \end{pmatrix}$$

Puesto que la matriz del sistema es tridiagonal, los radios de Jacobi y Gauss-Seidel están relacionados mediante $\rho(\mathbf{K}_{GS}) = \rho(\mathbf{K}_J)^2$, y por tanto también Jacobi converge.

Otra forma de verlo sería mediante la norma de la matriz de iteración o su radio espectral

$$\mathbf{K}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{K}_J\|_1 = \|\mathbf{K}_J\|_\infty = \max\{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\} = 1 \text{ No sabemos si converge o no}$$

$$P_x(\mathbf{K}_J) = -x^3 + \frac{1}{2}x \Rightarrow \rho(\mathbf{K}_J) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ Converge}$$

Apartado (e) Numero de iteraciones {2 pts}

El número mínimo de iteraciones necesarias para asegurar que el error sea menor que un ε dado se calcula como:

$$\|x - x^{(n)}\| \leq \frac{\|K\|^n}{1 - \|K\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| < \varepsilon \rightarrow n \geq \frac{\ln \frac{(1 - \|K\|) \varepsilon}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|}}{\ln \|K\|}$$

Pero esta fórmula sólo se puede utilizar cuando el valor de la norma es inferior a la unidad.

$$n \geq \frac{\ln \frac{(1 - 7/8) 0.001}{9/4}}{\ln(7/8)} = \frac{-\ln(18000)}{\ln(7/8)} = 73.38$$

Por tanto se necesitan 74 iteraciones. Se ha comprobado realizándolas que el número real de iteraciones necesarias es 23, aunque para que la diferencia entre dos consecutivas cumpla lo exigido, se han necesitado 25.

Criterios de puntuación:

Ejercicio	Apartado	Criterios	Valoración
1	A (1 pts)	Aplicación del método de resolución analítica Obtención correcta de la solución	0.75 0.25
	B (2 pts)	Expresión del Método de Euler Aplicación correcta del método Comparación con resultados reales	0.75 1 0.25
	C (2 pts)	Selección del intervalo y obtención del interpolante Aplicación	2x0.75 2x0.25
	D (3 pts)	Expresión del Método de Taylor de orden 3 Cálculo de las derivadas necesarias Aplicación correcta del método Comparación con resultados reales	0.5 1 1.25 0.25
	E (2 pts)	Selección del intervalo y obtención del interpolante Aplicación	2x0.75 2x0.25
2	A (3 pts)	Planteamiento del método de coeficientes indeterminados Resolución del sistema Expresión de la fórmula y su orden Aplicación	1 0.5 0.5 1
	B (2.5 pts)	Planteamiento del polinomio de aproximación Resolución y expresión del polinomio	1.5 1.0
	C (2.5 pts)	Condiciones (4) del método de Newton Iteraciones (2)	2 0.5
	D (2 pts)	Razonamiento del método adecuado Aplicación	1.0 1.0
3	A (3 pts)	Justificación del método de factorización Resolución con pivote doble	1.0 2.0
	B (5 pts)	Matrices de Jacobi Convergencia de Jacobi Iteraciones Convergencia de Gauss-Seidel	1.5 1.5 1.0 1.0
	C (2 pts)	Expresión de la fórmula Cálculo de las normas Cálculo del valor	0.5 1.0 0.5