



Titulación: Ingeniero Geólogo
Asignatura: Análisis Numérico
Autor: César Menéndez

Última actualización: 16/01/2010

Ecuaciones diferenciales ordinarias: Problemas de valor inicial

Planificación:

4 Teoría+1 Prácticas+2 Laboratorio

Materiales:

MATLAB

Conocimientos previos:

T^{mas}. básicos de Cálculo –
Desarrollos de Taylor – Sistemas
lineales –



Descripción del problema

Motivación

Objetivos

Temario

Bibliografía

- Obtener las funciones que verifican una ecuación en que la variable dependiente se relaciona con su variación con respecto a la variable independiente.

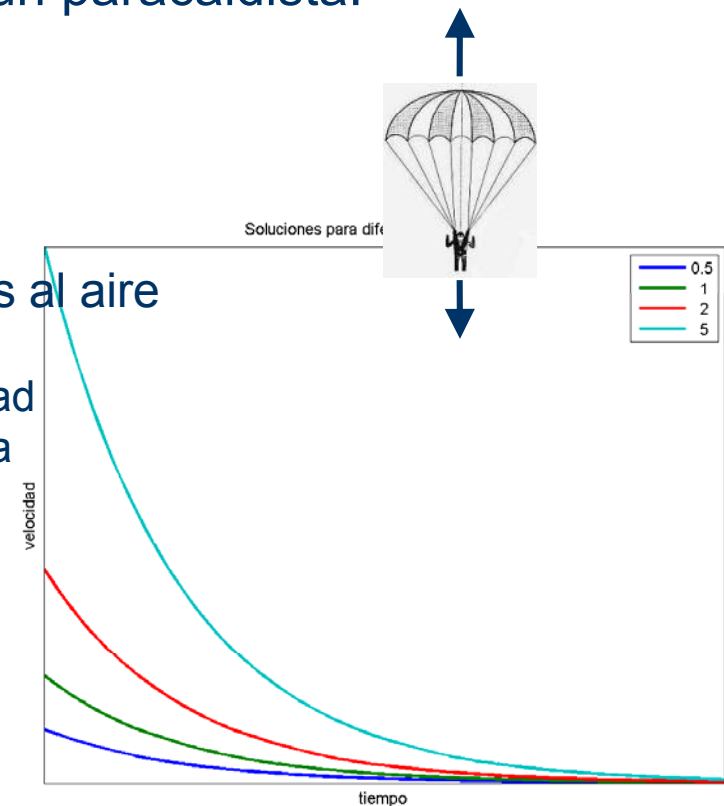
- Ejemplo: Ley de Newton aplicada al cálculo de la velocidad de descenso de un paracaidista:

$$\sum F = ma \rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{\sum F}{m}$$

- Fuerzas actuantes:
 - Gravedad (peso)
 - Resistencia del paracaídas al aire
 - Opuesta al descenso
 - Proporcional a la velocidad
 - Coeficiente de resistencia

$$\frac{dv}{dt} = g - c \frac{v}{m} \rightarrow \dot{v}(t)?$$

$$v(t) = \frac{gm}{c} \left(1 - \alpha e^{-\frac{ct}{m}} \right)$$





Objetivos

📁 Motivación

📁 Objetivos

📁 Temario

📁 Bibliografía

- Entender los conceptos de orden, consistencia, estabilidad y convergencia.
- Diferenciar los conceptos de error de truncamiento local y global, y su relación.
- Comprender los métodos de Taylor y la interpretación gráfica de los de orden más bajo (Euler, Heun y el polígono mejorado).
- Entender la base de los métodos predictor-corrector y su conexión con las fórmulas de integración.
- Aplicar los métodos de Runge-Kutta y entender cómo se relacionan con el desarrollo en serie de Taylor.
- Aplicar los métodos anteriores a sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Reducir una ecuación diferencial ordinaria de n -ésimo orden a un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- Comprender la inestabilidad de algunos métodos para tipos especiales de problemas (rígidos).
- Saber seleccionar un método numérico para la solución de un problema particular.



Conceptos básicos (I)

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

- Conceptos básicos
- Solución analítica
- Resolución numérica

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- Una ecuación diferencial es cualquier ecuación que comprenda derivadas de una función con respecto a una sola variable independiente.
- Cuando hay varias funciones y una sola variable independiente se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Cuando hay una función y varias variables independientes se tiene una ecuación en derivadas parciales (EDP).
- Cuando hay varias funciones y varias variables independientes se tiene un sistema de ecuaciones en derivadas parciales (EDP).
- Si una ecuación diferencial se puede escribir como un polinomio, su **orden** es el mayor entero positivo de la n-sima derivada presente en la ecuación.
- La potencia más alta con que aparece la derivada que marca el orden de la ecuación se denomina **grado**.
- Ejemplos
 - $y'' + x(y')^2 + xy = x^3$ EDO segundo orden y grado uno
 - $(y')^3 + (xy')^2 - y^4 = e^x$ EDO primer orden y grado 3
 - $x^3 y_t + xt(y_x)^2 = (x + t^2)^3$ EDP primer orden y grado 2 (2 v.i.)
 - $\tau_t = k(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz})$ EDP segundo orden y grado 1 (4 v.i.)
 - $y''' + \sin(y') + xy = 5$ EDO tercer orden sin grado



Conceptos básicos (II)

📁 Motivación

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

- Conceptos básicos
- Solución analítica
- Resolución numérica
- Mét. Euler y Taylor
- Mét. Runge-Kutta
- Mét. Multipaso
- EDOs orden superior
- Estabilidad
- EDOs rígidas

📁 Bibliografía

- Forma general de una ecuación diferencial de orden n

$$f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad xy''' + \frac{y + y'}{x^3 y''} - \sin(xy) = e^x$$

- Una EDO es lineal cuando lo es en cada derivada de igual orden

$$f_n(x)y^{(n)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x) \qquad y'' + x(y')^2 + xy = x^3$$

- Una solución explícita de una EDO de orden n es aquella función $y(x)$ que satisface la EDO para todo valor x del intervalo.

$$y' + y = 0, x \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{-x} & \text{Si} \\ y_2(x) = \begin{cases} e^{-x} & x < 0 \\ 2e^{-x} & x \geq 0 \end{cases} & \text{No} \end{cases}$$

- Una solución implícita de una EDO de orden n es aquella relación $g(x, y)$ que define al menos una $y(x)$ que satisface la EDO para todo valor x del intervalo

$$yy' + x = 0 \rightarrow \begin{aligned} f(x, y) &= y^2 + x^2 + c = 0 \\ f'(x, y) &= 2yy' + 2x = 0 \end{aligned}$$



Conceptos básicos (III)

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

- Conceptos básicos

- Solución analítica

- Resolución numérica

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- Una familia de funciones de n parámetros $f(t, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = 0$ se denomina **solución general** si es solución de la EDO para cualquier valor de los parámetros y no hay un conjunto inferior de parámetros que representen esas soluciones

$$y'' - y = 0 \begin{cases} y_1(x) = c_1 e^{x+c_2} & \text{No} \\ y_2(x) = c_1 e^x & \text{Si} \end{cases}$$

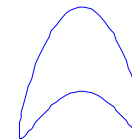
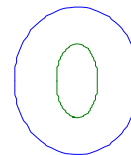
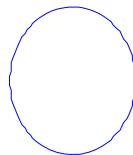
- La función obtenida al seleccionar los valores de los parámetros se denomina **solución particular**

- $f(t, y)$ satisface la condición de Lipschitz en la variable y (es **lipschitciana** respecto a y) en $D \subset \mathbb{R}^2$ si existe L positiva tal que $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$ para todo $(t, y_1), (t, y_2) \in D$.

$$f(t, y) = \frac{y}{2t} + 5, D = [1, 3]^2 \rightarrow |f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left| \frac{y_1 - y_2}{2t} \right| \leq \frac{1}{2} |y_1 - y_2|$$

- Si $f(t, y)$ esta definida en un conjunto convexo D y $|f_y| \leq L$ en D , entonces es lipschitciana en y .

- Un conjunto D es **convexo** cuando dos puntos cualesquiera se pueden unir mediante un segmento rectilíneo cuyos puntos también pertenecen a D .
- Un conjunto D es **conexo** cuando dos puntos cualesquiera se pueden unir mediante una curva cuyos puntos también pertenecen a D .





EDO 1^{er} orden: resolución analítica (I)

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

- Conceptos básicos

- Solución analítica

- Resolución numérica

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- Lineales:
$$\begin{cases} y' + p(t)y = q(t) & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

- Existencia y Unicidad de Solución

Si $p(x)$ y $q(x)$ son continuas en un abierto que contenga a $[a, b]$

- Obtención de la solución

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} \quad y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int \mu(t) q(t) dt + c \right)$$

Ejemplos

$$\begin{cases} y' - 2ty = t & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \mu(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-t^2} \quad y(t) = \frac{1}{e^{-t^2}} \left(\int e^{-t^2} t dt + c \right) = -\frac{1}{2} + ce^{t^2}$$

$$\begin{cases} y' - 2ty = 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \mu(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-t^2} \quad y(t) = e^{t^2} \left(\int e^{-t^2} dt \right) + ce^{t^2}$$

- No lineales
$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad M(t, y) + N(t, y)y' = 0$$

- Existencia y Unicidad de Solución

Si $f(t, y)$ es continua y lipschitziana respecto a y en $D = \{a \leq t \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}$, existe solución y es única (Picard)

- Muy difícil obtener la solución analítica (explícita o implícita) salvo en casos especiales



EDO 1^{er} orden: resolución analítica (II)

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

- Conceptos básicos

- Solución analítica

- Resolución numérica

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- Ejemplo: Solución no única

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2} \\ y_2(t) = 0 \end{cases} \Leftarrow \frac{df}{dy} = \left(\frac{1}{3}y\right)^{-2/3} \quad \text{No definida para } y=0$$

- Ejemplo: singularidades de la solución dependen de la condición inicial

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{1-t} \quad \begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 2 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{2-t}$$

- Métodos analíticos

- Variables separables $M(t) + N(y)y' = 0 \rightarrow N(y)dy = -M(t)dt$
- Ec. homogéneas $f(st, sy) = s^n f(t, y) \rightarrow \text{Cambio } v = \frac{y}{t} \Rightarrow \text{var.sep}$
- Ecuaciones exactas $\frac{d}{dt}(P(t, y)) = M(t, y) + N(t, y)y' = 0 \Rightarrow M_y = N_t$
- Fact. integrantes $\exists \mu(t, y)?: \frac{d}{dt}(P(t, y)) = \mu M(t, y) + \mu N(t, y)y' = 0$

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_t N + \mu N_t$$

$$\exists \mu(t)?: \Rightarrow \frac{M_y - N_t}{N} = g(t) \quad \exists \mu(y)?: \Rightarrow -\frac{M_y - N_t}{M} = g(y)$$



EDO 1^{er} orden: resolución analítica (III)

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

- Conceptos básicos

- Solución analítica

- Resolución numérica

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- Ejemplo: Variables separables

$$\begin{cases} y' = \frac{y \cos t}{1 + 2y^2} \rightarrow \frac{1 + 2y^2}{y} dy = \cos t \cdot dt \rightarrow \begin{cases} \ln|y| + y^2 = \sin t + c \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \ln|y| + y^2 = \sin t + 1 \end{cases}$$

- Ejemplo: Ec. homogéneas

$$\begin{cases} y' = -\frac{y^2 + t^2}{yt} \rightarrow (t^2 + v^2 t^2) dt + t^2 v(v dt + t dv) = 0 \rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{-v dv}{1 + 2v^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \ln|t| = -\frac{1}{4} \ln|1 + 2v^2| + \ln c \rightarrow t^2(t^2 + 2y^2) = c^4 \Rightarrow t^2(t^2 + 2y^2) = 1$$

- Ejemplo: Ecuaciones exactas

$$\begin{cases} 3y(t^2 - 1)dt + (t^3 + 8y - 3t)dy = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_y = 3(t^2 - 1) = N_t \\ P = \int M dt = \int N dy \end{cases} \rightarrow P = yt^3 - 3ty + f(y)$$

$$\rightarrow P_y = t^3 - 3t + f'(y) = N \rightarrow P = yt^3 - 3ty + 4y^2 + c \Rightarrow P(t, y) = yt^3 - 3ty + 4y^2 - 2 = 0$$

- Ejemplo: Fact. integrantes

$$\begin{cases} (t^2 + y^2)dt + t(t - 2y)dy = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_y = 2y & \text{¿}\mu(t)\text{?} \Rightarrow \frac{M_y - N_t}{N} = \frac{2(2y - t)}{t(t - 2y)} = -\frac{2}{t} \\ N_t = 2t - 2y & \text{¿}\mu(y)\text{?} \Rightarrow -\frac{M_y - N_t}{M} = \frac{2(2y - t)}{(t^2 + y^2)} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{t} dt \rightarrow \mu = \frac{1}{t^2} \Rightarrow \begin{cases} \left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right)dt + \left(1 - 2\frac{y}{t}\right)dy = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow P(t, y) = t - \frac{y^2}{t} + y - 1 = 0$$



EDO orden superior: resolución analítica (I)

📁 Motivación

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

- Conceptos básicos

- Solución analítica

- Resolución numérica

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

📁 Bibliografía

- EDO de segundo orden

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y') & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 & y'(a) = v_0 \end{cases}$$

- Existencia y Unicidad de Solución

Si $f(t, y)$ es continua y lipschitziana respecto a y e y' en $D = \{a \leq t \leq b, -\infty \leq y \leq \infty, -\infty \leq y' \leq \infty\}$, existe solución y es única

- La obtención de solución analítica es complicada., incluso en casos aparentemente simples, y suelen dar lugar a métodos de coeficientes indeterminados y series de potencias

- Caso lineal

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 & y'(a) = v_0 \end{cases}$$



EDO orden superior: resolución analítica (II)

📁 Motivación

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

- Conceptos básicos

- Solución analítica

- Resolución numérica

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

📁 Bibliografía

- E.D.O. lineales homogéneas de coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (I)$$

$$\text{Ec. Característica : } P(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$$

- Las raíces λ de la ecuación característica $P(x)$ proporcionan un sistema fundamental de soluciones:
 - Si λ es una raíz real simple de $P(x)$, $y=e^{\lambda x}$ es solución de la ecuación diferencial.(I)
 - Si λ es una raíz real múltiple de orden m de $P(x)$, $y=x^k e^{\lambda x}$, $k=0, \dots, m-1$ son soluciones independientes de la ecuación diferencial.(I)
 - Si $\lambda = a \pm bi$ son raíces complejas conjugadas de $P(x)$, $y_1 = e^{ax} \cos(bx)$ e $y_2 = e^{ax} \sin(bx)$ son soluciones independientes de la ecuación diferencial.(I).
 - Si $\lambda = a \pm bi$ son raíces complejas conjugadas de multiplicidad m de $P(x)$, $y_{1k} = x^k e^{ax} \cos(bx)$ e $y_{2k} = x^k e^{ax} \sin(bx)$, $k=0, \dots, m-1$ son soluciones independientes de la ecuación diferencial.(I)
- La solución general de la ecuación diferencial (I) se obtiene como combinación lineal de las soluciones simples obtenidas para cada raíz.



EDO orden superior: resolución analítica (III)

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

- Conceptos básicos

- Solución analítica

- Resolución numérica

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- E.D.O. lineales completas de coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (II)$$

- La solución general de la ecuación es igual a la suma de la solución general de la homogénea correspondiente, y de cualquier solución particular de la ecuación completa.
- Método de los coeficientes indeterminados: Se toma una solución particular de la ecuación completa del mismo tipo que el término independiente y cuyos coeficientes se determinan sustituyendo la solución en la ecuación.
 - Si $f(x)=P_m(x)$ y $\lambda=0$ no es raíz de $P(x)$, $y_p=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_m$.
 - Si $f(x)=P_m(x)$ y $\lambda=0$ es raíz de orden r , de $P(x)$, $y_p=x^r(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\dots+A_m)$
 - Si $f(x)=e^{ax}P_m(x)$, $y_p=e^{ax}.Q_m(x)$ si a no es raíz de $P(x)$ o $y_p=x^r e^{ax}.Q_m(x)$ si a es raíz de $P(x)$ de orden r .
 - Si $f(x)=e^{ax}(P_m(x)\cos bx+Q_s(x)\sen bx)$, $y_p=e^{ax}(U(x)\cos bx+V(x)\sen bx)$, si $a \pm bi$ no es raíz de $P(x)$ o $y_p=x^r e^{ax}(U(x)\cos bx+V(x)\sen bx)$ si $a \pm bi$ es raíz de $P(x)$ de orden r , donde $U(x)$ y $V(x)$ son polinomios de grado $= \max(m,s)$



EDO orden superior: resolución analítica (IV)

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

- Conceptos básicos

- Solución analítica

- Resolución numérica

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- Ejemplo $y^{(4)} - y = x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$
 $y(0) = 1 \quad y'(0) = 2 \quad y''(0) = -3 \quad y'''(0) = 4$

- Solución general de la homogénea

$$P(x) = x^4 - 1 \rightarrow \sigma(P) = \{\pm 1, \pm i\}$$

$$y_g(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{0x} \cos(x) + c_4 e^{0x} \sin(x)$$

- Solución particular

$$y_p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \rightarrow$$

$$y_p^{(4)} - y_p = 0 - (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = x^2 \rightarrow \begin{cases} a_2 = -1 \\ a_1 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

- Solución completa

$$P(x) = x^4 - 1 \rightarrow \sigma(P) = \{\pm 1, \pm i\}$$

$$y_c(x) = y_g(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x) - x^2$$

- Condiciones iniciales

$$y_c(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 1 \quad y_c''(0) = c_1 + c_2 - c_3 = -3 \rightarrow$$

$$y_c'(0) = c_1 - c_2 + c_4 = 2 \quad y_c'''(0) = c_1 - c_2 - c_4 = 4$$

$$\rightarrow y_c(x) = e^x - 2e^{-x} + 2\cos(x) - \sin(x) - x^2$$



EDO: resolución numérica (I)

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

- Conceptos básicos
- Solución analítica
- Resolución numérica

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

Casos

- La resolución numérica se centra en las EDO de primer orden dado que las de orden superior se pueden reducir a sistemas de primer orden.

$$f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = y' \\ y_2 = y'' \\ y_3 = y^{(3)} \\ \vdots \\ y_n = y^{(n)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(t, y, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \\ y' = y_1 \\ y'_1 = y_2 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = y_n \end{cases}$$

- Por su interés específico, a veces se estudian las de segundo orden (asociadas a problemas de contorno).

Problema perturbado: perturbaciones asociadas a la EDO y a la condición inicial

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z' = f(t, z) + \delta(t) & a \leq t \leq b \\ z(a) = \alpha + \varepsilon_a \end{cases}$$

Problema bien planteado

- El problema tiene solución única
- El problema perturbado tiene solución única y su error respecto al inicial está acotado si lo están las perturbaciones

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k(\varepsilon) / |\varepsilon_0| < \varepsilon \wedge \forall t \in [a, b] : |\delta(t)| < \varepsilon \Rightarrow |y(t) - z(t)| < k(\varepsilon) \varepsilon$$



EDO: resolución numérica (I)

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

- Conceptos básicos

- Solución analítica

- Resolución numérica

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

• Proceso

- No se obtiene la solución analítica, sino un conjunto de pares (t_i, y_i) que representan los valores aproximados de la solución para diferentes valores de la variable independiente.
- Los resultados se deben interpolar (o ajustar) si se desean en valores intermedios.
- Es necesario que el problema este bien planteado ya que los métodos numéricos introducen perturbaciones de los coeficientes debido a la aritmética del ordenador.

• El problema de valor inicial de primer orden esta bien planteado si $f(t, y)$ es continua y lipschitziana respecto a y en $D = \{[a, b] \times (-\infty, \infty)\}$.

• Ejemplo: problema bien planteado

$$\begin{cases} y' = y - t^2 + 1 & 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) = 0.5 \end{cases} \rightarrow y(t) = (t+1)^2 - 0.5e^t$$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1 - t^2 + 1 - (y_2 - t^2 + 1)| = 1|y_1 - y_2|$$

$$f_y = 1$$

$$\begin{cases} z' = z - t^2 + 1 + \delta(t) & 0 \leq t \leq 2 \\ z(a) = 0.5 + \varepsilon_a \end{cases} \rightarrow z(t) = (t+1)^2 - (0.5 - \delta(t) - \varepsilon_a)e^t - \delta(t)$$

$$|y(t) - z(t)| = |(\delta(t) + \varepsilon_a)e^t + \delta(t)| \leq (2e^2 + 1)\varepsilon$$



Fundamentos

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

- Fundamentos

- Euler

- Taylor

- Errores

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

• Métodos de Taylor

- Discretizan el intervalo total en n subintervalos iguales (puntos equiespaciados con paso h) y obtiene aproximaciones de la solución en esos puntos.
- Utilizan el desarrollo en serie de Taylor

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y'(t_k) = f(t_k, y(t_k)) & 1 \leq k \leq n \\ y(a) = \alpha \end{cases} \quad t_k = a + kh \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$y(t_k) = y(t_{k-1}) + y'(t_{k-1})\frac{h}{1!} + y''(t_{k-1})\frac{h^2}{2!} + \cdots + y^{(n-1)}(t_{k-1})\frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!} + y^{(n)}(\xi)\frac{h^{(n)}}{n!}$$

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$y''(t) = \frac{d}{dt} f(t, y(t)) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))y' = f_t + f_y f$$

$$y'''(t) = \frac{d}{dt} y''(t) = (f_{tt} + f_{ty} f) + (f_{ty} + f_{yy} f) f + f_y (f_t + f_y f)$$

$\vdots$

- Orden de un método: orden de la derivada superior utilizada en el desarrollo de Taylor o, equivalentemente, grado del polinomio para el que el método teórico no tiene error.

- Notación: $w_k \approx y(t_k)$



Método de Euler (Taylor de orden 1)

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

- Fundamentos

- Euler

- Taylor

- Errores

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- Base teórica y algoritmo

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \rightarrow y(t_k) = y(t_{k-1}) + y'(t_{k-1}) \frac{h}{1!} + y''(\xi) \frac{h^2}{2!}$$

$$\begin{cases} w_0 = \alpha & t_k = a + kh \\ w_k = w_{k-1} + hf(t_{k-1}, w_{k-1}) & 1 \leq k \leq n \quad h = \frac{b-a}{n} \end{cases}$$

- Ejemplo: tomando $h=0.25$ y $h=0.1$ resolver y representar la solución

$$y' = -\frac{t}{y} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$$

$$t_0 = 0 \quad w_0 = 1$$

$$t_1 = h = 0.25 \quad w_1 = w_0 + hf(t_0, w_0) = w_0 - 0.25 \frac{t_0}{w_0} = 1 - 0.25 \frac{0}{1} = 1$$

$$t_2 = 0.5 \quad w_2 = w_1 - 0.25 \frac{t_1}{w_1} = 1 - 0.25 \frac{0.25}{1} = 0.9375$$

$$t_3 = 0.75 \quad w_3 = w_2 - 0.25 \frac{t_2}{w_2} = 0.9375 - 0.25 \frac{0.5}{0.9375} = 0.8042$$

$$t_4 = 1.0 \quad w_4 = w_3 - 0.25 \frac{t_3}{w_3} = 0.8042 - 0.25 \frac{0.75}{0.8042} = 0.5710$$



Ejemplo de Euler

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

- Fundamentos

- Euler

- Taylor

- Errores

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

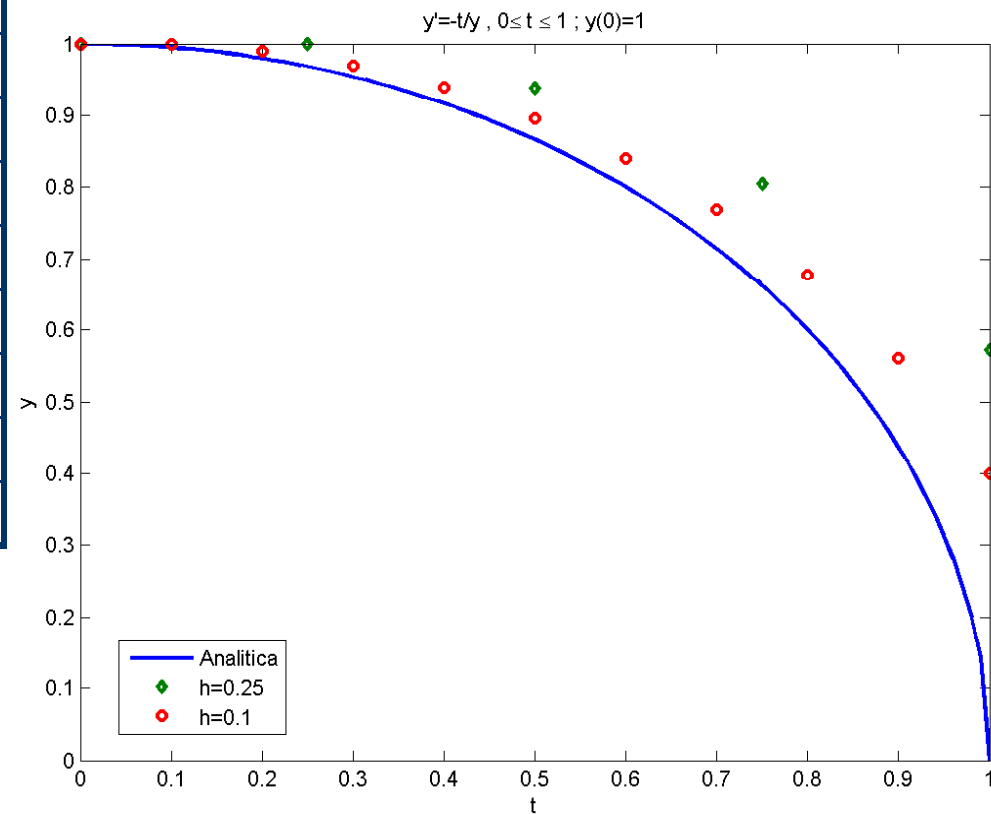
EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

$t_0=0$	$w_0=1.0000$
$t_1=0.1$	$w_1=1.0000$
$t_2=0.2$	$w_2=0.9900$
$t_3=0.3$	$w_3=0.9698$
$t_4=0.4$	$w_4=0.9389$
$t_5=0.5$	$w_5=0.8963$
$t_6=0.6$	$w_6=0.8405$
$t_7=0.7$	$w_7=0.7691$
$t_8=0.8$	$w_8=0.6781$
$t_9=0.9$	$w_9=0.5601$
$t_{10}=1.0$	$w_{10}=0.3994$





Método de Taylor de orden superior (I)

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

- Fundamentos

- Euler

- Taylor

- Errores

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

• Base teórica y algoritmo

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \rightarrow y(t_{k-1}) + h \left[y'(t_{k-1}) + \dots + y^{(n-1)}(t_{k-1}) \frac{h^{(n-2)}}{(n-1)!} \right] + y^{(n)}(\xi) \frac{h^{(n)}}{n!}$$

$$\begin{cases} w_0 = \alpha & t_k = a + kh \\ w_k = w_{k-1} + hT_{n-1}(h, t_{k-1}, w_{k-1}) & 1 \leq k \leq n \quad h = \frac{b-a}{n} \end{cases}$$

• Ejemplo: tomando $h=0.25$ resolver para Taylor de orden 1, 2, 3 y 4

$$y' = -\frac{t}{y} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$$

$$y'(t) = -ty^{-1}(t) \quad T_1(t, y, h) = y'(t_k)$$

$$y''(t) = -y^{-1}(1+t^2y^{-2}) \quad T_2(t, y, h) = T_1(t, y, h) + \frac{h}{2}y''(t)$$

$$y'''(t) = -3ty^{-3}(1+t^2y^{-2}) \quad T_3(t, y, h) = T_2(t, y, h) + \frac{h^2}{3!}y'''(t)$$

$$y^{iv}(t) = -3y^{-3}(1+6t^2y^{-2}+5t^4y^{-4}) \quad T_4(t, y, h) = T_3(t, y, h) + \frac{h^3}{4!}y^{iv}(t)$$

$$t_0 = 0 \quad t_1 = 0.25 \quad w_0 = 1$$

$$y'(t_0) = -t_0w_0^{-1} = 0 \quad T_1(t_0, w_0, h) = y'(t_0) = 0$$

$$y''(t_0) = -w_0^{-1}(1+t_0^2w_0^{-2}) = -1 \quad T_2(t_0, w_0, h) = T_1(t_0, w_0, h) + \frac{h}{2}y''(t_0) = 0 - \frac{0.25}{2}1 = -0.125$$



Ejemplo de Taylor (I)

$$y'''(t_0) = -3t_0 w_0^{-3} (1 + t_0^2 w_0^{-2}) = 0$$

$$T_3(t_0, w_0, h) = T_2(t_0, w_0, h) + \frac{h^2}{3!} y'''(t_0) = -0.125 + 0 = -0.125$$

$$y^{iv}(t_0) = -3w_0^{-3} (1 + 6t_0^2 w_0^{-2} + 5t_0^4 w_0^{-4}) = -3$$

$$T_4(t_0, w_0, h) = T_3(t_0, w_0, h) + \frac{h^3}{4!} y^{iv}(t_0) = -0.125 - \frac{0.25^3}{24} 3 = -0.15625$$

$$w_0^1 = w_0^1 + hT_1(t_0, w_0^1, h) = 1 + 0.25 \times 0 = 1$$

$$w_0^2 = w_0^2 + hT_2(t_0, w_0^2, h) = 1 + 0.25 \times (-0.125) = 0.96875$$

$$w_0^3 = w_0^3 + hT_3(t_0, w_0^3, h) = 1 + 0.25 \times (-0.125) = 0.96875$$

$$w_0^4 = w_0^4 + hT_4(t_0, w_0^4, h) = 1 + 0.25 \times (0.15625) = 0.9609375$$

Se repite el proceso con t_2 , t_3 y t_4

orden	T1	T2	T3	T4	Y
$t_0=0$	$w_0=1.0000$	$w_0=1.0000$	$w_0=1.0000$	$w_0=1.0000$	1.0000
$t_1=0.25$	$w_1=1.0000$	$w_1=0.9688$	$w_1=0.9688$	$w_1=0.9683$	0.9682
$t_2=0.50$	$w_2=0.9375$	$w_2=0.8698$	$w_2=0.8675$	$w_2=0.8662$	0.8660
$t_3=0.75$	$w_3=0.8042$	$w_3=0.6783$	$w_3=0.6675$	$w_3=0.6631$	0.6614
$t_4=1.0$	$w_4=0.5710$	$w_4=0.2995$	$w_4=0.2361$	$w_4=0.1990$	0.0000

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

- Fundamentos

- Euler

- Taylor

- Errores

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

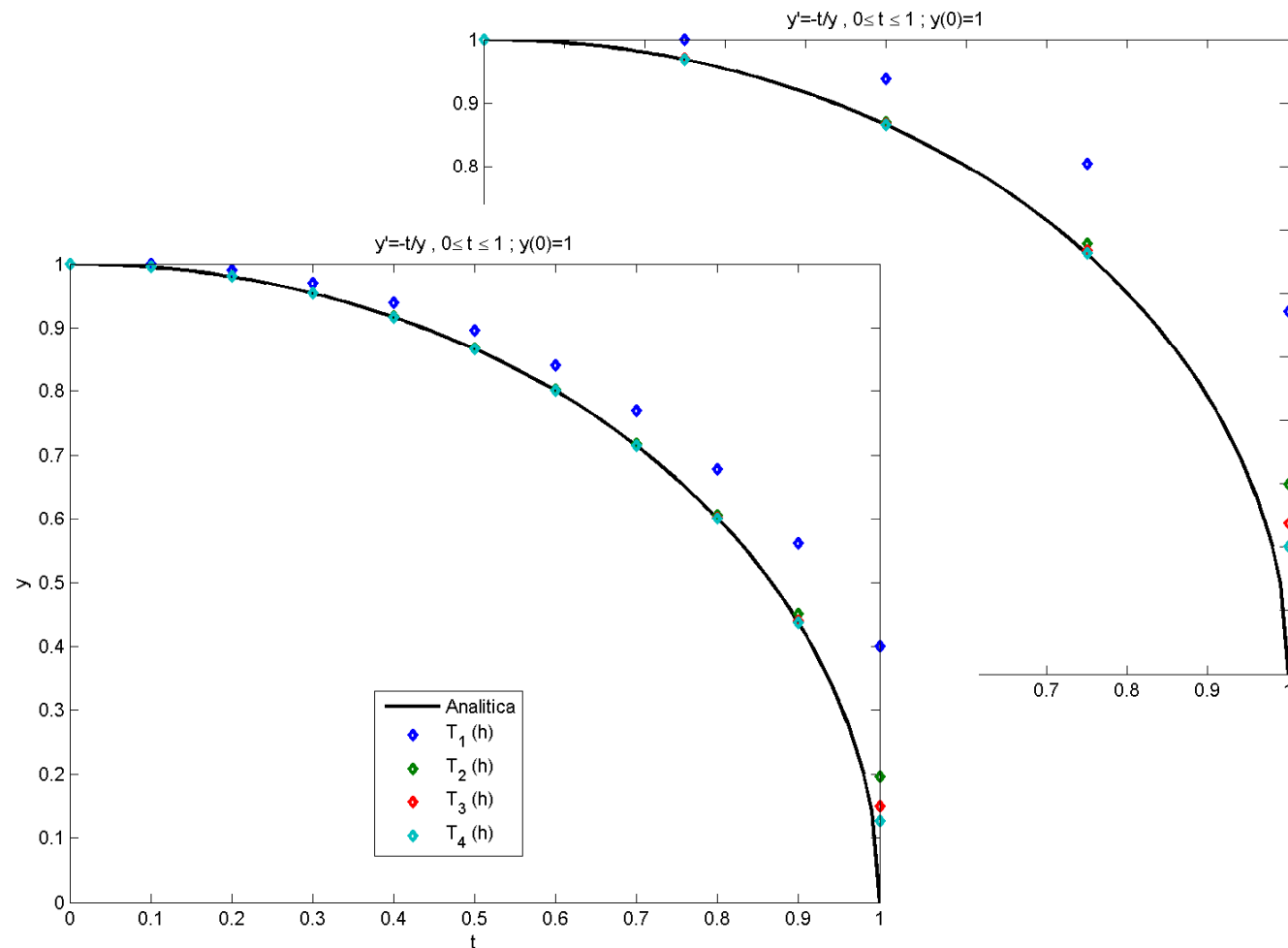
EDOs rígidas

Bibliografía



Ejemplo de Taylor (II)

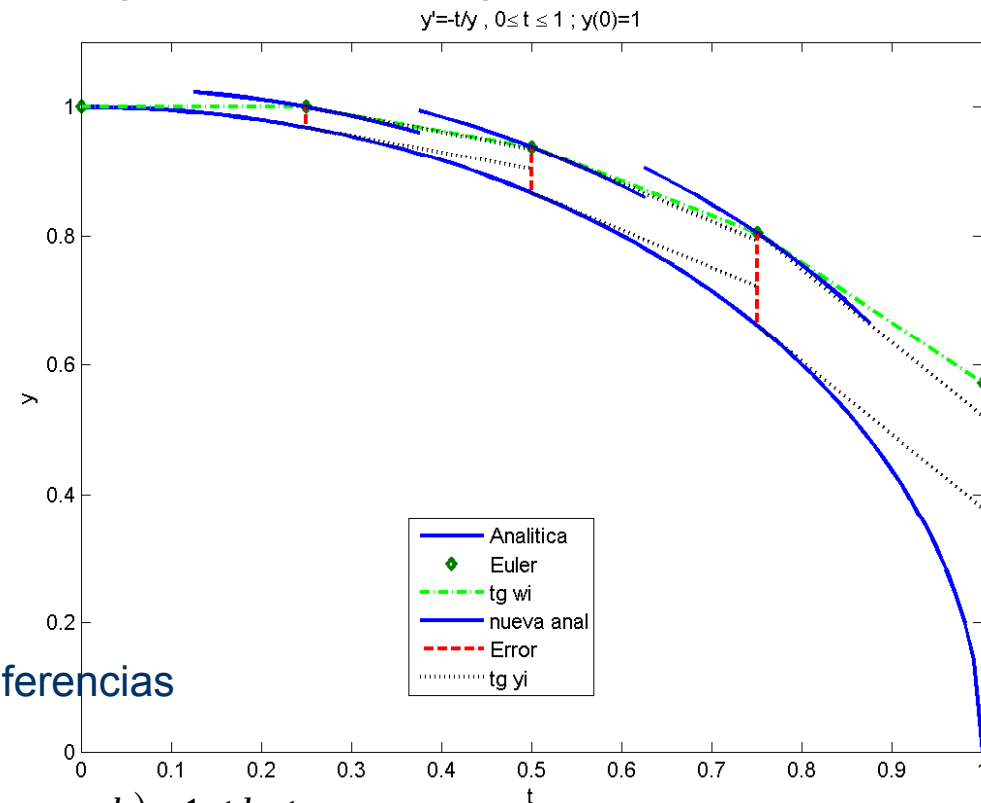
- Representación de resultados para $h=0.25$ v $h=0.1$





Tipos de errores y error local

- Error de redondeo (representación)
- Error de truncamiento global (local+propagado)



- Un método de diferencias

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_k = w_{k-1} + h\varphi(t_{k-1}, w_{k-1}, h) \quad 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

tiene un error de truncamiento local dado por

$$\tau_k(h) = \frac{y_k - (y_{k-1} + h\varphi(h, t_{k-1}, y_{k-1}))}{h} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h} - \varphi(h, t_{k-1}, y_{k-1})$$

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

- Fundamentos

- Euler

- Taylor

- Errores

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

 **Motivación** **Objetivos** **Temario****Introducción****Mét. Euler y Taylor***- Fundamentos**- Euler**- Taylor**- Errores***Mét. Runge-Kutta****Mét. Multipaso****EDOs orden superior****Estabilidad****EDOs rígidas** **Bibliografía**

Acotación del error en Euler

- Sea el problema de valor inicial

$$y' = f(t, y) \quad a \leq t \leq b \quad y(a) = \alpha$$

- El error de truncamiento global del método de Euler viene acotado por

$$|y_{k+1} - w_{k+1}| \leq \frac{hM}{2L} (e^{(t_{k+1}-a)L} - 1)$$

$$\text{donde} \begin{cases} M = \sup_{a \leq t \leq b} |y''(t)| \\ L \text{ es la constante de Lipschitz de } f(t, y) \text{ en } y \end{cases}$$

- El error del problema perturbado viene acotado por

$$|y(t_{k+1}) - \tilde{w}_{k+1}| \leq \frac{1}{L} \left(\frac{hM}{2} + \frac{\varepsilon}{h} \right) (e^{(t_{k+1}-a)L} - 1) + \varepsilon e^{(t_{k+1}-a)L}$$

- El error no disminuye indefinidamente con el valor de h



Ejemplo de acotación del error

- Acotación del error del método de Euler para la EDO

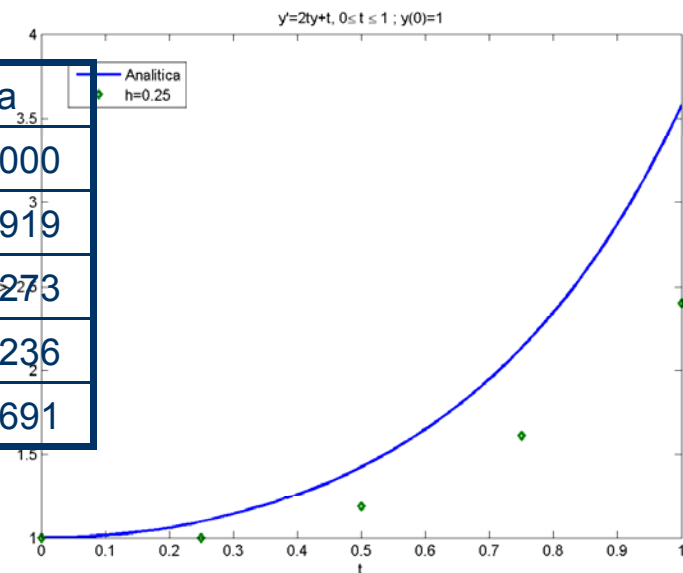
$$y' = t(2y+1) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0)=1 \rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{t^2}$$

- Error de truncamiento global con $h=0.25$

$$|y_k - w_k| \leq \frac{hM}{2L} \left(e^{(t_k - 0)L} - 1 \right) \leq \frac{0.25 \cdot 9e}{2 \cdot 2} \left(e^{2t_k} - 1 \right)$$

$$\text{donde} \begin{cases} M = \sup_{0 \leq t \leq 1} |y''(t)| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |3e^{t^2} (1 + 2t^2)| \leq 3e(1 + 2) \\ \left| \frac{\partial}{\partial y} f(t, y) \right| = 2t \leq 2 = L \end{cases}$$

k	t	y	w	y-w	cota
0	0.00	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000
1	0.25	1.0967	1.0000	0.0967	0.9919
2	0.50	1.4260	1.1875	0.2385	2.6273
3	0.75	2.1326	1.6094	0.5232	5.3236
4	1.00	3.5774	2.4004	1.1770	9.7691



Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

- Fundamentos

- Euler

- Taylor

- Errores

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía



Definiciones y tablas de Butcher

📁 Motivación

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

📁 Bibliografía

- Logran la exactitud del método sin necesidad de calcular derivadas.
- Expresión General (Runge Kutta explícitos)

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_k = w_{k-1} + \varphi(h, t_{k-1}, w_{k-1}) \quad 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

$$\varphi(h, t_{k-1}, w_{k-1}) = c_1 k_1 + c_2 k_2 + \dots + c_n k_n$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + p_2 h, w_i + q_2^1 k_1)$$

$$k_3 = hf(t_i + p_3 h, w_i + q_3^1 k_1 + q_3^2 k_2)$$

⋮

$$k_n = f(t_i + p_n h, w_i + q_n^1 k_1 + q_n^2 k_2 + \dots + q_n^{n-1} k_{n-1})$$

Donde c_i, p_i e q_i^j son constantes elegidas de forma adecuada

- Expresión mediante tablas de Butcher

1	0				
p_2	q_2^1				
p_3	q_3^1	q_3^2			
$\vdots$	$\vdots$				
p_n	q_n^1	q_n^2	$\dots$	q_n^{n-1}	
c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_n	

Explícitos

1	q_1^1	q_1^2	$\dots$	q_1^{n-1}	
p_2	q_2^1	q_2^2	$\dots$	q_2^{n-1}	
p_3	q_3^1	q_3^2	$\dots$	q_3^{n-1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
p_n	q_n^1	q_n^2	$\dots$	q_n^{n-1}	
c_1	c_2	c_3	$\dots$	c_n	

Implícitos



Obtención de los coeficientes

📁 Motivación

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

📁 Bibliografía

- Los coeficientes se obtienen, una vez seleccionado el número de términos, por comparación con los métodos de Taylor
- El método con un solo término coincide con el de Euler
- El método es consistente cuando $p_i = \sum_{k=1}^{i-1} q_i^k \quad i = 2, \dots, n$
- Para cada orden hay infinitas formas de seleccionar el valor de los coeficientes (sistema no lineal indeterminado)
- Existe relación entre el número de evaluaciones por paso y el menor error local que en los métodos explícitos viene dado por (Butcher)

Evaluaciones (n)	1-4	5-7	8-9	>10
Error local	$O(h^n)$	$O(h^{n-1})$	$O(h^{n-2})$	$O(h^{n-3})$



Runge-Kutta de orden 2

Orden 2

Demo

$$c_1 + c_2 = 1 \quad c_2 p_2 = c_2 q_2^1 = \frac{1}{2}$$

Heun

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = hf(t_n, y_n) \\ k_2 = hf(t_n + h, y_n + k_1) \end{array} \right.$$

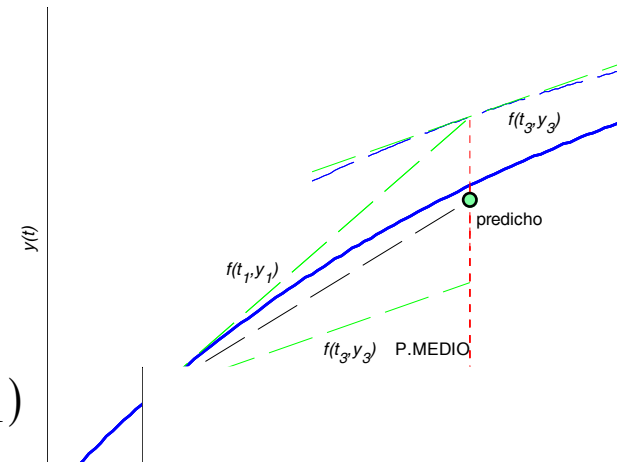
Pto. Medio

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + k_2 \\ k_1 = hf(t_n, y_n) \\ k_2 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \end{array} \right.$$

Ralston:

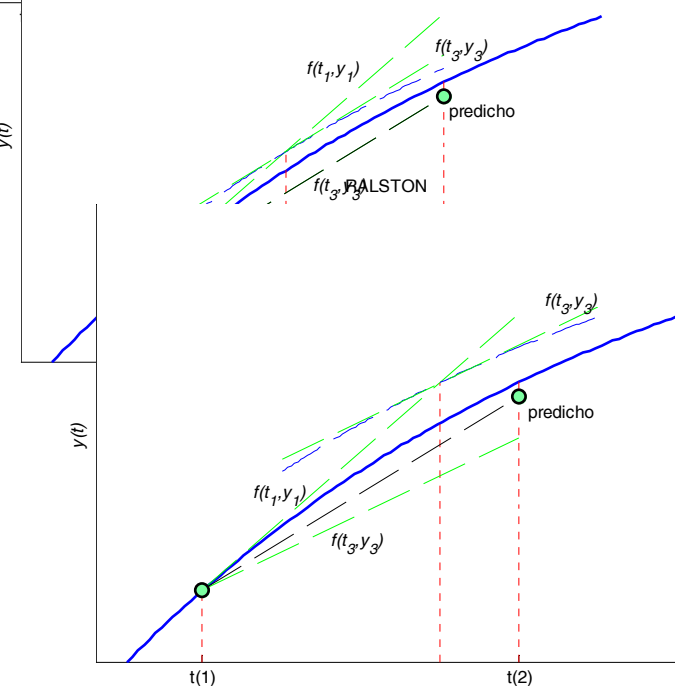
$$\begin{array}{c|c} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right) \\ k_1 = hf(t_n, y_n) \\ k_2 = hf\left(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}k_1\right) \end{array} \right.$$

HEUN



P.MEDIO

RALSTON



t(1)

t(2)

📁 Motivación

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

📁 Bibliografía



📁 Motivación

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

📁 Bibliografía

Runge-Kutta habituales de orden superior

● Orden 3:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
1	-1	2
$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + h, y_n - k_1 + 2k_2\right)$$

● Orden 4 :

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
1	0	0	1
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$$

● Orden 5

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$			
$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1		
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	0	0	$\frac{9}{16}$	
1	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{8}{7}$
$\frac{7}{90}$	0	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{8}(k_1 + k_2)\right)$$

$$k_4 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{1}{2}k_2 + k_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{16}k_1 + \frac{9}{16}k_4\right)$$

$$k_6 = hf\left(t_n + h, y_n - \frac{3}{7}k_1 + \frac{2}{7}k_2 + \frac{12}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5\right)$$



Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

Ejemplo (orden2): $y' = -\frac{t}{y}$ $0 \leq t \leq 1$ $y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$

$$\begin{cases} w_0 = \alpha & k_1 = hf(t_{i-1}, w_{i-1}) \\ w_i = w_{i-1} + (c_1 k_1 + c_2 k_2) & 1 \leq i \leq n \quad k_2 = hf(t_{i-1} + ph, w_{i-1} + qk_1) \end{cases}$$

- Euler modificado ($c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $p=1$, $q=1$)

t_n	k_1	k_2	w_i
0.25	$0.25 \left(-\frac{0.0}{1.0} \right) = 0$	$0.25 \left(-\frac{0+0.25}{1+0} \right) = -0.0625$	$1 + \frac{1}{2}(0 - 0.0645) = 0.9688$
0.50	$0.25 \left(-\frac{0.25}{0.9688} \right) = -0.0645$	$0.25 \left(-\frac{0.25+0.25}{0.9688-0.0645} \right) = -0.1382$	$0.9688 + \frac{1}{2}(-0.0645 - 0.1382) = 0.8674$
0.75	$0.25 \left(-\frac{0.50}{0.8674} \right) = -0.1441$	$0.25 \left(-\frac{0.50+0.25}{0.8674-0.1441} \right) = -0.2592$	$0.8674 + \frac{1}{2}(-0.1441 - 0.2592) = 0.6657$
0.75	$0.25 \left(-\frac{0.75}{0.6657} \right) = -0.2817$	$0.25 \left(-\frac{0.75+0.25}{0.6657-0.2817} \right) = -0.6510$	$0.6657 + \frac{1}{2}(-0.2817 - 0.6510) = 0.1994$

- Punto medio ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$)

t_n	k_1	k_2	w_i
0.25	$0.25 \left(-\frac{0.0}{1.0} \right) = 0$	$0.25 \left(-\frac{0+0.25 \times 0.5}{1+0} \right) = -0.0313$	$1 + (-0.0313) = 0.9688$
0.50	$0.25 \left(-\frac{0.25}{0.9688} \right) = -0.0645$	$0.25 \left(-\frac{0.25+0.25 \times 0.5}{0.9688-0.0645 \times 0.5} \right) = -0.1001$	$0.9688 + (-0.1001) = 0.8686$
0.75	$0.25 \left(-\frac{0.50}{0.8686} \right) = -0.1439$	$0.25 \left(-\frac{0.50+0.25 \times 0.5}{0.8686-0.1439 \times 0.5} \right) = -0.1961$	$0.8686 + (-0.1961) = 0.6725$
0.75	$0.25 \left(-\frac{0.75}{0.6725} \right) = -0.2788$	$0.25 \left(-\frac{0.75+0.25 \times 0.5}{0.6725-0.2788 \times 0.5} \right) = -0.4103$	$0.6725 + (-0.4103) = 0.2622$

- Heun ($c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{3}{4}$, $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{2}{3}$)

t_n	k_1	k_2	w_i
0.25	$0.25 \left(-\frac{0.0}{1.0} \right) = 0$	$0.25 \left(-\frac{0+\frac{2}{3} \times 0.25}{1+\frac{2}{3} \times 0} \right) = -0.0417$	$1 + \frac{1}{4}(0 + 0.0417 \times 3) = 0.9688$
0.50	$0.25 \left(-\frac{0.25}{0.9688} \right) = -0.0645$	$0.25 \left(-\frac{0.25+\frac{2}{3} \times 0.25}{0.9688-\frac{2}{3} \times 0.0645} \right) = -0.1125$	$0.9688 + \frac{1}{4}(-0.0645 - 0.1125 \times 3) = 0.8682$
0.75	$0.25 \left(-\frac{0.50}{0.8682} \right) = -0.1440$	$0.25 \left(-\frac{0.50+\frac{2}{3} \times 0.25}{0.8682-\frac{2}{3} \times 0.1440} \right) = -0.2158$	$0.8682 + \frac{1}{4}(-0.1440 - 0.2158 \times 3) = 0.6704$
0.75	$0.25 \left(-\frac{0.75}{0.6704} \right) = -0.2797$	$0.25 \left(-\frac{0.75+\frac{2}{3} \times 0.25}{0.6704-\frac{2}{3} \times 0.2797} \right) = -0.4736$	$0.6704 + \frac{1}{4}(-0.2797 - 0.4736 \times 3) = 0.2453$



Ejemplo (orden > 2): $y' = -\frac{t}{y}$ $0 \leq t \leq 1$ $y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$

📁 Motivación

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

📁 Bibliografía

t_n	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	w_n
0.25	0.0000	-0.0313	-0.0667				0.9681
0.50	-0.0646	-0.1002	-0.1502				0.8655
0.75	-0.1444	-0.1970	-0.3044				0.6594
1.00	-0.2844	-0.4230	-2.5571				-0.0962
0.25	0.0000	-0.0313	-0.0317	-0.0645			0.9682
0.50	-0.0645	-0.1002	-0.1021	-0.1443			0.8669
0.75	-0.1443	-0.1968	-0.2036	-0.2830			0.6613
1.00	-0.2835	-0.4210	-0.4852	-1.4199			0.0753
0.25	0.0000	-0.0156	-0.0157	-0.0315	-0.0477	-0.0646	0.9682
0.50	-0.0645	-0.0821	-0.0822	-0.1011	-0.1216	-0.1444	0.8660
0.75	-0.1443	-0.1694	-0.1701	-0.2002	-0.2366	-0.2838	0.6614
1.00	-0.2835	-0.3440	-0.3484	-0.4510	-0.6610	-2.3779	0.0354

y	E_{RK3}	E_{RK4}	E_{RK6}
0.9682	1.903×10^{-4}	2.711×10^{-6}	1.518×10^{-7}
0.8660	5.524×10^{-4}	1.706×10^{-5}	6.660×10^{-7}
0.6614	2.085×10^{-3}	1.218×10^{-4}	7.552×10^{-6}
0.0000	9.621×10^{-2}	7.531×10^{-2}	3.539×10^{-2}



Ejemplo (graficas): $y' = -\frac{t}{y}$ $0 \leq t \leq 1$ $y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

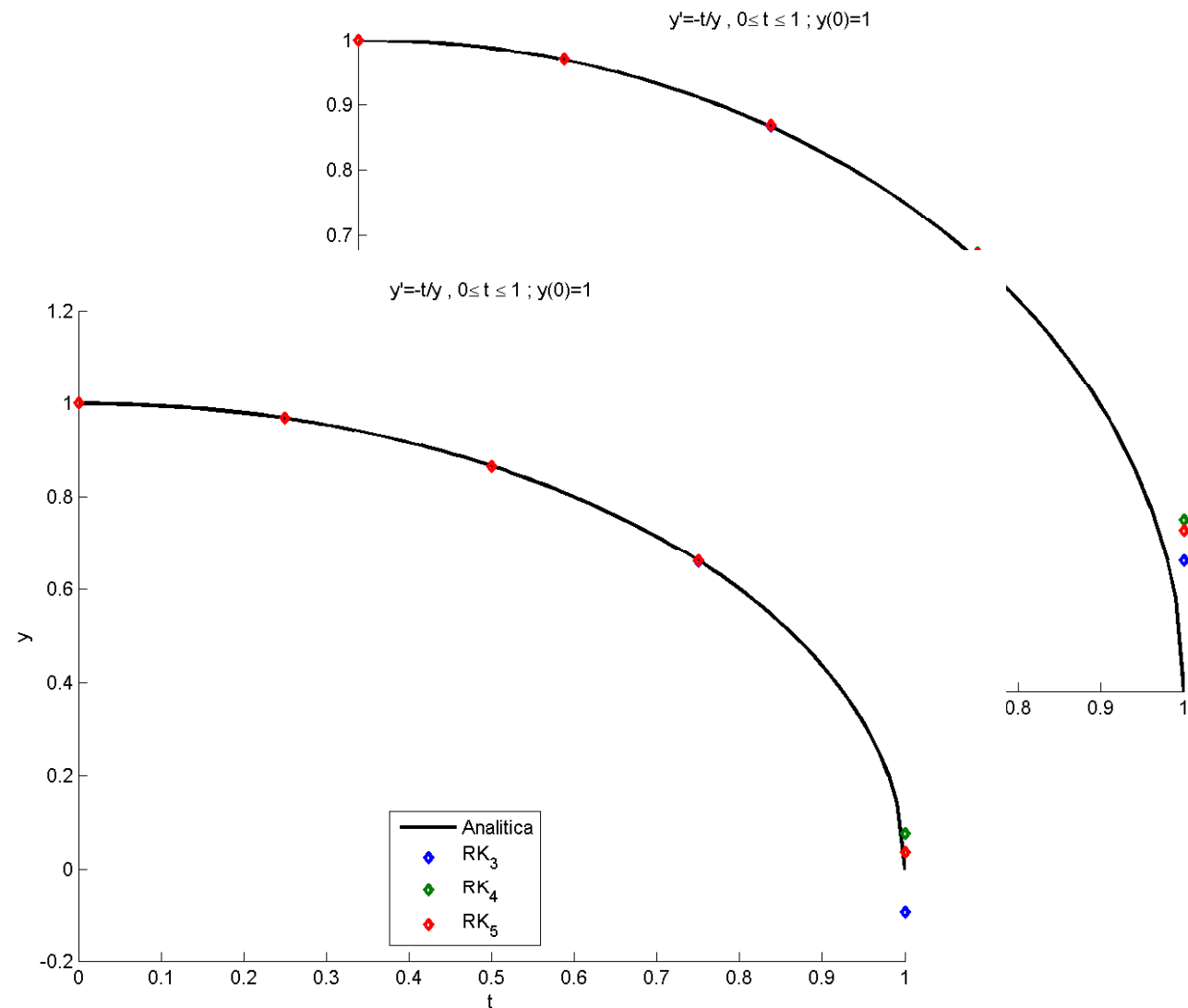
Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía





Runge Kutta adaptativos

📁 Motivación

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

📁 Bibliografía

- El tamaño de paso depende de la estimación del error de truncamiento local δ_{actual}
- Algoritmo
 - Obtener el valor de w_{n+1} de dos formas diferentes
 - Estimar a partir de ambas δ_{actual}
 - Comparar δ_{actual} con la tolerancia δ
 - $\delta_{\text{actual}} \geq \delta \rightarrow$ Estimación de w_{n+1} inválida, modificar h y repetir el proceso
 - $\delta_{\text{actual}} < \delta \rightarrow$ Estimación de w_{n+1} válida, modificar h y calcular el nuevo término
- Selección de la tolerancia
 - Error absoluto $\delta = \varepsilon$
 - Error relativo $\delta = \varepsilon y_{\text{escala}}$ donde $y_{\text{escala}} = |y| + |hy'|$
- Obtención de w
 - RK del mismo orden con mitad de paso
 - Combinar dos métodos RK de orden n y $n+1$



📁 Motivación

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

📁 Bibliografía

Adaptación del tamaño del paso

• Métodos

- RK mismo orden con semipaso (RK4)

$$\delta_{actual} = \left| \tau_{2n} \left(\frac{h}{2} \right) \right| \approx \frac{1}{15h} \left(w_{2n} \left(\frac{h}{2} \right) - w_n(h) \right)$$

$$q = \sqrt[4]{\frac{15h\delta}{\left| w_{2n} \left(\frac{h}{2} \right) - w_n(h) \right|}}$$

- Combinación de RK de orden k y (k+1)

$$\delta_{actual} = \tau_{n+1}^k(h) = \frac{1}{h} \left| w_{n+1}^{k+1} - w_{n+1}^k \right|$$

$$q = \sqrt[k]{\frac{\delta h}{\left| w_{n+1}^{k+1} - w_{n+1}^k \right|}}$$

[Demo](#)

[Demo](#)

• Modificación de h:

- La modificación viene dada por
- A efectos prácticos, se imponen $h_{nuevo} = qh_{antiguo}$ cotas superiores e inferiores al tamaño del paso, así como porcentajes máximos y mínimos de variación

$$- \begin{cases} q < \Delta h_{\min} & h_{nuevo} = h \cdot \Delta h_{\min} \\ \Delta h_{\min} \leq q \leq \Delta h_{\max} & h_{nuevo} = qh \\ q > \Delta h_{\max} & h_{nuevo} = h \cdot \Delta h_{\max} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} h_{nuevo} < h_{\min} & h_{nuevo} = h_{\min} \\ h_{nuevo} > h_{\max} & h_{nuevo} = h_{\max} \\ w_k + h_{nuevo} > b & h_{nuevo} = w_k - b \end{cases}$$



Runge Kutta Adaptativos de orden bajo

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

• RK 1-2 (Euler-Heun)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$$y_{n+1} = y_n + k_1$$

$$z_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(t_n + h, y_n + k_1)$$

• RK 2-3 (Bogacki-Shampine)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	
$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{2}{9}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{4}{9}k_3\right)$$

$$z_{n+1} = y_n + \left(\frac{7}{24}k_1 + \frac{1}{4}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{8}k_4\right)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(t_n + h, y_n + \frac{2}{9}k_1 + \frac{3}{9}k_2 + \frac{4}{9}k_3\right)$$



Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

Runge Kutta Adaptativos de orden 4-5

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$			
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$		
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$
$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	
$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$

Felhberg

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$				
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$			
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$		
1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$	
$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$
$\frac{37}{378}$	0	$\frac{250}{621}$	$\frac{125}{594}$	0	$\frac{512}{1771}$
$\frac{2825}{27648}$	0	$\frac{18575}{48384}$	$\frac{13525}{55296}$	$\frac{277}{14336}$	$\frac{1}{4}$

Cash-Karp

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$				
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$			
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$		
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$	
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$
$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$
$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$
					$\frac{1}{40}$

Dormand-Prince



Adaptación del tamaño del paso: Ejemplo 1

- Runge Kutta de orden 4 $y' = -\frac{t}{y}$ $0 \leq t \leq 1$ $y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$
 - Estimación del error

$$\delta_{actual} = \left| \tau_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) \right| \approx \frac{1}{15h} \left(w_{2n}\left(\frac{h}{2}\right) - w_n(h) \right)$$
 - Error de truncamiento local: 0.005
 - Paso máximo, mínimo e inicial: 0.5 ,0.001 y 0.25
 - Factor de incremento y decremento del paso: 1.25 y 0.75

Tiempo	h	w(h/2)	w(h)	delta
0.0000E+000	2.5000E-001	9.6825E-001	9.6824E-001	6.7509E-007
2.5000E-001	3.1250E-001	8.2679E-001	8.2675E-001	1.0205E-005
5.6250E-001	3.9063E-001	3.0130E-001	2.9922E-001	3.5360E-004
9.5313E-001	4.6875E-002	1.2798E-002	2.6336E-002	1.9253E-002
9.5313E-001	3.5156E-002	1.5003E-001	1.4982E-001	4.0881E-004
9.8828E-001	1.1719E-002	-2.0621E-002	-6.7033E-004	1.1350E-001
9.8828E-001	8.7891E-003	7.1107E-002	7.0990E-002	8.8438E-004
9.9707E-001	2.9297E-003	1.4752E-002	-2.5657E-001	6.1741E+000
9.9707E-001	2.1973E-003	2.5827E-002	2.5768E-002	1.7730E-003
9.9927E-001	7.3242E-004	2.1298E-002	4.3152E-002	1.9893E+000

Warning: Alcanzado el valor mínimo del paso

Ultimo paso: $t_{fin} - t_n$

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía



Adaptación del tamaño del paso: Ejemplo 2

- Runge-Kutta-Fehlberg: RK5 – RK4

- Estimación del error

$$\delta_{actual} = \tau_{n+1}^4(h) = \frac{1}{h} |w_{n+1}^5 - w_{n+1}^4|$$

- Error de truncamiento local: 0.005
- Paso máximo, mínimo e inicial: 0.5 ,0.001 y 0.25
- Factor de incremento y decremento del paso: 1.25 y 0.75

Tiempo	h	w5(h)	w4(h)	delta
0.0000E+000	2.5000E-001	9.6825E-001	9.6825E-001	2.0317E-007
2.5000E-001	3.1250E-001	8.2680E-001	8.2680E-001	8.5413E-006
5.6250E-001	3.9063E-001	3.0194E-001	3.0167E-001	6.9758E-004
9.5313E-001	4.6875E-002	2.7866E-002	2.7414E-002	9.6444E-003
9.5313E-001	3.5156E-002	1.5137E-001	1.5137E-001	3.1537E-005
9.8828E-001	1.1719E-002	7.5700E-003	7.3305E-003	2.0436E-002
9.8828E-001	8.7891E-003	7.3901E-002	7.3901E-002	1.1025E-005
9.9707E-001	2.9297E-003	-1.5090E-002	-1.4923E-002	5.6798E-002
9.9707E-001	2.1973E-003	3.2772E-002	3.2770E-002	9.4326E-004
9.9927E-001	7.3242E-004	1.0766E-001	1.1234E-001	6.3835E+000

Warning: Alcanzado el valor mínimo del paso

Ultimo paso: $t_{fin} - t_n$

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía



Fundamentos

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Predictor-Corrector

- Paso variable

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \rightarrow \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \rightarrow$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

$$w_{n+1} = w_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t) dt \quad \text{donde } P(t) \text{ es un polinomio de interpolación}$$

- Un método multipaso de paso m (con $m > 1$) para resolver la EDO anterior es aquel cuya ecuación en diferencias para obtener la aproximación en t_{n+1} se puede representar mediante

$$w_{i+1} = \sum_{k=1}^m a_k w_{(i+1)-k} + h \sum_{k=0}^m b_k f(t_{(i+1)-k}, w_{(i+1)-k})$$

donde los valores a_k y b_k son constantes y se dispone de los valores iniciales w_k .

- Si $b_0 = 0$ se denomina explícito: el siguiente término se calcula directamente (Adams-Bashford)
- Si $b_0 \neq 0$ se denomina implícito: es necesario resolver una ecuación no lineal para obtener la aproximación (Adams-Moulton)
- Inconvenientes:
 - Necesita valores iniciales que deben obtenerse mediante otros métodos
 - Existen dificultades cuando se plantea con paso variable (se deben recalcular los pasos anteriores)
 - Problemas de convergencia en los métodos implícitos



Obtención de métodos (I)

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Predictor-Corrector

- Paso variable

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- Adams Bashford (explícitas o abiertas)

$$w_{n+1} = w_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t) dt \quad \text{con} \quad P_{m-1}(t) \leftarrow \left\{ t_{(i+1)-k}, f(t_{(i+1)-k}, w_{(i+1)-k}) \right\}_{k=1}^m$$

$$f(t, y(t)) = P_{m-1}(t) + \frac{f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))}{m!} (t - t_i)(t - t_{i-1}) \cdots (t - t_{i+1-m})$$

- El método de Adams Bashford con paso coincide con método de Euler

- Adams Moulton (implícitas o cerradas)

$$w_{n+1} = w_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t) dt \quad \text{con} \quad P_{m-1}(t) \leftarrow \left\{ t_{(i+1)-k}, f(t_{(i+1)-k}, w_{(i+1)-k}) \right\}_{k=0}^m$$

$$f(t, y(t)) = P_m(t) + \frac{f^{(m+1)}(\xi_i, y(\xi_i))}{(m+1)!} (t - t_{i+1})(t - t_i)(t - t_{i-1}) \cdots (t - t_{i+1-m})$$

- El error de truncamiento local de un método multipaso

$$w_{i+1} = \sum_{k=1}^m a_k w_{(i+1)-k} + h \sum_{k=0}^m b_k f(t_{(i+1)-k}, w_{(i+1)-k})$$

viene dado por

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - \sum_{k=1}^m a_k y(t_{(i+1)-k})}{h} + \sum_{k=0}^m b_k f(t_{(i+1)-k}, w_{(i+1)-k})$$



Obtención de métodos (II)

- Adams Bashford de n pasos

n	Formula	$\tau_{i+1}(h)$
2	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}h \left[3f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) \right]$	$\frac{5}{12}h^2 y'''(\mu)$
3	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{12}h \left[23f(t_i, w_i) - 16f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, w_{i-2}) \right]$	$\frac{3}{8}h^3 y^{iv}(\mu)$
4	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{24}h \left[55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3}) \right]$	$\frac{251}{720}h^4 y^v(\mu)$
5	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{720}h \left[1901f(t_i, w_i) - 2774f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2616f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 1274f(t_{i-3}, w_{i-3}) + 251f(t_{i-4}, w_{i-4}) \right]$	$\frac{95}{288}h^5 y^{vi}(\mu)$

- Adams Moulton de n pasos

n	Fórmula	$\tau_{i+1}(h)$
1	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}h \left[f(t_{i+1}, w_{i+1}) + f(t_i, w_i) \right]$	$\frac{-1}{12}h^2 y'''(\mu)$
2	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{12}h \left[5f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 8f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) \right]$	$\frac{1}{-24}h^3 y^{iv}(\mu)$
3	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{24}h \left[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2}) \right]$	$\frac{-19}{720}h^4 y^v(\mu)$
4	$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{720}h \left[251f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 646f(t_i, w_i) - 264f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 106f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 19f(t_{i-3}, w_{i-3}) \right]$	$\frac{-3}{160}h^5 y^{vi}(\mu)$

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Predictor-Corrector

- Paso variable

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

**Ejemplo multipaso**

$$y' = -\frac{t}{y} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$$

Motivación
Objetivos
Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Predictor-Corrector

- Paso variable

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- Se utiliza Runge Kutta de orden 4 para arrancar el método y se toma $h=0.25$

$$w_0 = 1 \quad w_1^{RK4} = 0.9682$$

- Adams Bashford de 2 pasos

$$w_2 = w_1 + \frac{1}{2}h \left[3f(t_1, w_1) - f(t_0, w_0) \right] = 0.9682 + \frac{1}{2}0.25 \left[3 \frac{-0.25}{0.9682} - \frac{-0}{1} \right] = 0.8714$$

$$w_3 = w_2 + \frac{1}{2}h \left[3f(t_2, w_2) - f(t_1, w_1) \right] = 0.8714 + \frac{1}{2}0.25 \left[3 \frac{-0.5}{0.8714} - \frac{-0.25}{0.9682} \right] = 0.6885$$

$$w_4 = w_3 + \frac{1}{2}h \left[3f(t_3, w_3) - f(t_2, w_2) \right] = 0.6885 + \frac{1}{2}0.25 \left[3 \frac{-0.75}{0.6885} - \frac{-0.5}{0.8714} \right] = 0.3518$$

- Adams Moulton de 1 paso $w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}h \left[f(t_{i+1}, w_{i+1}) + f(t_i, w_i) \right]$

$$w_1 = 1 + \frac{1}{2}0.25 \left[\frac{-0.25}{w_1} + \frac{-0}{1} \right] \rightarrow w_1 = 1 + 0.125 \frac{-0.25}{w_1} \Rightarrow w_1 = 0.9677 \{ 0.0322 \}$$

$$w_2 = 0.9677 + \frac{1}{2}0.25 \left[\frac{-0.5}{w_2} + \frac{-0.25}{0.9677} \right] \rightarrow w_2 = 0.9677 + 0.125 \left(\frac{-0.5}{w_2} - 0.2583 \right) \Rightarrow w_2 = 0.8630 \{ 0.0724 \}$$

$$w_3 = 0.8630 + \frac{1}{2}0.25 \left[\frac{-0.75}{w_3} + \frac{-0.5}{0.8630} \right] \rightarrow w_3 = 0.8630 + 0.125 \left(\frac{-0.75}{w_3} - 0.5794 \right) \Rightarrow w_3 = 0.6453 \{ 0.1452 \}$$

$$w_4 = 0.6453 + \frac{1}{2}0.25 \left[\frac{-1.0}{w_4} + \frac{-0.75}{0.6453} \right] \rightarrow w_4 = 0.6453 + 0.125 \left(\frac{-1.0}{w_4} - 0.1623 \right) \Rightarrow w_4 = \{ 0.25 \pm 0.25i \}$$

- Adams Moulton de 2 pasos $w_{i+1} = w_i + \frac{1}{12}h \left[5f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 8f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) \right]$

$$w_1 = w_1^{RK4} = 0.9682$$

$$w_2 = 0.9682 + \frac{1}{12}0.25 \left[5 \frac{-0.5}{w_2} + 8 \frac{-0.25}{0.9682} - \frac{-0.00}{1.000} \right] \rightarrow w_2 = 0.9682 + 0.0208 \left(\frac{-2.5}{w_2} - 2.0656 \right) \Rightarrow w_2 = 0.8650 \{ 0.0602 \}$$

$$w_3 = 0.8650 + \frac{1}{12}0.25 \left[5 \frac{-0.75}{w_3} + 8 \frac{-0.5}{0.8650} - \frac{-0.25}{0.9682} \right] \rightarrow w_3 = 0.8650 + 0.0208 \left(\frac{-3.75}{w_3} - 4.3661 \right) \Rightarrow w_3 = 0.6547 \{ 0.1193 \}$$

$$w_4 = 0.6547 + \frac{1}{12}0.25 \left[5 \frac{-1.0}{w_4} + 8 \frac{-0.75}{0.6547} - \frac{-0.5}{0.8650} \right] \rightarrow w_4 = 0.6547 + 0.0208 \left(\frac{-5.0}{w_4} - 8.5862 \right) \Rightarrow w_4 = \{ 0.2379 \pm 0.2181i \}$$



Predictor corrector

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Predictor-Corrector

- Paso variable

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- Los métodos implícitos no se plantean directamente debido a sus dificultades.
- Se usan para mejorar los resultados obtenidos por un método explícito
 - Explícito: predictor
 - Implícito: corrector
- Ejemplo: predictor corrector de 2º orden (truncamiento local h^2) con $h=0.25$

$$y' = -\frac{t}{y} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad y(0) = 1 \rightarrow Y(t) = \sqrt{1-t^2}$$

$$\text{predictor} \quad w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}h \left[3f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) \right]$$

$$\text{corrector} \quad w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}h \left[f(t_{i+1}, w_{i+1}) + f(t_i, w_i) \right]$$

$$w_1 = w_1^{RK4} = 0.9682$$

$$w_2^p = 0.9682 + \frac{1}{2}0.25 \left[3 \frac{-0.25}{0.9682} - \frac{-0}{1} \right] = 0.8714 \quad w_2^c = 0.9682 + \frac{1}{2}0.25 \left[\frac{-0.5}{0.8714} + \frac{-0.25}{0.9677} \right] = 0.8642$$

$$w_3^p = 0.8642 + \frac{1}{2}0.25 \left[3 \frac{-0.50}{0.8642} - \frac{-0.25}{0.9682} \right] = 0.6796 \quad w_3^c = 0.8642 + \frac{1}{2}0.25 \left[\frac{-0.75}{0.6796} + \frac{-0.5}{0.8642} \right] = 0.6540$$

$$w_4^p = 0.6540 + \frac{1}{2}0.25 \left[3 \frac{-0.75}{0.6540} - \frac{-0.50}{0.8642} \right] = 0.2962 \quad w_4^c = 0.6540 + \frac{1}{2}0.25 \left[\frac{-1.0}{0.2962} + \frac{-0.75}{0.6540} \right] = 0.0886$$



Representación

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Predictor-Corrector

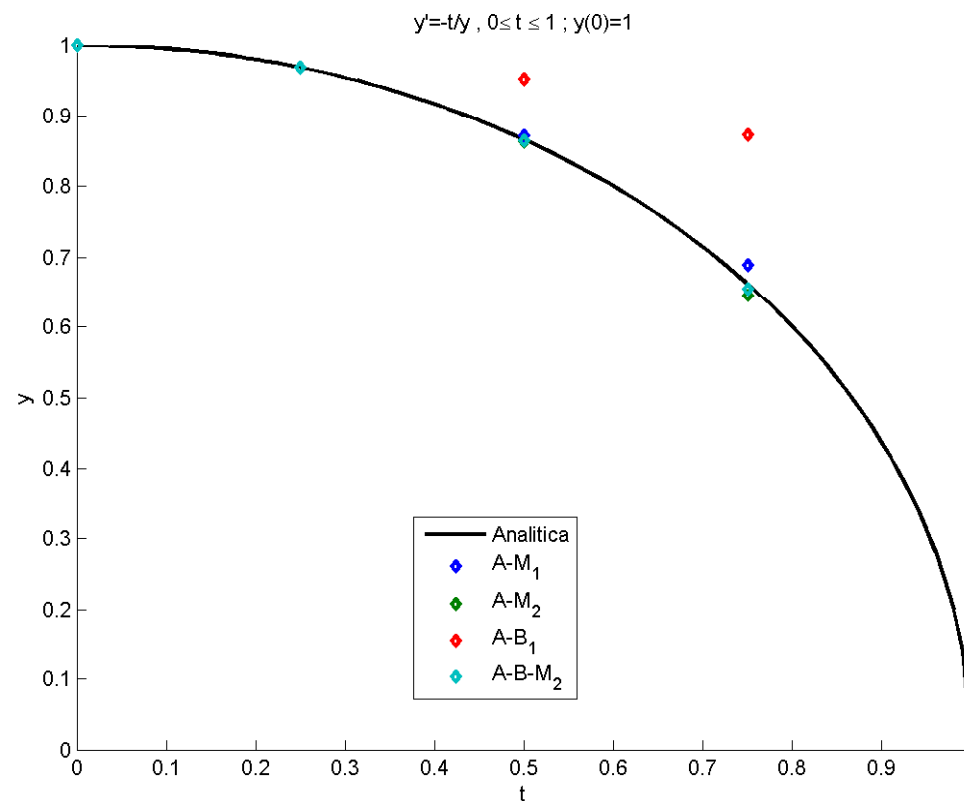
- Paso variable

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía





Representación

📁 Motivación

📁 Objetivos

📁 Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

- *Fundamentos*

- *Obtención y casos*

- *Predictor-Corrector*

- *Paso variable*

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

📁 Bibliografía



Ejemplo: Comparativa (I)

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

	$t_0=0.00$	$t_1=0.25$	$t_2=0.50$	$t_3=0.75$	$t_4=1.00$
Exacta	1.0000	0.9682	0.8660	0.6614	0.0000
Taylor (1)	1.0000	1.0000	0.9375	0.8042	0.5710
Taylor (2)	1.0000	0.9688	0.8698	0.6783	0.2995
Taylor (3)	1.0000	0.9688	0.8675	0.6675	0.2361
Taylor (4)	1.0000	0.9683	0.8662	0.6631	0.1990
R-K (2) Euler	1.0000	0.9688	0.8674	0.6657	0.1994
R-K (2) P.Medio	1.0000	0.9688	0.8682	0.6725	0.2622
R-K (2) Heun	1.0000	0.9688	0.8682	0.6704	0.2453
R-K (3)	1.0000	0.9681	0.8655	0.6594	-0.0962
R-K (4)	1.0000	0.9682	0.8660	0.6613	0.0753
R-K (5)	1.0000	0.9682	0.8660	0.6614	0.0354
A-Bashford (2)	1.0000	0.9682	0.8714	0.6885	0.3518
A-Moulton (1)	1.0000	0.9677	0.8630	0.6453	?
A-Moulton (2)	1.0000	0.9682	0.8650	0.6547	?
A-B(2)-M(1)	1.0000	0.9682	0.8642	0.6540	0.0886



Ejemplo: Comparativa de errores(II)

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

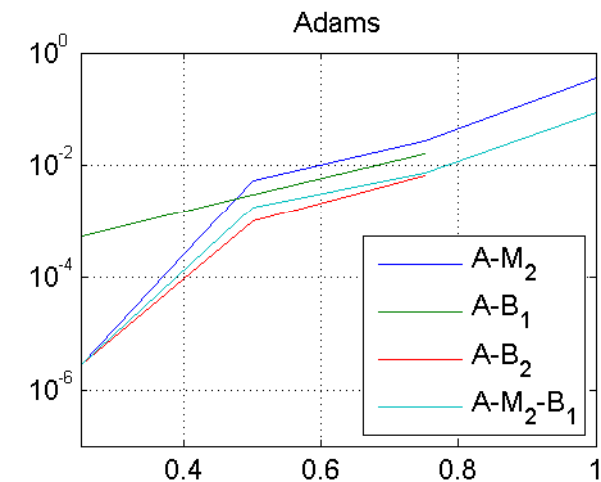
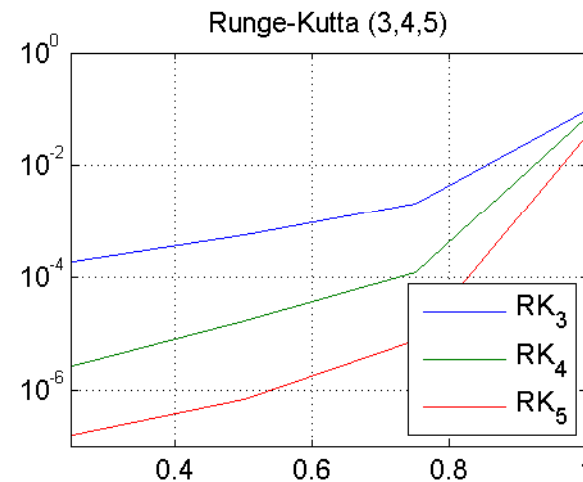
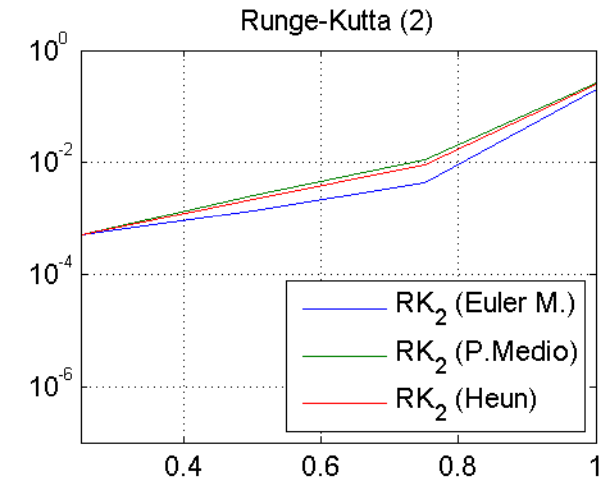
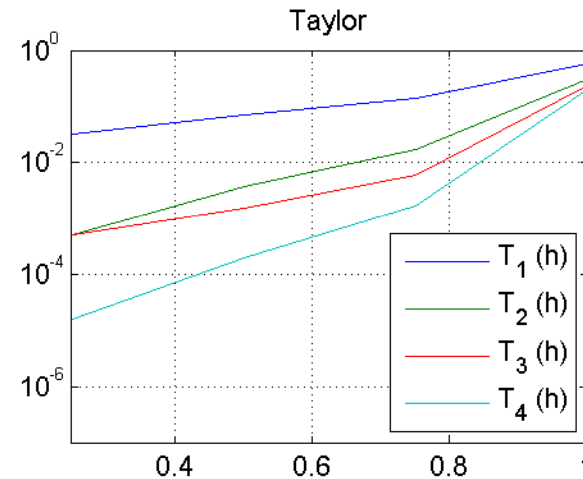
Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía





Fundamento

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- Dada la EDO
$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

¿Qué condición debe cumplir para que el método de Euler sea estable? ¿Y convergente?

Sistema rígido es aquel cuya solución combina componentes con variación muy rápida (habitualmente transitorios), con otros de variación lenta (que determinan el régimen permanente).

- Los fenómenos transitorios pueden determinar el tamaño del paso para toda la solución



Fundamento

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- Sistema rígido es aquel cuya solución combina componentes con variación muy rápida (habitualmente transitorios), con otros de variación lenta (que determinan el régimen permanente).
- Los fenómenos transitorios pueden determinar el tamaño del paso para toda la solución

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{5}h, y_n + \frac{1}{5}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{3}{10}h, y_n + \frac{3}{40}k_1 + \frac{9}{40}k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(t_n + \frac{3}{5}h, y_n + \frac{3}{10}k_1 - \frac{9}{10}k_2 + \frac{6}{5}k_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(t_n + h, y_n - \frac{11}{54}k_1 + \frac{5}{2}k_2 - \frac{70}{27}k_3 + \frac{35}{27}k_4\right)$$

$$k_6 = hf\left(t_n + \frac{7}{8}h, y_n + \frac{1631}{55296}k_1 + \frac{175}{512}k_2 + \frac{575}{13824}k_3 + \frac{44275}{110592}k_4 + \frac{253}{4096}k_5\right)$$



Anexos

- Demostraciones y desarrollos



Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

Runge Kutta de Orden 2

- La expresión del método de orden 2 viene dada por

[Volver](#)

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(h, t_n, y_n) \text{ donde } \varphi(h, t_n, y_n) = c_1 k_1 + c_2 k_2$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) =$$

$$= \left\{ f + \frac{1}{1!}(\alpha h f_t + \beta k_1 f_y) + \frac{1}{2!}(\alpha^2 h^2 f_{tt} + 2\alpha h \beta k_1 f_{ty} + \beta^2 k_1^2 f_{yy}) + o(h^2) \right\} =$$

$$= \left\{ f + \frac{1}{1!}(\alpha h f_t + \beta h f f_y) + \frac{1}{2!}(\alpha^2 h^2 f_{tt} + 2\alpha \beta h^2 f f_{ty} + \beta^2 h^2 f^2 f_{yy}) + o(h^2) \right\} =$$

$$= f + h(\alpha f_t + \beta f f_y) + h^2 \left(\frac{1}{2} \alpha^2 f_{tt} + \alpha \beta f f_{ty} + \frac{1}{2} \beta^2 f^2 f_{yy} \right) + o(h^2)$$

$$y_{n+1} = y_n + (c_1 + c_2)hf + c_2 \left\{ h^2 \left(\alpha f_t + \beta f f_y \right) + h^3 \left(\frac{1}{2} \alpha^2 f_{tt} + \alpha \beta f f_{ty} + \frac{1}{2} \beta^2 f^2 f_{yy} \right) + o(h^3) \right\}$$

- Comparando con el desarrollo de Taylor

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{y'_n}{1!} + h^2 \frac{y''_n}{2!} + h^3 \frac{y'''_n(\xi)}{3!} = y_n + hf \frac{h^2}{2} f' + h^3 \frac{y'''(\xi)}{3!} = y_n + hf + \frac{h^2}{2} \{ f_t + f_y f \} + O(h^3)$$

- Igualando coeficientes se obtiene

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_2 \alpha = c_2 \beta = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{6} \left\{ f_{tt} + 2 f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_y f_t + (f_y)^2 f \right\} = c_2 \left(\frac{1}{2} \alpha^2 f_{tt} + \alpha \beta f f_{ty} + \frac{1}{2} \beta^2 f^2 f_{yy} \right) ?$$

- Familia de soluciones dependientes de un parámetro: Heun, Punto medio, Ralston

$$c_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ c_1 = \frac{1}{2}, \alpha = \beta = 1 \right\} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad k_1 = hf(t_n, y_n) \quad k_2 = hf(t_n + h, y_n + k_1)$$

$$c_2 = 1 \Rightarrow \left\{ c_1 = 0, \alpha = \beta = \frac{1}{2} \right\} \quad y_{n+1} = y_n + k_2 \quad k_1 = hf(t_n, y_n) \quad k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$c_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \left\{ c_1 = \frac{1}{3}, \alpha = \beta = \frac{3}{4} \right\} \quad y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right) \quad k_1 = hf(t_n, y_n) \quad k_2 = hf\left(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}k_1\right)$$



Paso variable: Runge Kutta orden 4

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- Estimación del error

$$\left. \begin{aligned} w_n(h) &= w_{n-1} + h\phi_4(t_{n-1}, w_{n-1}, h) + O(h^4) \\ w_{2n-1}(h/2) &= w_{n-1} + h\phi_4(t_{n-1}, w_{n-1}, h/2) + O(h/2^4) \\ w_{2n}(h/2) &= w_{2n-1}^4 + h\phi_4(t_{n-1} + h/2, w_{2n-1}, h/2) + O(h/2^4) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \tau_n(h) = \frac{y(t_n) - w_n}{h} \\ \tau_{2n}(h/2) = \frac{y(t_n) - w_{2n}(h/2)}{h} \end{cases}$$

- Hipótesis: parte principal del error

$$\tau_n^4(h) = ch^4 + o(h^4) \rightarrow \begin{cases} y(t_n) - w_n(h) = h\tau_n(h) = ch^5 + o(h^5) \\ y(t_n) - w_{2n}(h/2) = h\tau_{2n}(h/2) = c\frac{1}{16}h^5 + o(h^5) \end{cases}$$

$$w_{2n}(h/2) - w_n(h) = ch^5\left(1 - \frac{1}{16}\right) + o(h^5) \Rightarrow c\frac{1}{16}h^5 \approx \frac{1}{15}(w_{2n}(h/2) - w_n(h))$$

$$|\tau_{2n}(h/2)| = \left| \frac{y(t_n) - w_{2n}(h/2)}{h} \right| \approx \frac{1}{15h}(w_{2n}(h/2) - w_n(h))$$



Paso variable: Runge Kutta Fehlberg

Motivación

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Euler y Taylor

Mét. Runge-Kutta

- Fundamentos

- Obtención y casos

- Paso variable

Mét. Multipaso

EDOs orden superior

Estabilidad

EDOs rígidas

Bibliografía

- Estimación del error
$$\left. \begin{aligned} w_{n+1}^4 &= w_n + h\phi_4(t_n, w_n, h) + O(h^4) \\ w_{n+1}^5 &= w_n + h\phi_5(t_n, w_n, h) + O(h^5) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \tau_{n+1}^4(h) = \frac{y(t_{n+1}) - w_{n+1}^4}{h} \\ \tau_{n+1}^5(h) = \frac{y(t_{n+1}) - w_{n+1}^5}{h} \end{cases}$$
$$\tau_{n+1}^4(h) = \frac{1}{h}(y(t_{n+1}) - w_{n+1}^4) = \tau_{n+1}^5(h) + \frac{1}{h}(w_{n+1}^5 - w_{n+1}^4) \approx \frac{1}{h}(w_{n+1}^5 - w_{n+1}^4)$$
- Hipótesis: parte principal del error
$$\tau_{n+1}^4(h) = ch^4 + o(h^4) \rightarrow \tau_{n+1}^4(qh) \approx c(qh)^4 = q^4 \tau_{n+1}^4(h) \approx q^4 \frac{1}{h}(w_{n+1}^5 - w_{n+1}^4)$$
- Cálculo del nuevo tamaño del paso

$$q^4 \frac{1}{h} |w_{n+1}^5 - w_{n+1}^4| < \delta \rightarrow q < \sqrt[4]{\frac{\delta h}{|w_{n+1}^5 - w_{n+1}^4|}}$$