

# METODOS NUMERICOS

## E.U.I.T. INFORMATICA DE OVIEDO. 05-06

### 4. INTEGRACION NUMERICA

1) Supongamos que la fórmula de integración numérica

$$\int_{-2}^2 f(x) dx \cong A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

es de tipo interpolatorio. Determinar los coeficientes (pesos) de la fórmula utilizando las condiciones del grado de precisión. ¿Cuál es el grado de precisión de dicha fórmula?. Razónese la respuesta.

Solución:

Sabemos que una fórmula de cuadratura con  $n + 1$  nodos es de tipo interpolatorio  $\Leftrightarrow$  tiene grado de precisión al menos  $n$ . En este caso la fórmula tiene tres nodos; por tanto ha de tener grado de precisión al menos dos, es decir, ha de ser exacta para  $f(x) = 1$ ,  $f(x) = x$ ,  $f(x) = x^2$ .

$$\text{exacta para } f(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-2}^2 dx = A_0 + A_1 + A_2$$

$$\text{exacta para } f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-2}^2 x dx = -A_0 + A_2$$

$$\text{exacta para } f(x) = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-2}^2 x^2 dx = A_0 + A_2$$

Resulta:

$$A_0 + A_1 + A_2 = 4$$

$$A_2 - A_0 = 0$$

$$A_0 + A_2 = \frac{16}{3}$$

$$A_0 = A_2 = \frac{8}{3}$$

$$A_1 = -\frac{4}{3}$$

$$\int_{-2}^2 f(x) dx \cong \frac{8}{3} f(-1) - \frac{4}{3} f(0) + \frac{8}{3} f(1)$$

Veamos si es exacta para  $f(x) = x^3$

$$\int_{-2}^2 x^3 dx = 0, \quad \frac{8}{3}(-1)^3 - 0 + \frac{8}{3}(1)^3 = 0$$

Por tanto, es exacta para  $f(x) = x^3$ . ¿lo es para  $f(x) = x^4$ ?

$$\int_{-2}^2 x^4 dx = 2 \int_0^2 x^4 dx = \frac{64}{5}, \quad \frac{8}{3}(-1)^4 - 0 + \frac{8}{3}(1)^4 = \frac{16}{3}$$

No lo es para  $f(x) = x^4$ . Así pues, el grado de precisión es tres.

Nota: Es la fórmula de Newton-Cotes abierta con tres nodos en el intervalo  $[-2, 2]$ .

- 2) Calcular los nodos y los pesos de la fórmula de Newton-Cotes abierta con dos nodos para el intervalo  $[-1,1]$ . Determinar su grado de precisión.

Solución:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \cong A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

$$-1 \quad x_0 \quad x_1 \quad 1 \quad h = \frac{2}{3}. \text{ Por tanto los nodos son: } x_0 = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}, \quad x_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \cong A_0 f\left(-\frac{1}{3}\right) + A_1 f\left(\frac{1}{3}\right)$$

Para obtener los pesos de la fórmula tengamos en cuenta que para ser una fórmula de Newton-Cotes ha de ser de tipo interpolatorio o lo que es lo mismo ha de tener grado de precisión al menos uno, es decir, ha de ser exacta para  $f(x) = 1$ ,  $f(x) = x$ .

$$\text{exacta para } f(x) = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 dx = A_0 + A_1$$

$$\text{exacta para } f(x) = x \Leftrightarrow \int_{-1}^1 x dx = -\frac{1}{3}A_0 + \frac{1}{3}A_1$$

Resulta:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 &= 2 \\ -\frac{1}{3}A_0 + \frac{1}{3}A_1 &= 0 \end{aligned} \quad A_0 = A_1 = 1$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \cong f\left(-\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$$

Veamos si es exacta para  $f(x) = x^2$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

No es exacta para  $f(x) = x^2$ . Así pues, el grado de precisión es uno.

3)

- a) Obtener  $x_0$  para que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \cong 2f(x_0)$$

tenga grado de precisión al menos uno. ¿Cuál es su grado de precisión?.

- b) Obtener  $x_0$  y  $x_1$  para que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \cong f(x_0) + f(x_1)$$

tenga grado de precisión al menos dos. ¿Cuál es su grado de precisión?.

c) Usar la fórmula obtenida anteriormente para calcular un valor aproximado de:

$$\int_0^2 (x^2 + 1) dx$$

realizando previamente un cambio de variable adecuado. ¿qué error se comete al aplicar dicha fórmula en este ejercicio?. Justificar la respuesta tanto de manera teórica como mediante el cálculo del valor exacto de la integral.

Solución:

a)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong 2f(x_0)$$

tiene grado de precisión al menos uno  $\Leftrightarrow$  : es exacta para  $f(x) = 1$ ,  $f(x) = x$

$$\text{exacta para } f(x) = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 dx = 2$$

$$\text{exacta para } f(x) = x \Leftrightarrow \int_{-1}^1 x dx = 2x_0$$

La primera igualdad se verifica trivialmente. La segunda igualdad se verifica  $\Leftrightarrow 0 = 2x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong 2f(0)$$

$$\text{No es exacta para } f(x) = x^2 \text{ ya que } \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad 2 \cdot 0^2 = 0$$

Así pues, el grado de precisión es uno.

Nota: La fórmula anterior es la de Newton-Cotes abierta con un nodo en el intervalo  $[-1, 1]$ .

b)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong f(x_0) + f(x_1)$$

tiene grado de precisión al menos dos  $\Leftrightarrow$  : es exacta para  $f(x) = 1$ ,  $f(x) = x$ ,  $f(x) = x^2$

$$\text{exacta para } f(x) = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 dx = 1 + 1$$

$$\text{exacta para } f(x) = x \Leftrightarrow \int_{-1}^1 x dx = x_0 + x_1$$

$$\text{exacta para } f(x) = x^2 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 x^2 dx = x_0^2 + x_1^2$$

La primera igualdad se verifica trivialmente. De la segunda y tercera igualdad resulta el sistema no lineal:

$$x_0 + x_1 = 0$$

$$x_0^2 + x_1^2 = \frac{2}{3} \quad \text{con solución: } x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \text{ también es solución}$$

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{pero la fórmula es la misma con una u otra solución.}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{es exacta para } f(x) = x^3 \quad \text{ya que } \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \quad \text{y} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = 0$$

$$\text{no es exacta para } f(x) = x^4 \quad \text{ya que } \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{9}$$

Así pues, el grado de precisión es tres.

$$\text{c) } \int_0^2 (x^2 + 1) dx$$

El cambio de variable es de la forma:  $x=at+b$  y tenemos que determinar “a” y “b”.

$$\begin{aligned} \text{Si } x=0 \text{ entonces } t=-1; \text{ si } x=2 \text{ entonces } t=1. \text{ Por tanto} \\ -a+b=0 \\ a+b=2 \end{aligned}$$

Resulta:  $a=1$  y  $b=1$ . Así pues, el cambio de variable es:  $x=t+1$ .

$$\int_0^2 (x^2 + 1) dx \cong \int_{-1}^1 [(t+1)^2 + 1] dt \cong \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + 1 = \frac{14}{3}$$

Al aplicar esta fórmula en este ejercicio no se comete error, es decir, nos da el valor exacto de la integral ya que la fórmula tiene grado de precisión tres y por tanto es exacta, en particular, cuando la función integrando es un polinomio de grado dos como es nuestro caso.

$$\text{Calculemos por Barrow, el valor exacto de la integral, } \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \dots = \frac{14}{3}$$

lo que corrobora que en efecto el error es nulo.

4)

a) Aproximar mediante las reglas del trapecio y de Simpson el valor de la integral

$$I = \int_0^3 (x^3 - 1) dx \quad ,$$

b) Comparar los valores aproximados con el valor exacto. ¿Se podría haber predicho alguno de los errores?.

c) Utilizando la regla de los trapecios compuesta para aproximar I, ¿Qué número de subintervalos sería suficiente para que el error, en valor absoluto, fuese menor que  $10^{-1}$  ?

Solución:

$$\text{a) trapecios} \quad \int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \quad ; \quad \int_0^3 (x^3-1)dx \cong \frac{3}{2}(-1+26) = \frac{75}{2}$$

$$\text{Simpson} \quad \int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

$$\int_0^3 (x^3-1)dx \cong \frac{3}{6} \left[ -1 + 4\left(\frac{27}{8}-1\right) + 26 \right] = \frac{69}{4}$$

$$\text{b)} \quad \int_0^3 (x^3-1)dx = \left[ \frac{x^4}{4} - x \right]_0^3 = \frac{81}{4} - 3 = \frac{69}{4} \quad \text{valor exacto}$$

El error de la fórmula de Simpson es cero; esto ya se podría haber predicho pues dicha fórmula tiene grado de precisión tres y en este caso el integrando es un polinomio de grado tres.

$$\text{c)} \quad E_n^T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) \quad , \quad c \in (a,b) \quad ; \quad E_n^T = -\frac{27}{12n^2} f''(c) \quad , \quad c \in (0,3)$$

$$f(x) = x^3 - 1 \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 \quad ; \quad f''(x) = 6x$$

$$E_n^T = -\frac{27}{12n^2} 6c = -\frac{27}{2n^2} c \quad , \quad c \in (0,3) \quad ; \quad |E_n^T| = \frac{27}{2n^2} c < \frac{27}{2n^2} 3 = \frac{81}{2n^2} < 10^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2n^2}{81} > 10 \Leftrightarrow n^2 > 405 \Leftrightarrow n > 20.12 \quad ; \quad \mathbf{n = 21} \text{ subintervalos}$$

$$\text{5) Sea} \quad I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

- Obtener el valor aproximado de la integral mediante la regla del trapecio compuesta con dos subintervalos. Acotar el error en valor absoluto.
- Determinar el número  $n$  de subintervalos de modo que la regla del trapecio compuesta aproxime el valor de  $I$  con un error menor que  $10^{-6}$ .

Solución:

$$\text{a)} \quad T_n = \frac{b-a}{2n} \left[ f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] \quad ; \quad n=2 \quad , \quad a=0 \quad , \quad x_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad b=1$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \cong \frac{1}{4} [e^0 + 2e^{-1/4} + e^{-1}] = 0.73$$

$$\text{de otra forma:} \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^{1/2} e^{-x^2} dx + \int_{1/2}^1 e^{-x^2} dx \cong \frac{1/2}{2} [e^0 + e^{-1/4}] + \frac{1/2}{2} [e^{-1/4} + e^{-1}] = 0.73$$

$$E_n^T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) \quad , \quad c \in (a,b) \quad ; \quad E_2^T = -\frac{1}{48} f''(c) \quad , \quad c \in (0,1)$$

$$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

$$|E_2^T| = \frac{1}{48} |f''(c)| < \frac{M}{48} \quad \text{siendo} \quad M = \sup_{x \in (0,1)} |f''(x)|$$

$$f'''(x) = 2e^{-x^2}(-2x)(2x^2 - 1) + 2e^{-x^2}4x = 4xe^{-x^2}(3 - 2x^2) > 0 \quad \forall x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow f'' \text{ es creciente en } (0,1)$$

$$|f''(0)| = |-2| = 2 \quad ; \quad |f''(1)| = |2e^{-1}| = \frac{2}{e} \quad . \text{ Por tanto} \quad M = 2$$

$$|E_2^T| < \frac{M}{48} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$$

$$\text{b) } E_n^T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) = -\frac{1}{12n^2} f''(c) \quad , \quad c \in (0,1)$$

$$|E_n^T| = \frac{1}{12n^2} |f''(c)| < \frac{1}{12n^2} M \quad \text{siendo} \quad M = \sup_{x \in (0,1)} |f''(x)|$$

$$|E_n^T| < \frac{1}{12n^2} 2 = \frac{1}{6n^2} < 10^{-6} \Leftrightarrow 6n^2 > 10^6 \Leftrightarrow n > \frac{10^3}{\sqrt{6}} = 408.2 \quad \mathbf{n = 409}$$

- 6) La fórmula de Simpson simple es  $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$ . Obtener la fórmula de Simpson compuesta con  $n$  subintervalos ( $2n+1$  nodos) siendo los nodos:

$$x_i = a + 2ih \quad i = 0, \dots, n \quad , \quad z_i = a + (2i-1)h \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{de tal manera que} \quad h = \frac{b-a}{2n}$$

Solución:

En cada subintervalo de la forma  $[x_i, x_{i+1}]$  se aproxima la función  $f$  mediante la parábola que pasa por los puntos  $(x_i, f(x_i))$ ,  $(z_{i+1}, f(z_{i+1}))$ ,  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$  y resulta :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \cong \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_2(x)dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{6} [f(x_i) + 4f(z_{i+1}) + f(x_{i+1})] \quad .$$

$$\text{Por tanto:} \quad \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{6} [f(x_i) + 4f(z_{i+1}) + f(x_{i+1})] =$$

$$\frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(z_1) + f(x_1) + f(x_1) + 4f(z_2) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) + 4f(z_n) + f(x_n)]$$

$$= \frac{b-a}{6n} \left[ f(a) + 4 \sum_{i=1}^n f(z_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right] = S_n$$

- 7) Es conocido que  $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$  y damos como dato que si  $f$  tiene derivada cuarta continua en  $[a, b]$  entonces el error de la fórmula de Simpson compuesta viene dado por:

$$E_n^S = -\frac{1}{90n^4} (b-a)^5 f^{(4)}(c), \quad c \in (a, b)$$

- a) Aproximar el valor de  $\log 2$  mediante la fórmula de Simpson compuesta que utiliza dos subintervalos (es decir, cinco nodos) y acotar el error en valor absoluto.  
b) Determinar el número total de nodos que serían suficientes para que la fórmula de Simpson compuesta proporcione un valor aproximado de  $\log 2$  con un error menor que una diezmilésima.

Solución:

$$a) \quad S_n = \frac{b-a}{6n} \left[ f(a) + 4 \sum_{i=1}^n f(z_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx &\cong \frac{1}{12} [f(1) + 4(f(5/4) + f(7/4)) + 2f(3/2) + f(2)] = \\ &= \frac{1}{12} \left[ 1 + 4 \left( \frac{4}{5} + \frac{4}{7} \right) + 2 \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right] = 0.69... \end{aligned}$$

de otra manera :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x} dx &= \int_1^{3/2} \frac{1}{x} dx + \int_{3/2}^2 \frac{1}{x} dx \\ &\cong \frac{\frac{3}{2}-1}{6} [f(1) + 4f(5/4) + f(3/2)] + \frac{2-\frac{3}{2}}{6} [f(3/2) + 4f(7/4) + f(2)] = \\ &= \frac{1}{12} [f(1) + 4(f(5/4) + f(7/4)) + 2f(3/2) + f(2)] = 0.69... \end{aligned}$$

$$E_n^S = -\frac{1}{90n^4} (b-a)^5 f^{(4)}(c), \quad c \in (a, b); \quad E_2^S = -\frac{1}{46080} f^{(4)}(c), \quad c \in (1, 2)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(x) = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

$$|E_2^S| = \frac{1}{46080} |f^{(4)}(c)| < \frac{M}{46080} \quad \text{siendo} \quad M = \sup_{x \in (1, 2)} |f^{(4)}(x)|$$

$$f^{(5)}(x) = -\frac{120}{x^6} < 0 \quad \forall x \in (1, 2) \Rightarrow f^{(4)}(x) \text{ es decreciente en } (1, 2)$$

$$|f^{(4)}(1)| = |24| = 24 \quad ; \quad |f^{(4)}(2)| = \left| \frac{24}{32} \right| = \frac{24}{32} \quad . \text{ Por tanto } M = 24$$

$$|E_2^S| < \frac{M}{46080} = \frac{24}{46080} = 0.0005208 < 10^{-3}$$

b)

$$E_n^S = -\frac{1}{90x32xn^4} (b-a)^5 f^{(4)}(c), \quad c \in (a,b)$$

$$E_n^S = -\frac{1}{90x32xn^4} f^{(4)}(c), \quad c \in (1,2) \Rightarrow |E_n^S| = \frac{1}{90x32xn^4} |f^{(4)}(c)|$$

$$|E_n^S| < \frac{M}{90x32xn^4} \quad \text{siendo} \quad M = \sup_{x \in (1,2)} |f^{(4)}(x)| = 24$$

$$|E_n^S| < \frac{24}{90x32xn^4} < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{90x32xn^4}{24} > 10^4 \Leftrightarrow n^4 > 83.3$$

$$n = 4 \quad (\mathbf{9 \text{ nodos}})$$

8)

- a) Si se utiliza la regla de los trapecios compuesta para aproximar el valor de  $I = \int_1^2 \log^2(x) dx$   
¿Qué número de subintervalos sería suficiente elegir para que el error fuese menor que  $10^{-3}$  ?

- b) Calcular un valor aproximado de la integral anterior utilizando la fórmula compuesta para dos subintervalos, obtenida a partir de la fórmula simple de Newon-Cotes abierta con un nodo.

Solución:

a)

$$E_n^T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) = -\frac{1}{12n^2} f''(c), \quad c \in (1,2)$$

$$f(x) = \log^2(x) \Rightarrow f'(x) = 2 \log(x) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^2} (1 - \log(x))$$

$$|E_n^T| = \frac{1}{12n^2} |f''(c)| < \frac{M}{12n^2} \quad \text{siendo} \quad M = \sup_{x \in (1,2)} |f''(x)|$$

$$f'''(x) = -\frac{4}{x^3} (1 - \log(x)) + \frac{2}{x^2} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x^3} (3 - 2 \log(x)) < 0 \quad \forall x \in (1,2)$$

ya que  $2 \log(x) < 2 < 3 \quad \forall x \in (1,2)$

Así pues  $f''(x)$  es decreciente en  $(1,2)$

$$|f''(1)| = |2| = 2 \quad ; \quad |f''(2)| = \left| \frac{2}{4} (1 - \log(2)) \right| < 2 \quad . \quad \text{Por tanto} \quad M = 2$$

$$\left|E_n^T\right| < \frac{M}{12n^2} = \frac{2}{12n^2} = \frac{1}{6n^2} < 10^{-3} \Leftrightarrow 6n^2 > 10^3 \Leftrightarrow n^2 > 166.6$$

$$\mathbf{n = 13}$$

b)

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{Newton-Cotes abierta con un nodo}$$

$$\int_1^2 \log^2(x)dx = \int_1^{1.5} \log^2(x)dx + \int_{1.5}^2 \log^2(x)dx \cong \frac{1}{2} \log^2(1.25) + \frac{1}{2} \log^2(1.75) = 0.181..$$