

METODOS NUMERICOS
E.U.I.T. INFORMATICA DE OVIEDO. 05-06
4. INTEGRACION NUMERICA

- 1) Supongamos que la fórmula de integración numérica

$$\int_{-2}^2 f(x)dx \cong A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

es de tipo interpolatorio. Determinar los coeficientes (pesos) de la fórmula utilizando las condiciones del grado de precisión. ¿Cuál es el grado de precisión de dicha fórmula?. Razónese la respuesta.

- 2) Calcular los nodos y los pesos de la fórmula de Newton-Cotes abierta con dos nodos para el intervalo $[-1,1]$. Determinar su grado de precisión.

3)

- a) Obtener x_0 para que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \cong 2f(x_0)$$

tenga grado de precisión al menos uno. ¿Cuál es su grado de precisión?.

- b) Obtener x_0 y x_1 para que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \cong f(x_0) + f(x_1)$$

tenga grado de precisión al menos dos. ¿Cuál es su grado de precisión?.

- c) Usar la fórmula obtenida anteriormente para calcular un valor aproximado de:

$$\int_0^2 (x^2 + 1)dx$$

realizando previamente un cambio de variable adecuado. ¿qué error se comete al aplicar dicha fórmula en este ejercicio?. Justificar la respuesta tanto de manera teórica como mediante el cálculo del valor exacto de la integral.

4)

- a) Aproximar mediante las reglas del trapecio y de Simpson el valor de la integral

$$I = \int_0^3 (x^3 - 1)dx ,$$

- b) Comparar los valores aproximados con el valor exacto. ¿Se podría haber predicho alguno de los errores?.
- c) Utilizando la regla de los trapecios compuesta para aproximar I, ¿Qué número de subintervalos sería suficiente para que el error, en valor absoluto, fuese menor que 10^{-1} ?

5) Sea $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$

- a) Obtener el valor aproximado de la integral mediante la regla del trapecio compuesta con dos subintervalos. Acotar el error en valor absoluto.
- b) Determinar el número n de subintervalos de modo que la regla del trapecio compuesta aproxime el valor de I con un error menor que 10^{-6} .

- 6) La fórmula de Simpson simple es $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$. Obtener la fórmula de Simpson compuesta con n subintervalos ($2n+1$ nodos) siendo los nodos:

$$x_i = a + 2ih \quad i = 0, \dots, n, \quad z_i = a + (2i-1)h \quad i = 1, \dots, n$$

de tal manera que $h = \frac{b-a}{2n}$

- 7) Es conocido que $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ y damos como dato que si f tiene derivada cuarta continua en $[a, b]$ entonces el error de la fórmula de Simpson compuesta viene dado por:

$$E_n^S = -\frac{1}{90n^4} (b-a)^5 f^{(4)}(c), \quad c \in (a, b)$$

- Aproximar el valor de $\log 2$ mediante la fórmula de Simpson compuesta que utiliza dos subintervalos (es decir, cinco nodos) y acotar el error en valor absoluto.
- Determinar el número total de nodos que serían suficientes para que la fórmula de Simpson compuesta proporcione un valor aproximado de $\log 2$ con un error menor que una diezmilésima.

8)

- Si se utiliza la regla de los trapecios compuesta para aproximar el valor de $I = \int_1^2 \log^2(x) dx$

¿Qué número de subintervalos sería suficiente elegir para que el error fuese menor que 10^{-3} ?

- Calcular un valor aproximado de la integral anterior utilizando la fórmula compuesta para dos subintervalos, obtenida a partir de la fórmula simple de Newton-Cotes abierta con un nodo.

9)

- Encontrar las constantes A_0, A_1, x_1 de modo que la fórmula de cuadratura simple:

$$\int_0^1 f(x) dx \cong A_0 f(0) + A_1 f(x_1)$$

tenga el grado de precisión más alto posible. ¿Cuál es el grado de precisión?. ¿es una fórmula de Newton-Cotes?.

- Realizar un cambio de variable en la integral $\int_0^2 e^{x^2} dx$ para poder utilizar la fórmula obtenida anteriormente y calcular de esa manera una aproximación del valor de dicha integral.
- Calcular un valor aproximado de la integral anterior utilizando la fórmula compuesta para dos subintervalos, obtenida a partir de la fórmula simple de Newton-Cotes abierta con un nodo.