



Titulación: Ingeniero Geólogo
Asignatura: Análisis Numérico
Autor: César Menéndez

Última actualización: 21/12/2009

Integración Numérica

Planificación:

4 Teoría+1 Prácticas+2 Laboratorio

Materiales:

MATLAB

Conocimientos previos:

T^{mas}. básicos de Cálculo –
Desarrollos de Taylor – Sistemas
lineales –



Descripción del problema

Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

- Evaluación de la integral de una función en un intervalo a partir de los valores de la función

- Función muy compleja (difícil de calcular su integral)
- No se conoce la función sino sólo sus valores en algunos puntos
- No existe la primitiva de la función

- Fórmulas de integración numérica

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

- Obtención de los valores de los coeficientes
- Determinación del error cometido



Objetivos

Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

- Comprender la generación las fórmulas de integración numérica de Newton-Cotes.
- Calcular las formulas exactas de Newton-Cotes para polinomios de primer, segundo y tercer grado.
- Entender cómo se aplica el algoritmo de integración de Romberg.
- Entender la diferencia fundamental entre las fórmulas de Newton-Cotes y la cuadratura gaussiana.
- Comprender el funcionamiento de la integración adaptativa



Introducción

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gausiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

● Teorema del valor medio para integrales

Sean $f(x), g(x) \in C[a, b]$ donde $g(x)$ es integrable y no cambia de signo en $[a, b]$, entonces existe un punto c en (a, b) tal que

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

● Definición

Una fórmula (de integración numérica) es de orden n cuando se anula el error con polinomios de grado menor o igual a n

$$FN(f, [a, b]) \text{ orden } n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall P_n(x) : \int_a^b P_n(x) dx - FN(P_n, [a, b]) = 0$$



Obtención de las fórmulas

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gausiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Fórmulas de Newton-Cotes

Integrando los polinomios de interpolación
(Habitualmente con puntos equiespaciados)

- Fórmulas de cuadratura (gausiana)

Utilizando las raíces de polinomios ortogonales como
puntos de interpolación
(Dependen del intervalo y de la función)

- Método de coeficientes indeterminados

Plantean un sistema de ecuaciones, dependiendo del
orden de la fórmula, cuya resolución obtiene los
coeficientes



Ejemplo: Mét. coeficientes indeterminados (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

Obtener los coeficientes de la siguiente fórmula para que tenga el mayor orden posible

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \alpha_0 f(0.25) + \alpha_1 f(0.5) + \alpha_2 f(0.75)$$

Planteamiento: debe ser exacta para polinomios del mayor orden, luego comenzamos en orden creciente

$$f(x) = 1 \rightarrow \int_0^1 1 dx = 1 = \alpha_0 1 + \alpha_1 1 + \alpha_2 1$$

$$f(x) = x \rightarrow \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = \alpha_0 (0.25) + \alpha_1 (0.5) + \alpha_2 (0.75)$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = \alpha_0 (0.25)^2 + \alpha_1 (0.5)^2 + \alpha_2 (0.75)^2$$



Ejemplo: Mét. coeficientes indeterminados (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

Resolución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 0.75 \\ 0.25^2 & 0.5^2 & 0.75^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{2}{3} \\ \alpha_1 = -\frac{1}{3} \\ \alpha_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{2}{3} f(0.25) - \frac{1}{3} f(0.5) + \frac{2}{3} f(0.75)$$

Orden de la fórmula

$$f(x) = x^3 \rightarrow \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \stackrel{?}{=} \frac{2}{3} (0.25)^3 - \frac{1}{3} (0.5)^3 + \frac{2}{3} (0.75)^3 = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = x^4 \rightarrow \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} \stackrel{?}{=} \frac{2}{3} (0.25)^4 - \frac{1}{3} (0.5)^4 + \frac{2}{3} (0.75)^4 = \frac{37}{192}$$

Fórmula de orden 3



Reglas de Newton Cotes Simples

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

- Simples

- Compuestas

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Son formulas de tipo interpolatorio que se definen por el número de puntos del polinomio interpolante
- Las fórmulas genéricas se toman para puntos equiespaciados, aunque su método de obtención es válido para cualesquiera puntos

- Motivación

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) \rightarrow \begin{cases} P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^n(x) : L_i^n(x) \\ E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_n(x) dx + e(x) \rightarrow e(x) = \int_a^b E(x) dx$$



Ejemplos de reglas simples

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes - Simples

- Compuestas

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

● Interpolante de grado 0

- Valor en el extremo del intervalo

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a) dx + \int_a^b f'(\xi)(x-a) dx = f(a)(b-a) + f'(\eta) \frac{(b-a)^2}{2}$$

- Valor en el punto medio

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx + \int_a^b f\left[\frac{a+b}{2}, x\right] \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + f''(\eta) \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

$$\text{como } f[x, x_0] = f[x, x_0, x_1](x - x_1) + f[x_0, x_1] \text{ y } \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f\left[\frac{a+b}{2}, x\right] \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx &= \int_a^b f\left[\frac{a+b}{2}, x, x_1\right] (x - x_1) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = \left\{x_1 = \frac{a+b}{2}\right\} = \\ &= f\left[\frac{a+b}{2}, \zeta, x_1\right] \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}{3} \Big|_a^b \end{aligned}$$

● Interpolante de grado 1

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_1(x) dx + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b) dx$$

$$\int_a^b P_1(x) dx = f(a) \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx + f(b) \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a)$$

$$\frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi)(x-a)(x-b) dx = \frac{1}{2} f''(\eta) \int_a^b (x-a)(x-b) dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$$



Ejemplos de reglas simples

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

- Simples

- Compuestas

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

● Interpolante de grado 2

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_2(x) dx + \int_a^b \frac{1}{3!} f'''(\xi) (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) dx$$

– Combinamos trapecio y punto medio

$$RT \quad \int_a^b P_2(x) dx = \frac{P_2(a) + P_2(b)}{2} (b-a) - \frac{(b-a)^3}{12} P_2''(\eta)$$

$$RPM \quad \int_a^b P_2(x) dx = P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a) + \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 P_2''(\eta)$$

$$RT + 2RPM \quad 3 \int_a^b P_2(x) dx = \frac{b-a}{2} (P_2(a) + 4P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_2(b))$$

$$RSimpson \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

$$\text{como } f\left[x, a, \frac{a+b}{2}, b\right] = f\left[x, a, \frac{a+b}{2}, b, x_3\right] (x-x_3) + f\left[a, \frac{a+b}{2}, b, x_3\right] y \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{3!} f'''(\xi) (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) dx &= \int_a^b f\left[x, a, \frac{a+b}{2}, b, \frac{a+b}{2}\right] (x - \frac{a+b}{2}) (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) dx = \\ &= \frac{f^{iv}(\eta)}{6} \frac{2}{30} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \end{aligned}$$



Reglas cerradas

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes
- Simples

Cerradas

Abiertas

- Compuestas

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- El pol. de interpolación **SI** incluye los extremos del intervalo

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \quad x_0 = a, x_n = b \quad x_k = x_0 + kh \quad h = \frac{b-a}{n}$$

- Tma: Dada una fórmula cerrada de n+1 puntos el error es

$$\frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n s^2 (s-1) \cdots (s-n) ds \quad n \text{ par} \quad \xi \in (a, b)$$

$$\frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n s (s-1) \cdots (s-n) ds \quad n \text{ impar}$$

- Fórmulas cerradas usuales

n=1	$\frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$	Regla del trapecio
n=2	$\frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$	Regla de Simpson
n=3	$\frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$	
n=4	$\frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi)$	R. Boole



Ejemplo

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = \left[\sin(x) \right]_0^{\pi/2} = 1$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción
Reglas d NewtonCotes
- Simples

Cerradas

Abiertas

- Compuestas

Cuadratura Gaussiana
Integración Romberg
Integración Adaptativa
Integración impropia
Integración múltiple
RESUMEN

Bibliografía

n=1	$\frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] = \frac{(\pi/2 - 0)}{2} [\cos(0) + \cos(\pi/2)] = \pi/4 (1 - 0) = \pi/4 \approx 0.7854$ $Error \leq \left -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \right = \frac{(\pi/2 - 0)^3}{12} = 0.3230$
n=2	$\frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = \frac{\pi/4}{3} [\cos(0) + 4\cos(\pi/4) + \cos(\pi/2)] \approx 1.0023$ $Error \leq \left -\frac{h^5}{90} f^{iv}(\xi) \right = \frac{(\pi/4)^5}{90} = 0.0033$
n=3	$\frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] = \frac{3\pi/6}{8} [\cos(0) + 3\cos(\pi/6) + 3\cos(\pi/3) + \cos(\pi/2)] \approx 1.001$ $Error \leq \left -\frac{3h^5}{80} f^{iv}(\xi) \right = \frac{3(\pi/6)^5}{80} = 0.0015$
n=4	$\frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] =$ $= \frac{2\pi/8}{45} [7\cos(0) + 32\cos(\pi/8) + 12\cos(\pi/4) + 32\cos(3\pi/8) + 7\cos(\pi/2)] \approx 1.000$ $Error \leq \left -\frac{8h^7}{845} f^{vi}(\xi) \right = \frac{8(\pi/8)^5}{845} = 1.2192 \cdot 10^{-5}$



Reglas abiertas

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes
- Simples

Cerradas

Abiertas

- Compuestas

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- El pol. de interpolación **NO** incluye los extremos del intervalo

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \quad x_0 = a + h, x_n = b - h \quad x_k = x_0 + kh \quad h = \frac{b-a}{n+2}$$

- Tma: Dada una fórmula abierta de n+1 puntos el error es

$$\frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{-1}^{n+1} s^2 (s-1) \cdots (s-n) ds \quad n \text{ par}$$

$$\frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{-1}^{n+1} s (s-1) \cdots (s-n) ds \quad n \text{ impar}$$

$\xi \in (a, b)$

- Fórmulas abiertas usuales

n=0	$2hf(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi)$	Regla del punto medio
n=1	$\frac{3h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi)$	
n=2	$\frac{4h}{3} [2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi)$	
n=3	$\frac{5h}{24} [11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] + \frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\xi)$	



Ejemplo

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes
- Simples

Cerradas

Abiertas

- Compuestas

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

n=0	$2hf(x_0) = 2 \frac{\pi}{4} [\cos(\pi/4)] = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1.1107$ $Error \leq \left \frac{h^3}{3} f''(\xi) \right = \frac{(\pi/4)^3}{3} = 0.1615$
n=1	$\frac{3h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] = \frac{3\pi/6}{2} [\cos(\pi/6) + \cos(\pi/3)] \approx 1.0729$ $Error \leq \left \frac{3h^3}{4} f''(\xi) \right = \frac{3(\pi/6)^3}{4} = 0.1077$
n=2	$\frac{4h}{3} [2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)] = \frac{4(\pi/8)}{3} [2\cos(\pi/8) - \cos(\pi/4) + 2\cos(3\pi/8)] \approx 0.9980$ $Error \leq \left \frac{3h^5}{80} f^{iv}(\xi) \right = \frac{3(\pi/8)^5}{80} = 0.0029$
n=3	$\frac{5h}{24} [11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] = \frac{5\pi/10}{24} \left[11\cos(\pi/10) + \cos(\pi/5) + \cos((3\pi/10)) + 11\cos((2\pi/5)) \right] \approx 0.9986$ $Error \leq \left \frac{95h^5}{144} f^{iv}(\xi) \right = \frac{95(\pi/10)^5}{144} = 0.0020$



Reglas Compuestas

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

- *Simples*- *Compuestas*

Control Error

Estabilidad

Cuadratura Gausiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Subdivisión en subintervalos y aplicación de la regla simple a cada subintervalo

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f(x) dx$$

- Reglas más habituales

- Regla del trapecio compuesta

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left(\frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) \right) = \\ &= \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \end{aligned}$$

- Regla de Simpson compuesta

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{2(i-1)}}^{x_{2i}} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left(\frac{h}{3} [f(x_{2(i-1)}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i) \right) = \\ &= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_n) \right) - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

**Descripción****Objetivos****Temario**

Introducción

Reglas d NewtonCotes

- *Simples*- *Compuestas*

Control Error

Estabilidad

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

Ejemplo: trapecio compuesta $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$$

- **Regla**

- 2 intervalos (3 puntos)

$$\frac{\pi/4}{2} (f(0) + 2f(\pi/4) + f(\pi/2)) = \frac{\pi}{8} (1.0 + 2 \times 0.7071 + 0.0) = 0.9481$$

- 3 intervalos (4 puntos)

$$\frac{\pi/6}{2} (f(0) + 2[f(\pi/6) + f(\pi/3)] + f(\pi/2)) = \frac{\pi}{12} (1.0 + 2[0.8660 + 0.5000] + 0.0) = 0.9770$$

- 4 intervalos (5 puntos)

$$\frac{\pi/8}{2} \left(f(0) + 2 \sum_{i=1}^3 f(i\pi/8) + f(\pi/2) \right) = \frac{\pi}{16} (1.0 + 2 \times [0.9239 + 0.7071 + 0.3827] + 0.0) = 0.9871$$

- **Cota y error real**

$$M = \sup_{\xi \in (a,b)} |f''(\xi)| = \sup_{x \in (0, \pi/2)} |\cos(x)| = 1$$

- 2 intervalos $h = \frac{\pi}{4} \left| \frac{(\pi/2 - 0)(\pi/4)^2}{12} M \right| = 0.0807 \quad \left| \int_a^b f(x) dx - RT \right| = |1 - 0.9481| = 0.0519$

- 3 intervalos $h = \frac{\pi}{6} \left| \frac{(\pi/2 - 0)(\pi/6)^2}{12} M \right| = 0.0359 \quad \left| \int_a^b f(x) dx - RT \right| = |1 - 0.9770| = 0.0230$

- 4 intervalos $h = \frac{\pi}{8} \left| \frac{(\pi/2 - 0)(\pi/8)^2}{12} M \right| = 0.0202 \quad \left| \int_a^b f(x) dx - RT \right| = |1 - 0.9871| = 0.0129$

**Descripción****Objetivos****Temario**

Introducción

Reglas d NewtonCotes

- *Simples*- *Compuestas*

Control Error

Estabilidad

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía**Ejemplo: simpson compuesta** $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_n) \right) - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$$

● **Regla**

- 2 intervalos (5 puntos)

$$\frac{\pi/8}{2} \left(f(0) + 4[f(\pi/8) + f(3\pi/8)] + 2f(2\pi/8) + f(\pi/2) \right) = \frac{\pi}{16} (1 + 4[0.9239 + 0.3827] + 2 \times 0.7071 + 0) = 1.0001$$

- 3 intervalos (7 puntos)

$$\frac{\pi/12}{2} \left(f(0) + 4 \sum_{i=1}^3 f((2i-1)\pi/12) + 2 \sum_{i=1}^2 f(2i\pi/12) + f(\pi/2) \right) = \frac{\pi}{24} (1 + 4 \times 1.9319 + 2 \times 1.3660 + 0) = 1.0000263$$

- 4 intervalos (9 puntos)

$$\frac{\pi/16}{2} \left(f(0) + 4 \sum_{i=1}^4 f((2i-1)\pi/16) + 2 \sum_{i=1}^3 f(2i\pi/16) + f(\pi/2) \right) = \frac{\pi}{32} (1 + 4 \times 2.5629 + 2 \times 2.0137 + 0) = 1.0000083$$

● **Cota y error real**

$$M = \sup_{\xi \in (a,b)} |f^{(4)}(\xi)| = \sup_{x \in (0, \pi/2)} |\cos(x)| = 1$$

$$\text{-- 2 int. } h = \frac{\pi}{8} \quad \left| \frac{(\pi/2 - 0)(\pi/8)^4}{180} M \right| = 2.07 \times 10^{-4} \quad \left| \int_a^b f(x) dx - RT \right| = |1 - 1.00013| = 1.3 \times 10^{-4}$$

$$\text{-- 3 int. } h = \frac{\pi}{12} \quad \left| \frac{(\pi/2 - 0)(\pi/12)^4}{180} M \right| = 4.1 \times 10^{-5} \quad \left| \int_a^b f(x) dx - RT \right| = |1 - 1.000026| = 2.6 \times 10^{-5}$$

$$\text{-- 4 int. } h = \frac{\pi}{16} \quad \left| \frac{(\pi/2 - 0)(\pi/16)^4}{180} M \right| = 1.3 \times 10^{-5} \quad \left| \int_a^b f(x) dx - RT \right| = |1 - 1.000008| = 8.3 \times 10^{-6}$$



Control de error y ejemplo

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

- *Simples*- *Compuestas**Control Error**Estabilidad*

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Las reglas compuestas permiten controlar el error variando el número de subintervalos (modifican el valor de h).
- Cotas de error

$$\text{– Trapecio} \quad \left| \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 \right| \quad \text{con} \quad M_2 = \sup_{\xi \in (a,b)} |f''(\xi)|$$

$$\text{– Simpson} \quad \left| \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 \right| \quad \text{con} \quad M_4 = \sup_{\xi \in (a,b)} |f^{(iv)}(\xi)|$$

- Ejemplo

- Obtener el numero de subintervalos para poder asegurar que el cálculo de la integral indicada mediante las reglas compuestas tenga un error no superior a una millonésima

$$\text{– Trapecio} \quad \frac{(\pi/2 - 0)h^2}{12} M_2 = \frac{\pi}{24} h^2 \leq 10^{-6} \rightarrow h \leq \sqrt{24/\pi} 10^{-6} = 0.0028 \rightarrow n \geq \frac{\pi/2}{h} \geq 568.31 = 569$$

- Simpson

$$\frac{(\pi/2 - 0)h^4}{180} M_4 = \frac{\pi}{360} h^4 \leq 10^{-6} \rightarrow h \leq \sqrt[4]{360/\pi} 10^{-6} = 0.1035 \rightarrow n \geq \frac{\pi/2}{2h} \geq 7.59 = 8$$



Estabilidad numérica

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

- Simples

- Compuestas

Control Error

Estabilidad

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Las fórmulas de integración numérica habituales son estables en h
- Trapecio compuesta (con errores de representación)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left(f(a) + \varepsilon_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (f(x_k) + \varepsilon_k) + f(b) + \varepsilon_N \right) - \frac{f''(\zeta)}{12} (b-a) h^2$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - RT_c(f, [a, b], h) \right| \leq \left| \frac{h}{2} \left(\varepsilon_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_k + \varepsilon_N \right) \right| + \left| \frac{f''(\zeta)}{12} (b-a) h^2 \right|$$

$$\leq \frac{h}{2} 2N\varepsilon + \frac{M}{12} (b-a) h^2 = (b-a) \varepsilon + \frac{M}{12} (b-a) h^2$$

- Simpson compuesta (con errores de representación)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(a) + \varepsilon_0 + 4 \sum_{k=1}^N (f(x_{2k-1}) + \varepsilon_k) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (f(x_{2k}) + \varepsilon_{2k}) + f(b) + \varepsilon_N \right) - \frac{f^{iv}(\zeta)}{180} (b-a) h^4$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - RS_c(f, [a, b], h) \right| \leq \left| \frac{h}{3} \left(\varepsilon_0 + 4 \sum_{k=1}^N \varepsilon_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{2k} + \varepsilon_N \right) \right| + \left| \frac{f^{iv}(\zeta)}{180} (b-a) h^4 \right|$$

$$\leq \frac{h}{3} 6N\varepsilon + \frac{M}{180} (b-a) h^4 = (b-a) \varepsilon + \frac{M}{12} (b-a) h^2$$

- Caso general (con errores de representación)

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^N \alpha_i h (f(x_i) + \varepsilon_k) + E_{trunc}$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - RN(f, [a, b], h) \right| \leq \sum_{i=0}^N |\alpha_i h \varepsilon_k| + E_{trunc} \leq h \varepsilon \sum_{i=0}^N |\alpha_i| + E_{trunc}$$

En las reglas simples, se cumple generalmente que $\alpha_i > 0$ y $\sum \alpha_{ij} = 1$



Introducción y definición

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gaussiana

- Introducción

- Polin. Ortogonales

- Ejemplos

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- No fija los puntos. Valores óptimos para obtener mayor grado

- Ejemplo

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^1 \alpha_i f(x_i) \xrightarrow[\text{indeter}]{\text{coef.}} \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 1 \quad 2 = \alpha_0 + \alpha_1 \\ f(x) = x \quad 0 = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \\ f(x) = x^2 \quad \frac{2}{3} = \alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 \\ f(x) = x^3 \quad 0 = \alpha_0 x_0^3 + \alpha_1 x_1^3 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{4^a}{2^a} &\Rightarrow x_0^2 = x_1^2 \rightarrow x_0 = \pm x_1 \\ 3^a &\rightarrow \frac{2}{3} = (\alpha_0 + \alpha_1) x_0^2 = 2x_0^2 \Rightarrow x_0 = \frac{\pm\sqrt{3}}{3} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 1 \\ x_0 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right. \\ 2^a &\Rightarrow x_0 \neq x_1 \rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = 1 \cdot f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + O(f^{(4)}(x))$$

- Polinomios ortogonales

- Base de polinomios

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots\} / \text{grado}(\varphi_n(x)) = n$$

- Definidos en un intervalo [a,b]

- Ortogonales para una determinada función $w(x)$, denominada peso

$$\text{Sea } w(x) \in C[a, b] / w(x) \geq 0 : \int_a^b w(x) \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ > 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$



Propiedades

- Relación de recurrencia

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= 1 & \varphi_1(x) &= x - B_1 & \varphi_k(x) &= (x - B_k)\varphi_{k-1}(x) - C_k\varphi_{k-2}(x) \\ B_1 &= \frac{\int_a^b xw(x)[\varphi_0(x)]^2 dx}{\int_a^b w(x)[\varphi_0(x)]^2 dx} & B_k &= \frac{\int_a^b xw(x)[\varphi_{k-1}(x)]^2 dx}{\int_a^b w(x)[\varphi_{k-1}(x)]^2 dx} & C_k &= \frac{\int_a^b xw(x)\varphi_{k-1}(x)\varphi_{k-2}(x)dx}{\int_a^b w(x)[\varphi_{k-2}(x)]^2 dx}\end{aligned}$$

- Orden de las fórmulas y error

Dado el polinomio ortogonal $\varphi_n(x)$ con raíces $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, se tiene

$$P_{2n-1}(x) = \varphi_n(x)P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) \rightarrow P_{2n-1}(\xi_k) = \varphi_n(\xi_k)P_{n-1}(\xi_k) + R_{n-1}(\xi_k) = R_{n-1}(\xi_k)$$

Integrando

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x)P_{2n-1}(x)dx &= \int_a^b w(x)\varphi_n(x)P_{n-1}(x)dx + \int_a^b w(x)R_{n-1}(x)dx = \\ &= \int_a^b w(x)R_{n-1}(x)dx = \sum_{k=1}^n P_{2n-1}(\xi_k) \int_a^b w(x)L_{n-1}^k(x)dx = \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k P_{2n-1}(\xi_k)\end{aligned}$$

Y por tanto el error viene dado por

$$\int_a^b w(x)f(x)dx - \int_a^b w(x)R_{n-1}(x)dx = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x) \left(\prod_{i=0}^n (x - \xi_i) \right)^2 dx$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gaussiana

- Introducción

- Polin. Ortogonales

- Ejemplos

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía



Familias de polinomios ortogonales

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción
 Reglas d NewtonCotes
 Cuadratura Gaussiana
 - Introducción
 - Polin. Ortogonales
 - Ejemplos
 Integración Romberg
 Integración Adaptativa
 Integración impropia
 Integración múltiple
 RESUMEN

Bibliografía

Nombre	[a,b]	w(x)	Notas
<u>Legendre</u>	[-1,1]	1	Se impone que su valor en x=1 sea 1 Asociados a la ecuación diferencial $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$
<u>Tchebishev</u>	[-1,1]	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Uso en interpolación (aproximación minimax) Asociados a la ecuación diferencial $(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$
<u>Hermite</u>	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	Asociados a la ecuación diferencial $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$
<u>Laguerre</u>	[0,∞)	e^{-x}	Asociados a la ecuación diferencial $xy'' - (1-x)y' + \alpha y = 0$
Jacobi, Gegenbauer, Appell, Charlier, Jack, Krawtchouk, ...			



Polinomios de Legendre

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gausiana

- Introducción

- Polin. Ortogonales

- Ejemplos

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Polinomios

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$L_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

- Norma

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

- Relación de recurrencia

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}((2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x))$$

- Raíces y coeficientes

N	Raíces	Coeff.
2	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
3	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}, 0$	$\frac{5}{9}, \frac{8}{9}$
4	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$ $\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18-\sqrt{30})$ $\frac{1}{36}(18+\sqrt{30})$
5	0 $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$ $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{1}{900}(322+13\sqrt{70})$ $\frac{1}{900}(322-13\sqrt{70})$



Polinomios de Tchebishev

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gaussiana

- Introducción

- Polin. Ortogonales

- Ejemplos

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Polinomios

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

- Norma

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi & n = 0 \\ \pi/2 & n \neq 0 \end{cases}$$

- Relación de recurrencia

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \theta = \arccos(x)$$

- Raíces y coeficientes

$$\text{raíces} \quad \cos\left(\frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2}\right) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{extremos} \quad \cos\left(\frac{2k}{n} \frac{\pi}{2}\right) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

N	Raíces	Coeff.
2	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\pi$
3	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\pi$
4	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}\pi$
5	0 $\pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5})}$	$\frac{1}{5}\pi$



Polinomios de Hermite

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gaussiana

- Introducción

- Polin. Ortogonales

- Ejemplos

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Polinomios

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

- Norma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

- Relación de recurrencia

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

N	Raíces	Coeff.
2	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
3	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{6}, 0$	$\frac{1}{6}\sqrt{\pi}, \frac{2}{3}\sqrt{\pi}$
4	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}(3 - \sqrt{6})}$ $\pm \sqrt{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{6})}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\pi}(3 - \sqrt{6})^{-1}$ $\frac{1}{4}\sqrt{\pi}(3 + \sqrt{6})^{-1}$
5	0 ± 0.958572 ± 2.02018	0.945309 0.393619 0.0199532



Polinomios de Laguerre

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gausiana

- Introducción

- Polin. Ortogonales

- Ejemplos

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Polinomios

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = -x + 1$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$$

$$L_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$L_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

- Norma

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_n(x) dx = 1$$

- Relación de recurrencia

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

N	Raíces	Coeff.
2	$2 - \sqrt{2}$	$\frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$
	$2 + \sqrt{2}$	$\frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})$
3	0.415775	0.711093
	2.29428	0.278518
	6.28995	0.0103893
4	0.322548	0.603154
	1.74576	0.357419
	4.53662	0.0388879
	9.39507	0.000539295
5	0.26356	0.521756
	1.4134	0.398667
	3.59643	0.0759424
	7.08581	0.00361176
	12.6408	0.00002337



Integral en un intervalo cualquiera

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gaussiana

- Introducción

- Polin. Ortogonales

- Ejemplos

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

• Cambio de variable

$$\int_a^b F(y) dy = \left\{ \begin{array}{l} y = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{b - a} (x - a) \\ dy = \frac{\beta - \alpha}{b - a} dx \end{array} \right\} = \int_a^b F(y(x)) \frac{\beta - \alpha}{b - a} dx = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \int_a^b w(x) f(x) dx$$

• Ejemplos

$$= \sum_{k=1}^n \alpha_k f(\xi_k) + \frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!} \int_a^b w(x) \left(\prod_{k=0}^n (x - \xi_k) \right)^2 dx$$

$$1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\pi}{4} (x + 1) \\ dy = \frac{\pi}{4} dx \end{array} \right\} = \frac{\pi}{4} \int_a^b \cos\left(\frac{\pi}{4} (x + 1)\right) dx \approx \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \alpha_k f(\xi_k)$$

$$n = 2 \quad \frac{\pi}{4} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} + 1\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)\right) \right\} = 0.998472613404115$$

$$n = 3 \quad \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{5}{9} \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(-\sqrt{\frac{3}{5}} + 1\right)\right) + \frac{8}{9} \cos\left(\frac{\pi}{4} (0 + 1)\right) + \frac{5}{9} \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\sqrt{\frac{3}{5}} + 1\right)\right) \right\} = 1.000008121555498$$

$$n = 4 \quad \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{1}{36} (18 - \sqrt{30}) \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{-1}{35} \sqrt{525 + 70\sqrt{30}} + 1\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{35} \sqrt{525 + 70\sqrt{30}} + 1\right)\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{36} (18 + \sqrt{30}) \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{-1}{35} \sqrt{525 - 70\sqrt{30}} + 1\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{35} \sqrt{525 - 70\sqrt{30}} + 1\right)\right) \right] \right\} = 0.999999977197115$$

$$n = 5 \quad \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{1}{900} (322 + 13\sqrt{70}) \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{-1}{21} \sqrt{245 - 14\sqrt{70}} + 1\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{21} \sqrt{245 - 14\sqrt{70}} + 1\right)\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{128}{225} \cos\left(\frac{\pi}{4} (0 + 1)\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{900} (322 - 13\sqrt{70}) \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{-1}{21} \sqrt{245 + 14\sqrt{70}} + 1\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{21} \sqrt{245 + 14\sqrt{70}} + 1\right)\right) \right] \right\} = 1.0000000000039$$



Integración de Romberg: Proceso

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Utiliza la regla del trapecio compuesta

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right) + k_1 h^2 + k_2 h^4 + k_3 h^6 + \dots$$

- Se combina con la extrap. de Richardson

$$N_k(h) = \frac{4^k N_{k-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{k-1}(h)}{4^k - 1} = N_{k-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{k-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{k-1}(h)}{4^k - 1}$$

- Aprovecha las relaciones de la regla

$$N_o(h_0 = b - a) = \frac{h}{2} (f(a) + f(b))$$

$$N_o\left(h_1 = \frac{h}{2}\right) = \frac{h_1}{2} \left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) = \frac{1}{2} N_o(h_0) + h_1 f\left(a + h_1\right)$$

$$\begin{aligned} N_o\left(h_2 = \frac{h}{4}\right) &= \frac{h_2}{2} \left(f(a) + 2f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b) \right) = \\ &= \frac{1}{2} N_o(h_1) + h_2 (f(a + h_2) + f(a + 3h_2)) \end{aligned}$$



Integración de Romberg: Relaciones

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gausiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

$$N_o(h_0 = b - a) = \frac{h}{2} (f(a) + f(b))$$

$$N_o(h_1 = \frac{h}{2^1}) = \frac{1}{2} N_o(h_0) + h_1 f(a + h_1)$$

$$N_o(h_2 = \frac{h}{2^2}) = \frac{1}{2} N_o(h_1) + h_2 (f(a + h_2) + f(a + 3h_2))$$

$$N_o(h_3 = \frac{h}{2^3}) = \frac{1}{2} N_o(h_2) + h_3 \left(f(a + h_3) + f(a + 3h_3) + \right. \\ \left. + f(a + 5h_3) + f(a + 7h_3) \right)$$

$$N_o(h_4 = \frac{h}{2^4}) = \frac{1}{2} N_o(h_3) + h_4 \left(f(a + h_4) + f(a + 3h_4) + \right. \\ \left. + f(a + 5h_4) + f(a + 7h_4) + \right. \\ \left. + f(a + 9h_4) + f(a + 11h_4) + \right. \\ \left. + f(a + 13h_4) + f(a + 15h_4) \right)$$

⋮

$$N_o(h_k = \frac{h}{2^k}) = \frac{1}{2} N_o(h_{k-1}) + h_k \sum_{i=1}^{2^{k-1}} f(a + (2i-1)h_k)$$



Ejemplo

Calcular, con un error inferior a 10^{-6} , aplicando el método de integración de Romberg

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$$

Aplicamos la fórmula de Romberg, donde $h=(b-a)/n$, para utilizar a continuación la extrapolación de Richardson

$$N_1(h) = \frac{4^1 N_0\left(\frac{h}{2}\right) - N_0(h)}{4^1 - 1} = \frac{4 \times 0.9480594 - 0.7853982}{3} = 1.0022799$$

$$N_2(h) = \frac{4^2 N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)}{4^2 - 1} = \frac{16 \times 1.0001346 - 1.0022799}{15} = 0.9999916$$

$$N_3(h) = \frac{4^3 N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)}{4^3 - 1} = \frac{64 \times 0.9999999 - 0.9999916}{63} = 1.0000000$$

n	h	$N_0(h)$	$N_1(h)$	$N_2(h)$	$N_3(h)$	$N_4(h)$
1	$\pi/2$	0.7853982				
2	$\pi/4$	0.9480594	1.0022799			
4	$\pi/8$	0.9871158	1.0001346	0.9999916		
8	$\pi/16$	0.9967852	1.0000083	0.9999999	1.0000000	
16	$\pi/32$	0.9991967	1.0000005	1.0000000	1.0000000	1.0000000

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía



Motivación

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gausiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Basada en la fórmula de Simpson compuesta
- Supone comportamiento “suave” de $f^{(4)}(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = S(a, b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta) \quad \text{con } h = \frac{b-a}{2} \text{ y } S(a, b) = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\tilde{\eta})$$

Igualando y tomando $f^{(4)}(\tilde{\eta}) \approx f^{(4)}(\eta)$

$$S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - \frac{1}{16} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\tilde{\eta}) = S(a, b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta)$$

$$-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta) \approx \frac{16}{15} \left[S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - S(a, b) \right]$$

Estimación del error

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| \approx \frac{1}{15} \left| S(a, b) - S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right|$$



Proceso

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

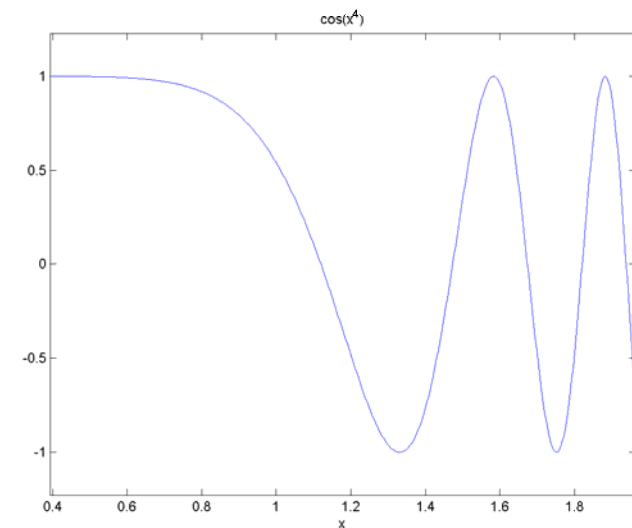
Bibliografía

1. Calcular $I = S(a, b)$, $I_i = S\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $I_d = S\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, $I_s = I_a + I_d$
2. Estimar el error como $e = |I - I_s|$
3. Si $e < 15\epsilon$ tomar I_s como valor de la integral sino repetir el proceso con cada semi-intervalo, dividiendo también por dos el error admisible

- Ejemplo: Calcular, con un error inferior a 1 centésima

$$\int_{\pi/8}^{5\pi/8} \cos(x^4) dx = 0.470355208182252 \dots$$

- Representación de la función





Ejemplo: resultados

$$\begin{aligned}
 I &= S(a, b) = \frac{\frac{5}{8} - \frac{1}{8}}{6} \left(\cos\left(\frac{1}{8}\right)^4 + 4 \cos\left(\frac{3}{8}\right)^4 + \cos\left(\frac{5}{8}\right)^4 \right) \approx -0.2766 \\
 I_i &= S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{\frac{3}{8} - \frac{1}{8}}{6} \left(\cos\left(\frac{1}{8}\right)^4 + 4 \cos\left(\frac{2}{8}\right)^4 + \cos\left(\frac{3}{8}\right)^4 \right) \approx 0.5715 \\
 I_d &= S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) = \frac{\frac{5}{8} - \frac{3}{8}}{6} \left(\cos\left(\frac{3}{8}\right)^4 + 4 \cos\left(\frac{4}{8}\right)^4 + \cos\left(\frac{5}{8}\right)^4 \right) \approx 0.3812
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} I_s = I_a + I_d \\ \approx 0.9526 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} |I_s - I| \approx 1.2292 \\ > 15\varepsilon \end{array} \right.$$

$[a, b]$	I	I_i	I_d	I_s	$ I - I_s $	tol
$(4, 20) \pi/32$	-0.2766	0.5715	0.3812	0.9526	1.2292	0.0100
$(4, 12) \pi/32$	0.5715	0.3861	0.1947	0.5808	0.0094	0.0050
$(12, 20) \pi/32$	0.3812	-0.1969	-0.2272	-0.4240	0.8052	0.0050
$(12, 16) \pi/32$	-0.1969	-0.1568	0.0011	-0.1557	0.0412	0.0025
$(12, 14) \pi/32$	-0.1568	-0.0622	-0.0947	-0.1569	0.0001	0.0013
$(14, 16) \pi/32$	0.0011	-0.0523	0.0555	0.0032	0.0021	0.0013
$(16, 20) \pi/32$	-0.2272	0.0136	0.0646	0.0781	0.3053	0.0025
$(16, 18) \pi/32$	0.0136	0.0715	-0.0635	0.0081	0.0055	0.0013
$(18, 20) \pi/32$	0.0646	-0.0083	0.0462	0.0379	0.0266	0.0013
$(18, 19) \pi/32$	-0.0083	-0.0295	0.0217	-0.0078	0.0005	0.0006
$(19, 20) \pi/32$	0.0462	0.0448	-0.0000	0.0447	0.0015	0.0006
				0.4721		

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía



Ejemplo: representación gráfica

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gausiana

Integración Romberg

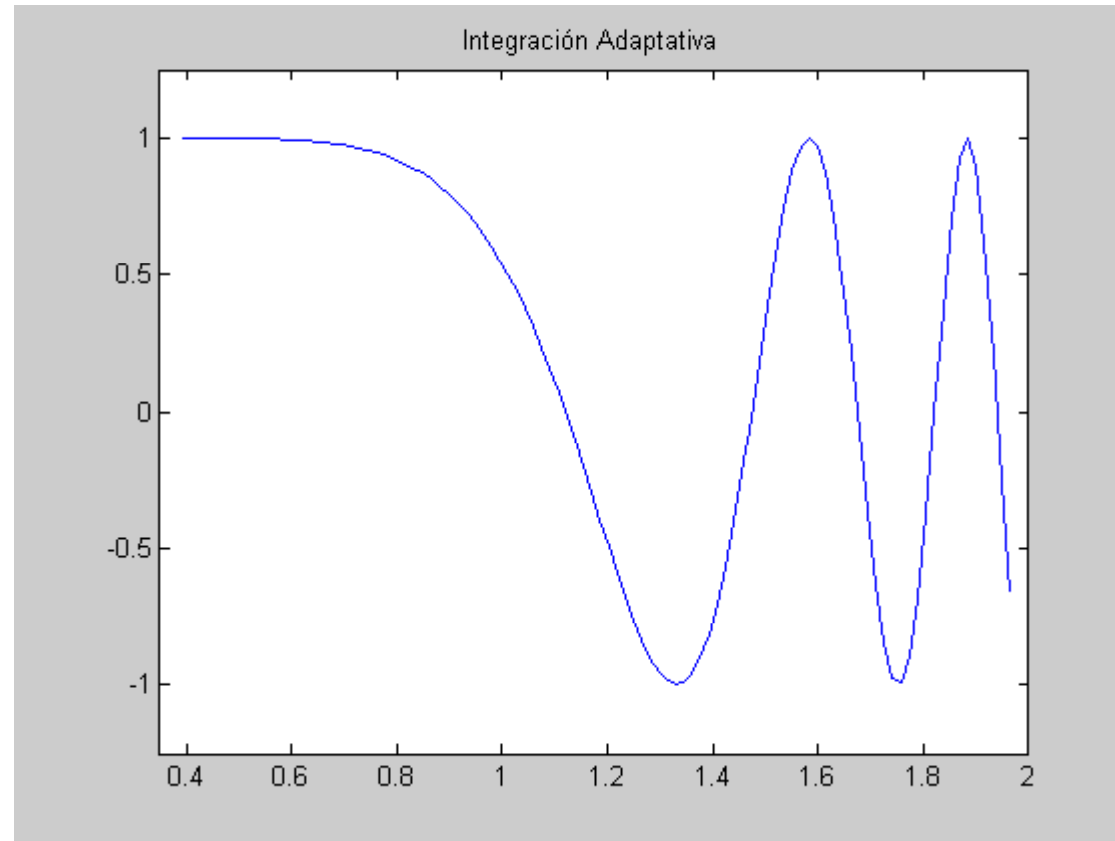
Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía



Integral: $0.5808 + (-0.1569) + 0.0032 + 0.0081 + (-0.0078) + 0.0447 = 0.4721$



Integración impropia (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gausiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Hay dos formas diferentes de abordar la integración impropia

- Usando los polinomios ortogonales adecuados (Hermite o Laguerre)

$$\int_0^{\infty} g(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{g(x)}{e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

- Utilizando un cambio de variable antes de resolver el límite impropio con una fórmula abierta

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{1/b}^{1/a} f(t) \frac{1}{t^2} dt$$

- Nota: Se debe verificar $ab > 0$ (el dominio no incluye el valor nulo), sino es necesario realizar previamente una división del dominio

$$\int_{-a}^{\infty} f(x) dx = \int_{-a}^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx$$

- Donde el valor b se elige lo suficientemente grande como para que el comportamiento asintótico de la función sea $O(x^{-2})$



Integración impropia (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gausiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Calcular $\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\pi/2} \approx 1.253314137315500$

- Usando los polinomios de Laguerre (simples)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-x^2/2+x} dx \approx \begin{cases} 1.304677973964021 & (n=2) \\ 1.187176785267228 & (n=3) \\ 1.236879870719581 & (n=4) \\ 1.263673857958196 & (n=5) \end{cases}$$

- Descomponiendo la integral en dos, utilizando la regla del trapecio para la primera y la del punto medio para la segunda

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \int_0^2 e^{-x^2/2} dx + \int_2^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \int_0^2 e^{-x^2/2} dx + \int_0^{1/2} e^{-1/(2t^2)} \frac{1}{t^2} dt =$$

$$= \begin{cases} 1.1741983013 + 0.0507831125 = 1.22498141383 & (2 \text{ intervalos}) \\ 1.1906738356 + 0.0555665510 = 1.24624038672 & (4 \text{ intervalos}) \\ 1.1948797590 + 0.0566733473 = 1.25155310642 & (8 \text{ intervalos}) \\ 1.1959356697 + 0.0569379755 = 1.25287364536 & (16 \text{ intervalos}) \end{cases}$$



Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

Integración múltiple (I)

- Las integrales múltiples sobre recintos hipercúbicos se resuelven aplicando de forma reiterada las fórmulas simples o utilizando métodos estadísticos (Montecarlo)

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

- Ejemplo (utilizando Simpson)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_0^2 (x-y)^2 dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 (x-y)^2 dx \right) dy = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{2-0}{6} \left[(0-y)^2 + 4(1-y)^2 + (2-y)^2 \right] \right) dy = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (6y^2 - 12y + 8) dy = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1-(-1)}{6} \left[(6(-1)^2 - 12(-1) + 8) + 4(6 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 8) + (6 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 8) \right] \right) = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

- Cuando el recinto no es hipercúbico la única solución es acudir a métodos estadísticos (Montecarlo)

$$\int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy$$



Integración múltiple (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

$$\begin{aligned}
 \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy &= \frac{h_x}{3} \int_c^d \left(f(x_0, y) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}, y) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}, y) + f(x_{2n}, y) \right) dy = \\
 &= \frac{h_x}{3} \frac{h_y}{3} \left(\begin{aligned} &f(x_0, y_0) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_0, y_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_0, y_{2j}) + f(x_0, y_{2m}) + \\ &4 \sum_{i=1}^n \left[f(x_{2i-1}, y_0) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i-1}, y_{2j}) + f(x_{2i-1}, y_{2m}) \right] + \\ &2 \sum_{i=1}^{n-1} \left[f(x_{2i}, y_0) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2i}, y_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i}, y_{2j}) + f(x_{2i}, y_{2m}) \right] + \\ &f(x_{2n}, y_0) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2n}, y_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2n}, y_{2j}) + f(x_{2n}, y_{2m}) + \\ &f(x_0, y_0) + f(x_0, y_{2m}) + f(x_{2n}, y_0) + f(x_{2n}, y_{2m}) + \\ &2 \left[\sum_{j=1}^{m-1} (f(x_0, y_{2j}) + f(x_{2n}, y_{2j})) + \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{2i}, y_0) + f(x_{2i}, y_{2m})) \right] + \\ &4 \left[\sum_{j=1}^m (f(x_0, y_{2j-1}) + f(x_{2n}, y_{2j-1})) + \sum_{i=1}^n (f(x_{2i-1}, y_0) + f(x_{2i-1}, y_{2m})) \right] + \\ &4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i}, y_{2j}) + 8 \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m f(x_{2i}, y_{2j-1}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2i-1}, y_{2j}) \right] + 16 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) \end{aligned} \right) =
 \end{aligned}$$

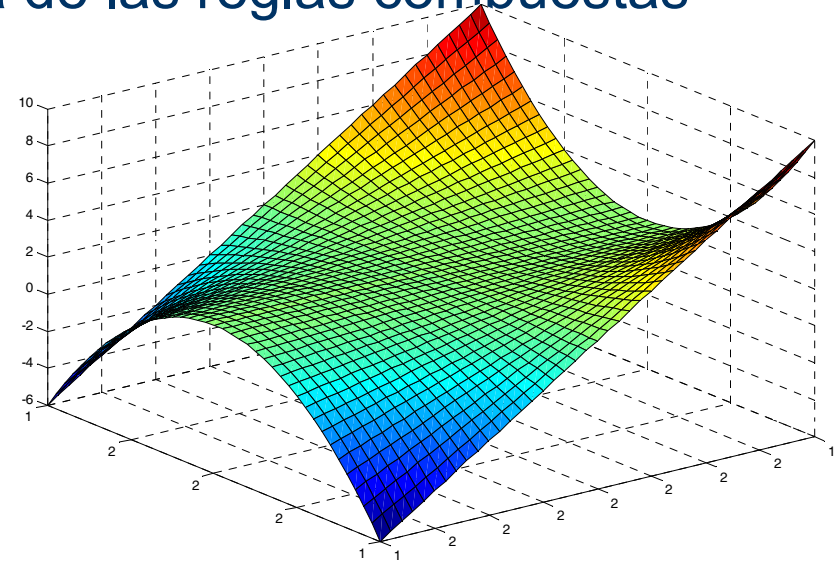


Integración múltiple (III)

- Interpretación gráfica de las reglas compuestas
 - Trapecio

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy =$$

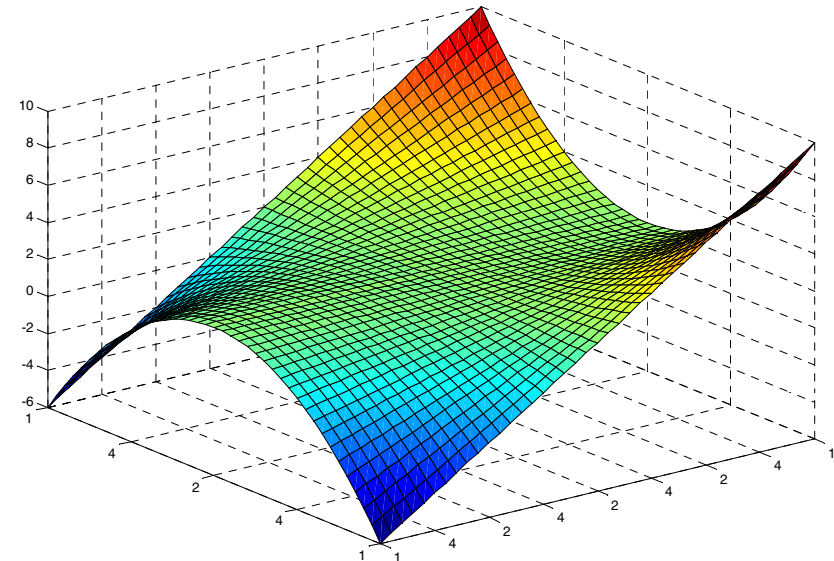
$$\frac{h_x}{2} \frac{h_y}{2} \left(\left[\sum_x (1,1) \right] \times \left[\sum_y (1,1) \right] \right) =$$



- Simpson

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy =$$

$$\frac{h_x}{3} \frac{h_y}{3} \left(\left[\sum_x (1,4,1) \right] \times \left[\sum_y (1,4,1) \right] \right) =$$



Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gausiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía



Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gausiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

Método de Montecarlo (I)

- Calcula

$$I = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad V = \{\mathbf{x}; a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

- Proceso: genera una muestra aleatoria uniforme de valores $\mathbf{x}_i$ y aproxima la integral mediante

$$I \approx \frac{V}{N} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i) = I(\bar{f}) \quad \text{con } \bar{f} \text{ valor medio muestral de la integral}$$

$$\text{var}(f) = \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (f(\mathbf{x}_i) - \bar{f})^2$$

$$E(I(\bar{f})) = \int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{var}(I(\bar{f})) = \frac{V^2 \sigma^2}{N}$$

- Nota 1: El error de la integral es proporcional a su varianza y por tanto disminuye con $O(\sqrt{N})$ (Reducirla a la mitad exige cuadruplicar el número de muestras)
- Nota 2: La convergencia depende del número de muestras, pero NO de la dimensión del volumen



Método de Montecarlo (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gausiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

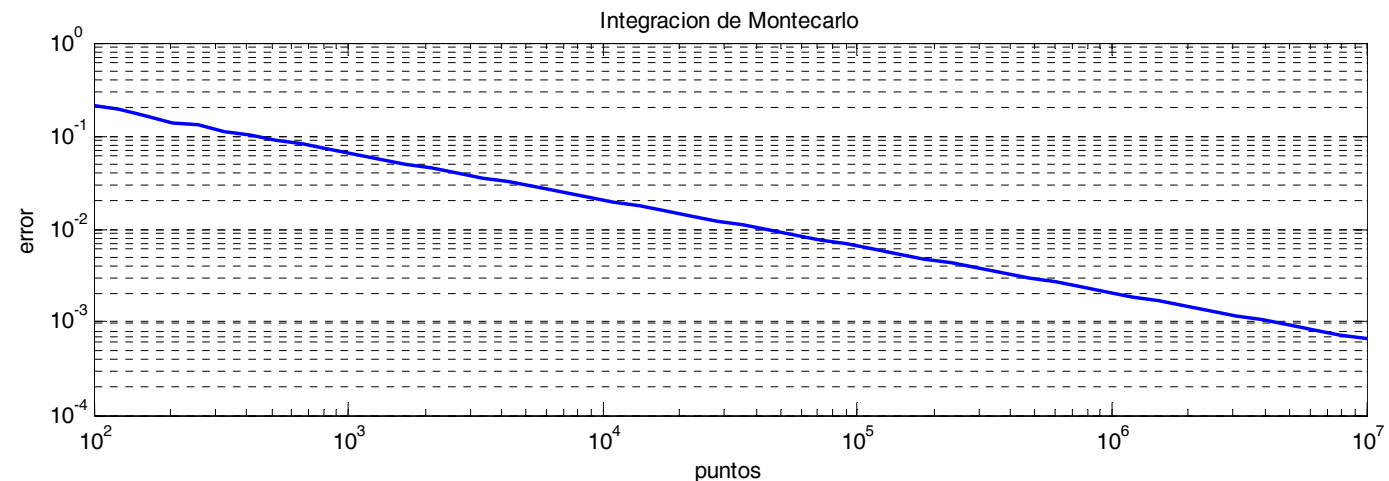
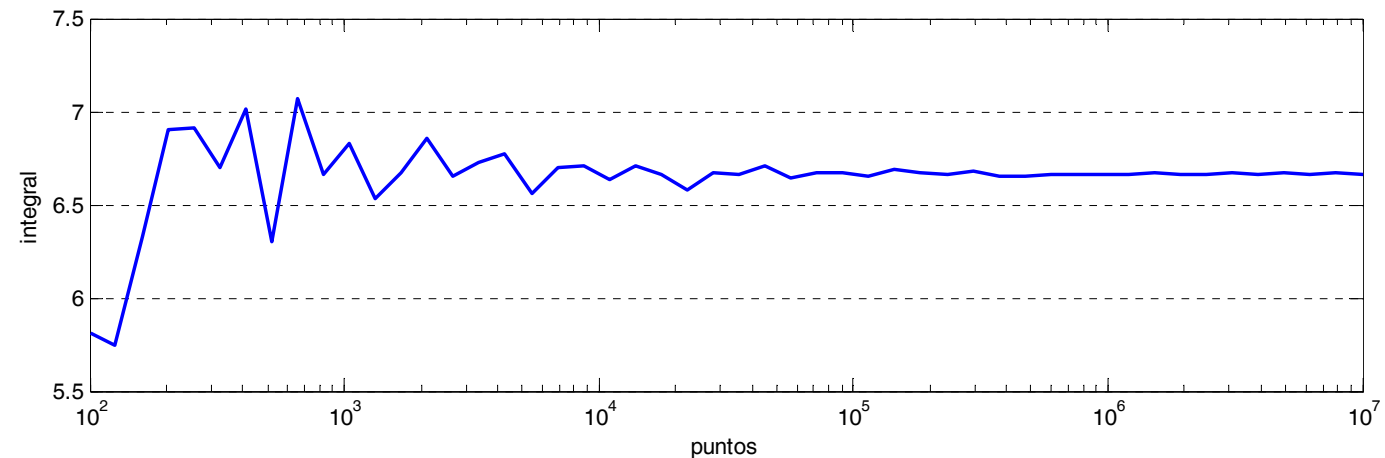
Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Calcular $\int_{-1}^1 \int_0^2 (x-y)^2 dx dy$

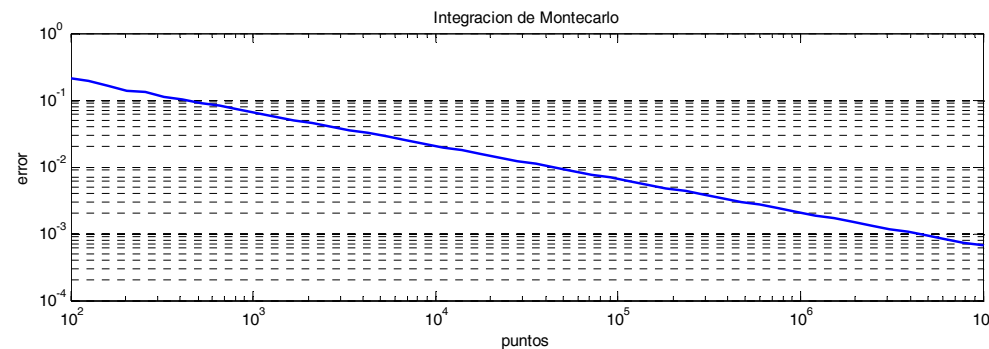
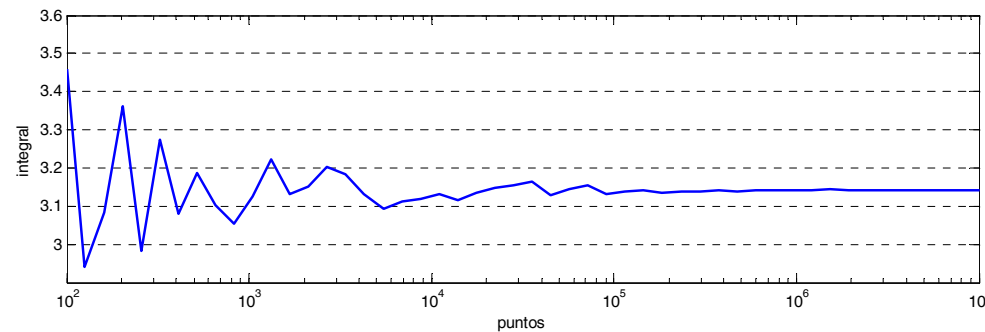




Método de Montecarlo (III)

- El volumen del elipsoide $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$
- Viene dado por $\frac{4}{3}\pi abc$
- Calcular el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$ para $x,y,z>0$

$$\int_V 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2}} d\mathbf{x} = 3 \int_0^1 \left(\int_0^{2\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2}} dx \right) dy \approx 3.142183001731533$$



Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gaussiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía



Resumen

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Reglas d NewtonCotes

Cuadratura Gausiana

Integración Romberg

Integración Adaptativa

Integración impropia

Integración múltiple

RESUMEN

Bibliografía

- Hay dos formas diferentes de obtener fórmulas numéricas de integración
 - Interpolación: Newton-Cotes abiertas y cerradas
 - Cuadratura gaussiana
- Las fórmulas de Newton-Cotes compuestas permiten ajustar el error deseado
- Las fórmulas de cuadratura se obtienen utilizando polinomios ortogonales definidos en intervalos determinados y para funciones de peso, y permiten fórmulas de mayor orden con un número menor de evaluaciones de la función
- La integración de Romberg se obtiene al combinar la regla del trapecio y la extrapolación de Richardson, y permite estimar numéricamente el error
- La integración adaptativa permite ajustar el error y variar el tamaño del paso
- Las integrales impropias requieren usar polinomios ortogonales o combinar cambios de variables con reglas de Newton-Cotes abiertas
- La integración en más de una dimensión se realiza combinando fórmulas de una dimensión cuando el dominio es hipercúbico o utilizando el método de Montecarlo en caso contrario