

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 1 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

Ejercicio 1.- Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $[1,2]$, se desea generar una tabla de valores con equiespaciado h

- Determinar el menor número de puntos necesarios n y el valor de h para que al usar interpolación mediante un polinomio de segundo grado entre tres puntos consecutivos el error sea menor que $\varepsilon=0.001$. Se exige que n sea impar.
- Acotar el error que se comete al aproximar la integral de dicha función por el conjunto de polinomios cuadráticos en cada terna de puntos consecutivos, suponiendo que $h=0.25$.
- Calcular el valor exacto de la integral y el valor aproximado para $h=0.25$ justificando la fórmula numérica utilizada, y verificar que cumple la cota anterior.

Apartado (a) Número de puntos necesarios

Sabemos que, al interpolar mediante un polinomio de segundo grado

$$f(x) = P_2(x) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \text{ con}$$

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) \text{ y } f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f'''(\xi)}{3!}$$

Para asegurar el error pedido, es necesario que $\max_{x \in [x_0, x_2]} \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \right| < \varepsilon$ pero

$$\max_{x \in [x_0, x_2]} \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \right| \leq \max_{x \in [1,2]} \left| \frac{f'''(x)}{3!} \right| \max_{x \in [x_0, x_2]} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

Acotando cada término por separado

$$f(x) = x^{1/2} \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} \quad f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} \quad f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2}$$

puesto que $f'''(x)$ es monótona decreciente y siempre positiva en el intervalo $[1,2]$

$$\max_{x \in [1,2]} \left| \frac{f'''(x)}{3!} \right| \leq \max_{x \in [1,2]} \left| \frac{\frac{3}{8} x^{-5/2}}{3!} \right| \leq \max_{x \in [1,2]} \left| \frac{\frac{3}{8}}{1^{5/2} 3!} \right| \leq \frac{1}{16}$$

Por otro lado, denotando por $x-x_1 = sh$ se tiene $x-x_0 = (s+1)h$ y $x-x_2 = (s-1)h$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 2 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

$$\max_{x \in [x_0, x_2]} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| = \max_{s \in [-1, 1]} |h^3 (s+1)s(s-1)| = |h^3| \max_{s \in [-1, 1]} |s^3 - s| = |h^3| \max_{s \in [-1, 1]} |Q(s)|$$

buscamos los extremos de $Q(s) = s^3 - s$

$$Q'(z) = 3s^2 - 1 = 0 \rightarrow s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left| Q\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right| = \left| Q\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right| = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Por tanto

$$\max_{x \in [x_0, x_2]} \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \right| \leq \frac{1}{16} \frac{2h^3}{3\sqrt{3}} < \varepsilon = 0.001 \rightarrow h \approx 0.3434$$

Esto es, $n \geq \frac{|b-a|}{h} + 1 \geq \frac{2-1}{0.3434} + 1 \geq 4$, y por tanto se necesitan 5 puntos.

Apartado (b) Error en la integración

Se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} \{P_2(x) + E_2(x)\} dx, \text{ que es la regla de Simpson compuesta.}$$

El error de esta regla viene dado por

$$E = \frac{-h^4}{180} (b-a) f^{(iv)}(\xi) \text{ con } \xi \in [1, 2]$$

y como $f^{(iv)}(x) = -\frac{15}{16} x^{-7/2}$, entonces $E = \frac{0.25^4}{180} (2-1) \frac{15}{16} \approx 2.034 \times 10^{-5}$

Apartado (c) Solución exacta y comparación de cotas

Solución analítica exacta

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (\sqrt{8} - 1) \approx 1.2189514164974601940 \dots$$

Solución aproximada mediante Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1}) + f(b) \right], \text{ esto es}$$

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx \approx \frac{0.25}{3} \left[\sqrt{1} + 2\sqrt{1.5} + 4\sqrt{1.25} + 4\sqrt{1.75} + \sqrt{2} \right] = 1.2189451568570861539 \dots$$

y la diferencia entre ambas resulta $0.625964 \dots \times 10^{-5}$, valor inferior a la cota obtenida.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 3 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

Ejercicio 2.-

(a) Obtener la regla general de integración numérica cuando se aproxima la función $f(x)$ por un polinomio de primer grado.

(b) Calcular el valor de δ para que $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} - \delta\right) \left(x - \frac{a+b}{2} + \delta\right) dx = 0$

(c) Particularizar la regla anterior cuando se toman $\left\{\left(\frac{a+b}{2} - \delta\right), \left(\frac{a+b}{2} + \delta\right)\right\}$ como puntos de interpolación. Acotar asimismo el valor del error cometido.

(d) Utilizando el resultado hallado, calcular la regla de integración compuesta cuando el intervalo (a, b) se subdivide en N intervalos de ancho $h = \frac{b-a}{N}$.

Apartado (a) Obtención de la fórmula de interpolación

Sabemos que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_1(x) dx + \int_a^b f[x_1, x_2, x] (x-x_1)(x-x_2) dx \quad \text{con} \quad P_1(x) = f(x_1) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} + f(x_2) \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Integrando el polinomio, se tiene

$$\int_a^b P_1(x) dx = f(x_1) \int_a^b \frac{x-x_2}{x_1-x_2} dx + f(x_2) \int_a^b \frac{x-x_1}{x_2-x_1} dx = \frac{f(x_1)}{2(x_1-x_2)} \left[(x-x_2)^2 \right]_a^b + \frac{f(x_2)}{2(x_2-x_1)} \left[(x-x_1)^2 \right]_a^b$$

esto es

$$\int_a^b P_1(x) dx = \frac{1}{2(x_2-x_1)} \left\{ f(x_2) \left[(b-x_1)^2 - (a-x_1)^2 \right] - f(x_1) \left[(b-x_2)^2 - (a-x_2)^2 \right] \right\}$$

Apartado (b) Determinación del valor de δ

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} - \delta\right) \left(x - \frac{a+b}{2} + \delta\right) dx &= \int_a^b \left\{ \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \delta^2 \right\} dx = \frac{1}{3} \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \right]_a^b - \delta^2 [x]_a^b \\ \frac{1}{3} \left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3 \right] - \delta^2 [b-a] &= (b-a) \left[\frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \delta^2 \right] = 0 \rightarrow \delta = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 4 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

Apartado (c) Aplicación de la regla a los valores hallados

Tenemos que $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b P_1(x) dx + E_n(x)$, siendo $E_n(x) = \int_a^b f[x_1, x_2, x](x-x_1)(x-x_2) dx$

Por tanto, se obtiene la siguiente regla de integración,

$$\int_a^b P_1(x) dx = \frac{f(x_m - \delta)}{-2\delta} \left[(x - x_m - \delta)^2 \right]_a^b + \frac{f(x_m + \delta)}{2\delta} \left[(x - x_m + \delta)^2 \right]_a^b = \frac{b-a}{2} \{ f(x_m - \delta) + f(x_m + \delta) \}$$

Determinamos ahora el error cometido $E_n(x) = \int_a^b f[x_1, x_2, x](x-x_1)(x-x_2) dx$

Como $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} - \delta \right) \left(x - \frac{a+b}{2} + \delta \right) dx = 0$, y recordando que

$$f[x_1, x_2, \dots, x_n, x] = f[x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}] + f[x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x](x - x_{n+1})$$

se llega a que

$$E_n(x) = \int_a^b f[x_1, x_2, x_3, x](x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) dx$$

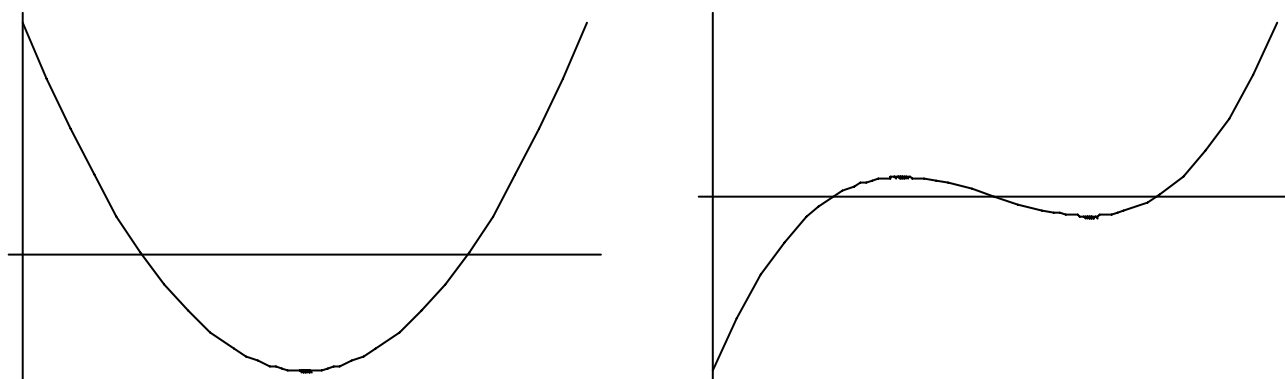


Figura 1. Representación de las funciones $(x-x_1)(x-x_2)$ y $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Debemos elegir el valor de x_3 de forma que el producto no cambie de signo o su integral sea nula.

Lo primero es imposible de conseguir, mientras que anular la integral se logra tomando $x_3 = (a+b)/2$.

Con este valor, la integral es nula de nuevo, obteniendo

$$E_n(x) = \int_a^b f[x_1, x_2, x_3, x_3, x](x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)^2 dx$$

Puesto que ya no se consigue anular la integral del producto ni mantener su signo (ver Figura 1), es necesario subdividir el intervalo para poder aplicar el Teorema del Valor Medio para Integrales.

Teniendo en cuenta que

$$\int_a^b g(x) dx \leq \left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq \left| \int_a^{x_1} g(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_3} g(x) dx \right| + \left| \int_{x_3}^{x_2} g(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^b g(x) dx \right|$$

y que en cada subintervalo el producto no cambia de signo, se llega finalmente a que

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 5 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

$$|E_n(x)| \leq \frac{(b-a)^5}{6480} \left\{ \frac{|f^{(4)}(\xi_1)|}{4!} (18 + \sqrt{3}) + \frac{|f^{(4)}(\xi_2)|}{4!} \sqrt{3} + \frac{|f^{(4)}(\xi_3)|}{4!} \sqrt{3} + \frac{|f^{(4)}(\xi_4)|}{4!} (18 + \sqrt{3}) \right\}$$

Que se puede acotar como

$$|E_n(x)| \leq \frac{(9 + \sqrt{3})}{1620} \frac{|f^{(4)}(\zeta)|}{4!} (b-a)^5$$

Apartado (d) Regla de integración compuesta

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) \right\}$$

$$|E_n(x)| \leq \frac{(9 + \sqrt{3})}{1620} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{|f^{(4)}(\xi_i)|}{4!} h^5 \leq \frac{(9 + \sqrt{3})}{1620} \frac{|f^{(4)}(\zeta)|}{4!} h^4 (b-a)$$

Ejercicio 3.-

- Utilizando el desarrollo en serie de Taylor en los puntos $\{a-h, a+h\}$, obtener las fórmulas de derivación numérica para $f'(a)$ y $f''(a)$.
- ¿Es posible conseguir dichas fórmulas de tres puntos a partir del polinomio de interpolación en los puntos $\{a-h, a+h\}$? Justifíquese la respuesta.
- ¿Se puede emplear el método de extrapolación de Richardson para obtener una fórmula de cinco puntos $\{a-2h, a-h, a, a+h, a+2h\}$ para $f'(a)$ a partir de la fórmula anterior de 3 puntos?. En caso afirmativo, calcularla.
- Justificar que el resultado de la fórmula de derivación de 3 puntos no mejora cuando $h \rightarrow 0$. ¿A qué es debido?

Apartado (a) Obtención de las fórmulas por desarrollo de Taylor

Partimos de los desarrollos en serie de Taylor de orden dos en los puntos $\{a-h, a+h\}$:

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a) + \frac{h^3}{3!} \cdot f'''(\xi_1(x)) \quad a-h < \xi_1(x) < a+h$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 6 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

$$f(a-h) = f(a) - h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a) - \frac{h^3}{3!} \cdot f'''(\xi_2(x)) \quad a-h < \xi_2(x) < a+h$$

Restando:

$$f(a+h) - f(a-h) = 2 \cdot h \cdot f'(a) - \frac{h^3}{3!} [f'''(\xi_1(x)) + f'''(\xi_2(x))]$$

Si $f'''(x)$ es continua en $[a-h, a+h]$, aplicando el T^{ma} del Valor Medio, existe $\xi \in (a-h, a+h)$ tal que $f'''(\xi_1(x)) + f'''(\xi_2(x)) = 2 \cdot f'''(\xi)$ y por tanto

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2 \cdot h} - \frac{h^2}{3!} \cdot f'''(\xi) \quad \text{con } a-h < \xi < a+h$$

De forma similar, si sumamos los desarrollos de orden tres

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a) + \frac{h^3}{3!} \cdot f'''(a) + \frac{h^4}{4!} \cdot f^{(4)}(\xi_1(x)) \quad a-h < \xi_1(x) < a+h$$

$$f(a-h) = f(a) - h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a) - \frac{h^3}{3!} \cdot f'''(a) + \frac{h^4}{4!} \cdot f^{(4)}(\xi_2(x)) \quad a-h < \xi_2(x) < a+h$$

Obtenemos la fórmula de la derivada segunda (con un tratamiento análogo del término del error):

$$f''(a) = \frac{1}{h^2} \cdot [f(a-h) + f(a+h) - 2 \cdot f(a)] - \frac{h^2}{12} \cdot f^{(4)}(\xi) \quad a-h < \xi < a+h$$

Apartado (b) Obtención de la fórmula de tipo interpolatorio

Expresando el polinomio de interpolación en forma de Lagrange, se tiene

$$\begin{aligned} P(x) &= L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1) + L_2(x) \cdot f(x_2) = \\ &= \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2)} \cdot f(x_1) + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1)}{(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1)} \cdot f(x_2) \end{aligned}$$

Y la función se puede escribir como:

$$f(x) = \sum_{j=0}^2 L_j(x) \cdot f(x_j) + f'''(\xi(x)) \cdot \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)}{3!}$$

Diferenciando:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{j=0}^2 L'_j(x) \cdot f(x_j) + D_x \left[\frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)}{3!} \right] \cdot f'''(\xi(x)) + \\ &\quad + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)}{3!} \cdot D_x [f'''(\xi(x))] \end{aligned}$$

Para $x = x_j$ el último término se anula, y la relación se reduce a:

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 7 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

$$f'(x_1) = \sum_{j=0}^2 L'_j(x_1) \cdot f(x_j) + \frac{1}{3!} \cdot f'''(\xi(x_1)) \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^2 (x_1 - x_i)$$

$$\text{donde } L'_0(x) = \frac{2 \cdot x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)}, L'_1(x) = \frac{2 \cdot x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} \text{ y } L'_2(x) = \frac{2 \cdot x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)}$$

Tomando $x_1 = a$, se tiene que $x_0 = a - h$, $x_2 = a + h$ y $x = a + sh$, obteniéndose de nuevo

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2 \cdot h} - \frac{h^2}{3!} \cdot f'''(\xi) \quad a-h < \xi < a+h$$

Para obtener la fórmula de la derivada segunda derivamos la expresión de la derivada primera:

$$f'(x) = \sum_{j=0}^2 L'_j(x) \cdot f(x_j) + \frac{1}{3!} \cdot f'''(\xi(x)) \cdot [(x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1)] + \\ + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)}{3!} \cdot f^{(4)}(\xi(x))$$

$$f''(x) = \sum_{j=0}^2 L''_j(x) \cdot f(x_j) + \frac{1}{3!} \cdot f'''(\xi(x)) \cdot [2 \cdot (x-x_0) + 2 \cdot (x-x_1) + 2 \cdot (x-x_2)] + \\ + \frac{1}{3} [(x-x_1) \cdot (x-x_2) + (x-x_0) \cdot (x-x_2) + (x-x_0) \cdot (x-x_1)] \cdot f^{(4)}(\xi(x)) + \\ + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)}{3!} \cdot D_x [f^{(4)}(\xi(x))]$$

De nuevo, para $x = x_j$ el último término se anula, quedando

$$f''(x_i) = \sum_{j=0}^2 L''_j(x_i) \cdot f(x_j) + \frac{1}{3!} \cdot f'''(\xi(x_i)) \cdot [2 \cdot (x_i - x_0) + 2 \cdot (x_i - x_1) + 2 \cdot (x_i - x_2)] + \\ + \frac{1}{3} [(x_i - x_1) \cdot (x_i - x_2) + (x_i - x_0) \cdot (x_i - x_2) + (x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1)] \cdot f^{(4)}(\xi(x_i))$$

$$\text{donde } L''_0(x) = \frac{2}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)}, L''_1(x) = \frac{2}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} \text{ y } L''_2(x) = \frac{2}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)}$$

Sustituyendo para $x = x_1$:

$$f''(x_1) = \left[\frac{2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \right] \cdot f(x_0) + \left[\frac{2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \right] \cdot f(x_1) + \\ + \left[\frac{2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \right] \cdot f(x_2) + \frac{1}{6} \cdot f'''(\xi(x_1)) \cdot [2 \cdot (x_1 - x_0) + 2 \cdot (x_1 - x_2)] + \\ + \frac{1}{3} \cdot f^{(4)}(\xi(x)) \cdot [(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)]$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 8 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

Tomando $x_1 = a$, se tiene que $x_0 = a - h$, $x_2 = a + h$ y $x = a + sh$, obteniéndose de nuevo

$$f''(a) = \frac{1}{h^2} \cdot [f(a-h) + f(a+h) - 2 \cdot f(a)] - \frac{h^2}{3} \cdot f^{(4)}(\xi) \quad a-h < \xi < a+h$$

Apartado (c) Extrapolación de Richardson

La formula de 5 puntos se obtiene utilizando la extrapolación de Richardson a partir de la fórmula de tres puntos. Si se hubiera desarrollado Taylor hasta orden cuatro, se tendría que

$$f'(a) = \frac{1}{2 \cdot h} \cdot [f(a+h) - f(a-h)] - \frac{h^2}{6} \cdot f'''(a) - \frac{h^4}{120} f^{(5)}(\zeta) \quad a-h < \zeta < a+h \quad (I)$$

Sustituyendo h por 2h:

$$f'(a) = \frac{1}{4 \cdot h} \cdot [f(a+2h) - f(a-2h)] - \frac{4h^2}{6} \cdot f'''(a) - \frac{16h^4}{120} f^{(5)}(\eta) \quad a-2h < \zeta < a+2h \quad (II)$$

Eliminando entre (I) y (II) el término en h^2

$$3 \cdot f'(a) = \frac{2}{h} \cdot [f(a+h) - f(a-h)] - \frac{1}{4h} \cdot [f(a+2h) - f(a-2h)] - \frac{h^4}{30} \cdot f^{(5)}(\zeta) + \frac{2h^4}{15} \cdot f^{(5)}(\eta)$$

Si $f^{(5)}$ es continua en $[a-2h, a+2h]$, entonces existe un $\xi \in (a-2h, a+2h)$ tal que:

$$\frac{2h^4}{15} \cdot f^{(5)}(\eta) - \frac{h^4}{30} \cdot f^{(5)}(\zeta) = \frac{3}{30} \cdot h^4 \cdot f^{(5)}(\xi)$$

Obteniendo finalmente la fórmula de cinco puntos

$$f'(a) = \frac{1}{12h} \cdot [f(a-2h) - 8 \cdot f(a-h) + 8 \cdot f(a+h) - f(a+2h)] + \frac{h^4}{30} \cdot f^{(5)}(\xi) \quad a-2h < \xi < a+2h$$

Apartado (d) Pérdida de precisión cuando $h \rightarrow 0$

Partimos de la fórmula

$$f'(a) = N(a, h) - \frac{h^2}{3!} \cdot f'''(\xi) \quad \text{con} \quad N(a, h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2 \cdot h}$$

Pero al operar con aritmética finita se tiene que

$$\tilde{N}(a, h) = \frac{\tilde{f}(a+h) - \tilde{f}(a-h)}{2 \cdot h} \cong \frac{f(a+h) + \varepsilon_1 - f(a-h) + \varepsilon_2}{2 \cdot h} \quad \text{donde } |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| < \varepsilon \text{ es el error de repre-}$$

sentación de la máquina. Así pues

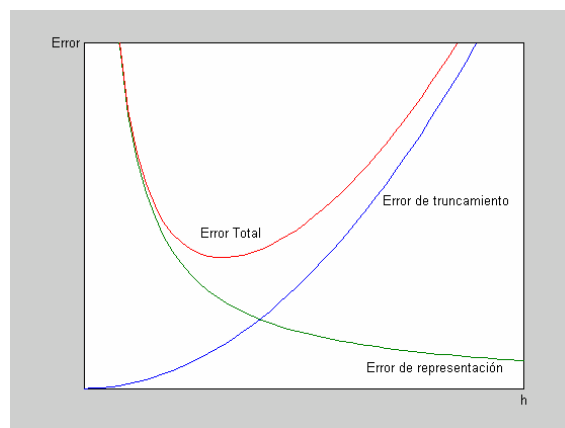
$$E(h) = |f'(a) - \tilde{N}(a, h)| \leq |f'(a) - N(a, h)| + |N(a, h) - \tilde{N}(a, h)| = \frac{h^2}{3!} \cdot M + \frac{\varepsilon}{h}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 9 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

siendo $M \geq \max_{a-h \leq x \leq a+h} |f'''(x)|$

El error tiene un mínimo en $h_{opt} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \varepsilon}{M}}$

En la práctica no podemos calcular el valor de h óptimo, ya que la cota del error de representación depende de la máquina y M depende de la función y del intervalo en estudio.



Ejercicio 4.- De un móvil cuyo desplazamiento viene dado por $S(t)$ se conocen los valores de $S(0), S(1), S(4), S(5), S(7), S(9)$, así como su velocidad para $t=0$ y $t=9$. ¿Existe algún método de interpolación que nos permita acotar el valor máximo de la aceleración para $0 \leq t \leq 9$ sabiendo que $S^{(k)}(t)$ está acotada para $0 \leq t \leq 9$ y $0 \leq k \leq 5$? En caso afirmativo, calcular dicha cota.

Los métodos de interpolación polinomial clásica permiten acotar el error entre la función y el polinomio interpolador. Pero cuando se deriva dicho polinomio, el error con la derivada de la función sólo se puede acotar en los puntos de interpolación, y no en todo el intervalo. Por tanto tendremos que acudir a otro tipo de interpolación, mediante splines cúbicas. Puesto que nos dan el valor de la derivada de la función en los extremos, debemos usar una spline sujeta. En este caso, la fórmula del error cometido viene dada por

$$\|f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)\|_{\infty} \leq c_k h^{4-k} \|f^{(4)}(x)\|_{\infty} \text{ donde } c_0 = \frac{5}{384}, c_1 = \frac{1}{24}, c_2 = \frac{3}{8} \text{ y } h = \max_i (x_{i+1} - x_i)$$

Por tanto, si $\|f^{(4)}(x)\|_{\infty} < M$ entonces

$$\|f''(x) - S''(x)\|_{\infty} \leq \frac{3}{8} 3^2 M = \frac{27}{8} M$$

Nota: esta acotación es muy grosera, puesto que la fórmula anterior era aplicable cuando $h \rightarrow 0$, y en este caso el valor de h es aún muy grande.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 10 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

Ejercicio 5.- Una partícula m que se desplaza por un fluido esta sujeta a una resistencia viscosa R , la cual es función de la velocidad v . La relación entre la resistencia R , la velocidad v , y el tiempo t viene dada por la ecuación

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)} du. \text{ Sea } R(v) = -\sqrt{v^3} \text{ para un determinado fluido, donde } R \text{ se da en N}$$

y v en m/s. Si $m=10\text{Kg}$ y $v(0)=10\text{m/s}$, aproxime el tiempo que la partícula tarda en reducir su velocidad a 5m/s.

- Utilizando la regla del trapecio compuesta con un error inferior a 0'1s.
- Utilizando el método de integración adaptativa de Simpson con un error inferior a 0'0005s.
- Utilizando integración analítica. Utilícese este resultado para verificar las cotas de error de los apartados anteriores.

a) Regla del trapecio compuesta

Al aplicar la regla del trapecio a n intervalos se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right] - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \text{ donde } h = \frac{b-a}{n} \text{ y } x_k = a + kh.$$

Se debe asegurar un error ε inferior a 0'1 s, esto es

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right] \right| \leq \left| \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \right| < \varepsilon$$

El enunciado indica que $f(x) = -mx^{-3/2}$, por tanto $f'(x) = \frac{3}{2}mx^{-5/2}$, $f''(x) = -\frac{15}{4}mx^{-7/2}$ y al ser f''

negativa y monótona creciente en el intervalo

$$\max_{x \in [5,10]} |f''(x)| \leq |f''(5)| = \frac{15}{4} 10 \times 5^{-7/2} \approx 0'1341640787...$$

Por tanto

$$\left| \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \right| \leq \left| \frac{b-a}{12} h^2 \right| \times \max_{x \in [5,10]} |f''(x)| = \frac{10-5}{12} h^2 0'1341640787... < 0'1 \Rightarrow |h| < 1'3375...$$

lo que exige que $n \geq \frac{|b-a|}{h} = \frac{|5-10|}{1'3375} \approx 3'7384$, esto es, 4 intervalos.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 11 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

$$\int_{10}^5 \frac{-10}{x\sqrt{x}} dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right] = \frac{-1.25}{2} \left[f(10) + 2 \{ f(8.75) + f(7.5) + f(6.25) \} + f(5) \right] =$$

$$= -0.625 \left[-0.3162 + 2 \{ -0.3864 - 0.4869 - 0.6400 \} - 0.8944 \right] = 2.6482$$

b) Integración Adaptativa

Denotando la regla de Simpson por $S(a, b) = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$, se ha visto que,

bajo las hipótesis de un valor similar de las derivadas de $f^{(v)}(x)$, se tiene que

$$\left| S(a, b) - \left\{ S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right\} \right| < 15\varepsilon \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \left\{ S\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + S\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right\} \right| < \varepsilon$$

Realizando las operaciones

Intervalo	$S(a, b)^{[1]}$	$S(a, \frac{a+b}{2})^{[2]}$	$S(\frac{a+b}{2}, b)^{[3]}$	[2]+[3]	[1]-[2]-[3]	15ε	¿Válido?
[10,5]	2.6318	0.9785	1.6422	2.6208	0.0110	0.0075	NO
[10,7.5]	0.9785	0.4367	0.5417	0.9784	0.0008	0.003625	SI
[7.5,5]	1.6422	0.6970	0.9443	1.6414	0.0001	0.003625	SI

La integral vendrá dada como $1.6414 + 0.9784 = 2.6198$

c) Integración analítica

$$\int_{10}^5 \frac{-10}{x\sqrt{x}} dx = \left[\frac{20}{\sqrt{x}} \right]_{10}^5 = \frac{20}{\sqrt{5}} - \frac{20}{\sqrt{10}} = 2.6197...$$

Regla del trapecio compuesta: $|2.6197 - 2.6482| = 0.0285$ mucho menor que el error exigido.

Regla adaptativa: $|2.6197 - 2.6198| = 0.0001$ mucho menor que el error exigido.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 12 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

Ejercicio 6.- Dada la función $f(x)=x \operatorname{sen}(x)$

- Se pretende tabular mediante puntos equidistantes. Determinar el número de puntos necesarios en el intervalo $(0, \pi)$ para que al interpolar linealmente entre dos de ellos se obtenga un error menor de una milésima.
- Determinar el polinomio de interpolación que coincide con la función en $\{0, \pi/2, \pi\}$ y con su derivada en los extremos. Acotar el error que se comete al sustituir la función por un polinomio.
- Acotar el error cometido cuando se utiliza la derivada del polinomio anterior para aproximar a $f'(\pi/2)$. Compara dicha cota con el error real ¿Se puede acotar el error en todo el intervalo? En caso afirmativo, cual es la cota.
- Calcular la integral definida en el intervalo y acotar el error cometido. Comparar dicha cota con el error real

Apartado (a) Tabulación de valores

En el caso de interpolación lineal, se tiene que $f(x) = P_1(x) + f[x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1)$ con

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \text{ y } f[x_0, x_1] = \frac{f''(\xi)}{2!}.$$

Para asegurar el error pedido, es necesario que $\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)(x - x_1) \right| < \varepsilon$

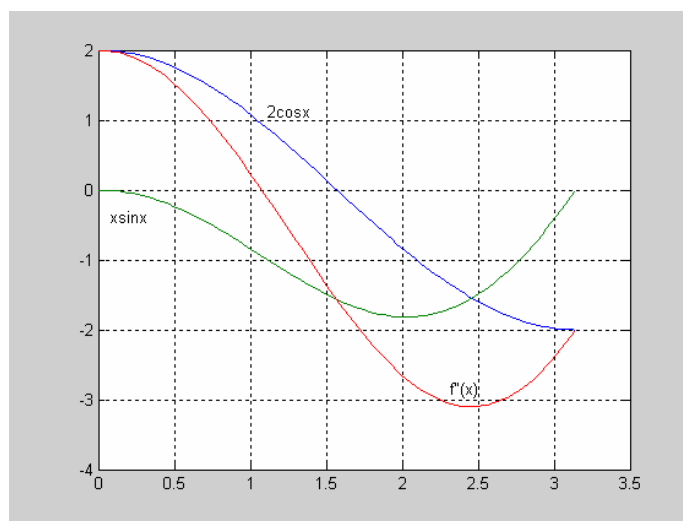
$$\text{Pero } \max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)(x - x_1) \right| \leq \max_{x \in [0, \pi]} \left| \frac{f''(\xi)}{2!} \right| \max_{x \in [x_0, x_1]} |(x - x_0)(x - x_1)|$$

Acotando cada término por separado

$$f(x) = x \sin x \quad f'(x) = \sin x + x \cos x \quad f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$$

El máximo de la función se obtiene para $f'''(x) = 0 \rightarrow x = -3 \tan x$, ecuación que no admite solución analítica. La representación aproximada de la función nos muestra un extremo en el intervalo $[\pi/2, \pi]$. Realizando una acotación grosera, tendremos

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |f''(x)| \leq \max_{0 \leq x \leq \pi} |2 \cos x| + \max_{0 \leq x \leq \pi} |-x \sin x| = 2 + \pi$$



Representación de $f''(x)$ en $[0, \pi]$

Por otro lado, denotando por $sh = x - x_0$ se tiene $x - x_1 = (s-1)h$ y $x - x_2 = z - h$

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |(x - x_0)(x - x_1)| = \max_{s \in [0, 1]} |h^2 s(s-1)| = \frac{h^2}{4}$$

Por tanto

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \frac{f''(\xi)}{2} (x - x_0)(x - x_1) \right| \leq \frac{2 + \pi}{2} \frac{h^2}{4} < \varepsilon = 0.001 \rightarrow h \approx 0.0395$$

$$\text{y } n \geq \frac{x_n - x_0}{h} = \frac{\pi - 0}{0.0395} = 79.6$$

Apartado (b) Interpolante que coincide con la función en $\{0, \pi/2, \pi\}$

Por las condiciones exigidas se deduce que se trata de un “spline sujeta”, o bien tendremos que acudir a fórmulas de diferencias divididas generalizadas.

Comencemos aplicando diferencias divididas generalizadas:

	$f(z_k)$	$f[z_k, z_{k+1}]$	$f[z_k, \dots, z_{k+2}]$	$f[z_k, \dots, z_{k+3}]$	$f[z_k, \dots, z_{k+4}]$
$z_0 = 0$	0				
$z_1 = 0$	0	$f'(0) = 0$			
$z_2 = \pi/2$	$\pi/2$	1	$2/\pi$		
$z_3 = \pi$	0	-1	$-2/\pi$	$-4/\pi^2$	
$z_4 = \pi$	0	$f'(\pi) = -\pi$	$2/\pi - 2$	$4/\pi^2 - 2/\pi$	$8/\pi^3 - 2/\pi^2$

Puesto que, utilizando la forma de diferencias divididas generalizadas, se tiene que

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 14 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

$$f(x) = \sum_{k=0}^N f[x_0, \dots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) + f[x_0, \dots, x_N, x] \prod_{i=0}^k (x - x_i)$$

el polinomio de interpolación pedido será

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^4 f[x_0, \dots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = 0 + 0x + \frac{2}{\pi} x^2 - \frac{4}{\pi^2} x^2 (x - \frac{\pi}{2}) + \frac{8-2\pi}{\pi^3} x^2 (x - \frac{\pi}{2})(x - \pi) =$$

$$= 0.0554x^4 - 0.6620x^3 + 1.5465x^2$$

cuyo error viene dado por

$$E_4(x) = f[x_0, \dots, x_N, x] \prod_{i=0}^k (x - x_i) = \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!} (x-0)^2 (x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)^2$$

Acotando, se tiene que

$$|E_4(x)| \leq \max_{0 \leq x \leq \pi} \left| \frac{f^{(5)}(x)}{5!} \right| \max_{0 \leq x \leq \pi} \left| (x-0)^2 (x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)^2 \right| \leq \max_{0 \leq x \leq \pi} |5 \sin x + x \cos x| \frac{\pi^5/32}{5!} \leq$$

$$\leq 9.56 \frac{1}{5!} (5 \cdot 1 + \pi \cdot 1) = 0.649$$

Repetimos ahora los cálculos utilizando “splines” sujetos. Tendremos que

$$S(x) = \begin{cases} a_0(x-x_0)^3 + b_0(x-x_0)^2 + c_0(x-x_0) + d_0 & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ a_1(x-x_1)^3 + b_1(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1) + d_1 & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

Denotando por $h_0 = x_1 - x_0 = \frac{\pi}{2}$ y por $h_1 = x_2 - x_1 = \frac{\pi}{2}$ se llega al sistema

$$\begin{pmatrix} 2h_0 & h_1 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} f(x_0, x_1) - f'(0) \\ f(x_2, x_1) - f(x_0, x_1) \\ f'(\pi) - f(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Calculando los coeficientes y resolviendo

$$\begin{pmatrix} \pi & \pi/2 & 0 \\ \pi/2 & 2\pi & \pi/2 \\ 0 & \pi/2 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1-\pi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4049 \\ -0.9099 \\ 1.5901 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores para obtener los coeficientes de la “spline” sujeta en cada intervalo

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 15 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

$$\text{Intervalo} \quad a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{3h_i} \quad b_i \quad c_i = f[x_{i+1}, x_i] - \frac{b_{i+1} + 2b_i}{3} \quad d_i = f(x_i)$$

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad a_0 = -0.4923 \quad b_0 = 1.4099 \quad c_0 = 0 \quad d_0 = 0$$

$$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad a_1 = -0.1444 \quad b_1 = -0.9099 \quad c_1 = 0.7854 \quad d_1 = 1.5708$$

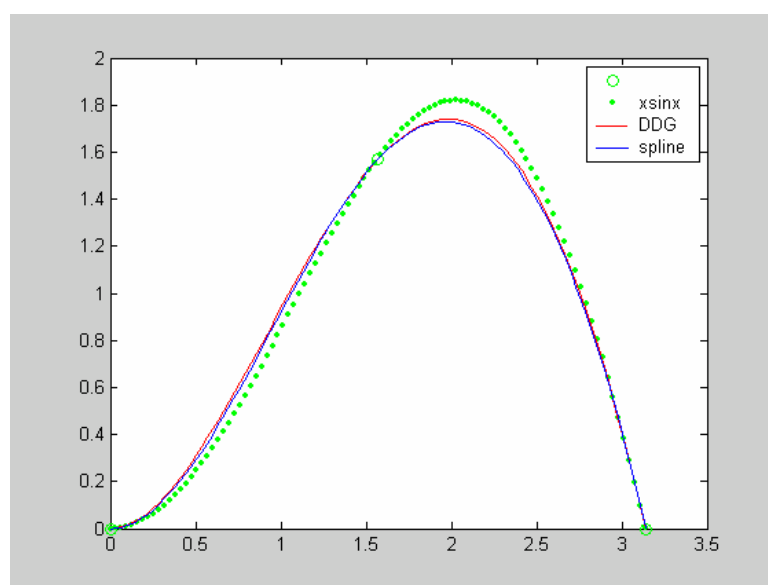
Obteniéndose finalmente

$$S(x) = \begin{cases} -0.4923x^3 + 1.4099x^2 & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ -0.1444\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - 0.9099\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 0.7854\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1.5708 & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

El error que se comete al sustituir la función por dicho polinomio viene dado por:

$$\begin{aligned} |f(x) - S(x)| &\leq \frac{5}{384} \max |f^{(iv)}(\xi)| h^4 = \frac{5}{384} \max |-4 \cos x + x \sin x| \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \leq \\ &\leq \frac{5}{384} (4 \cdot 1 + \pi \cdot 1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = 0.566 \end{aligned}$$

Se observa que, en este caso, la “spline” sujeta consigue la menor cota de error, aunque la comparación de ambas (ver figura) no muestra claramente dicha ventaja.



Comparación de $f(x)$ con el polinomio de diferencias divididas generalizadas y la spline en $[0, \pi]$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 16 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

Apartado (c) Acotación de la derivada

Utilizando polinomios de interpolación no era posible acotar la derivada salvo en los puntos de interpolación. Para poder acotarla en todo el intervalo es necesario utilizar el “spline” sujeto. La expresión del error para ambos casos viene dada por

$$\left| f' \left(\frac{\pi}{2} \right) - P' \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| \leq \max_{0 \leq x \leq \pi} \frac{|f^{(v)}(x)|}{5!} \left| \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \pi \right)^2 \right| = \frac{5 + \pi}{5!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 = 0.413 \text{ y}$$

$$|f'(x) - S'(x)| \leq \frac{1}{24} \max |f^{(iv)}(\xi)| h^3 = \frac{1}{24} (4 + \pi) \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 = 1.15 \text{ respectivamente, si bien se ha de}$$

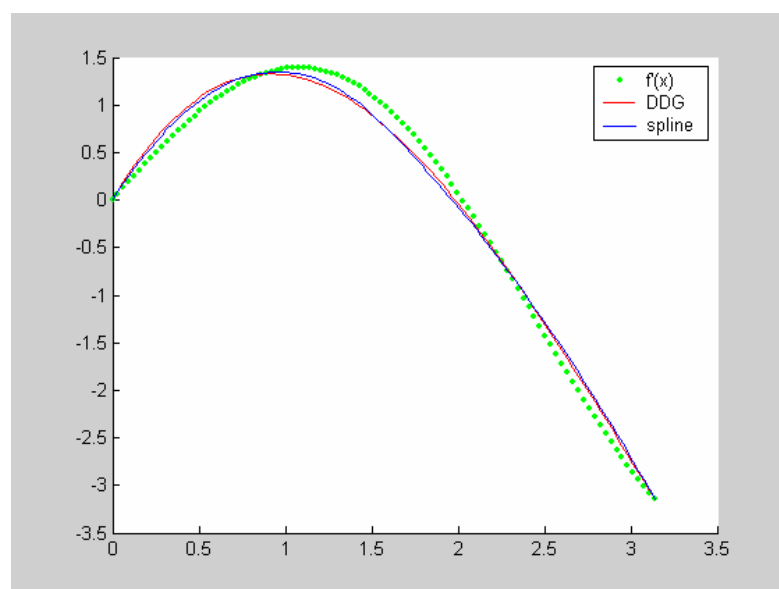
destacar que sólo la “spline” sujeta acota el error en todo el intervalo.

Puesto que $f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$ el error real en cada caso será:

$$P'(x) = 0.2215x^3 - 1.9986x^2 + 3.0930x \rightarrow P' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.7854 \Rightarrow E = 0.2146$$

$$S'(x) = \begin{cases} -1.4767x^2 + 2.8197x & x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \\ -0.4331 \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2 - 1.8197 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + 0.7854 & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \end{cases} \rightarrow S' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.7854 \Rightarrow E = 0.2146$$

La similitud de ambas funciones se puede observar en la siguiente figura



Comparación de las derivadas de $f(x)$, el polinomio de diferencias divididas generalizadas y la spline en $[0, \pi]$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 17 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

Apartado (d) Acotación de la integral

Integramos cada uno de los dos casos, acotando su error. Previamente integramos la función

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = [\sin x - x \cos x]_0^{\pi} = \pi$$

En el caso del polinomio, el error viene acotado por

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} (f(x) - P(x)) \, dx \right| &= \left| \int_0^{\pi} \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!} (x-0)^2 (x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)^2 \, dx \right| \leq \left| \frac{f^{(5)}(\eta_x)}{6!} \right| \int_0^{\pi} (x-0)^2 (x-\frac{\pi}{2})^2 (x-\pi)^2 \, dx \leq \\ &\leq \frac{6+\pi}{6!} 3.5956 = 0.0457 \end{aligned}$$

y el error real por

$$\int_0^{\pi} (f(x) - P(x)) \, dx = \int_0^{\pi} f(x) \, dx - \int_0^{\pi} P(x) \, dx = \pi - 3.1487 = -0.0071$$

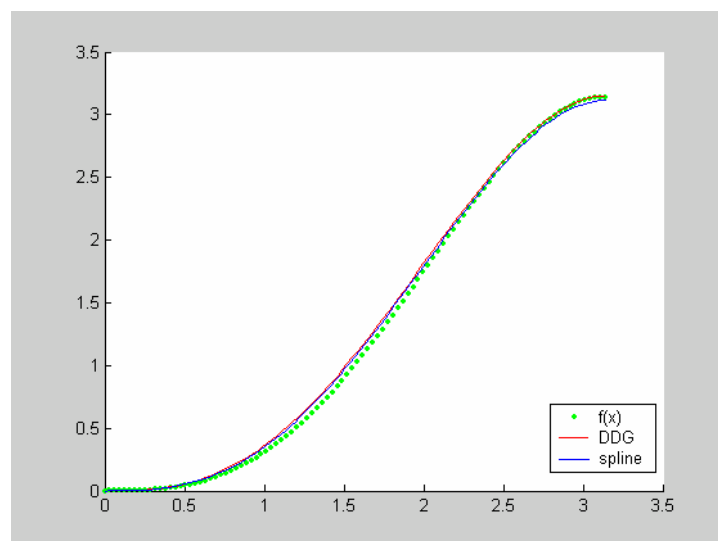
En el caso de la spline

$$\left| \int_0^{\pi} (f(x) - S(x)) \, dx \right| = \int_0^{\pi} \frac{5}{384} M h^4 \, dx = \frac{5}{384} (4+\pi) \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \pi = 1.7785$$

y el error real viene dado por

$$\int_0^{\pi} (f(x) - S(x)) \, dx = \int_0^{\pi} f(x) \, dx - \int_0^{\pi/2} S(x) \, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} S(x) \, dx = \pi - 3.1134 = 0.0282$$

Como se ve en la figura siguiente, en este caso la aproximación de Hermite consigue mejores resultados, aunque no tan destacables.



Comparación de las primitivas de $f(x)$, el polinomio de diferencias divididas generalizadas y la spline en $[0, \pi]$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 18 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

Ejercicio 7.- La determinación de la cantidad de calor ΔH (en calorías) requerido para elevar la temperatura de un material desde una temperatura inicial T_1 hasta T_2 depende de su capacidad calorífica $c(T)$ (en cal/g °C) mediante la expresión

$$\Delta H = m \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT$$

Se desea calcular el calor necesario para elevar la temperatura de 100 g de un material cuya capacidad calorífica viene dada por $c(T) = 0.132 + 1.56 \times 10^{-4}T + 2.64 \times 10^{-7}T^2$ desde -100 hasta 200°C .

- Calcular el calor de forma analítica exacta.
- Utilice la regla del trapecio simple para aproximar la integral. Calcule la cota de error y verifique que es mayor que el error real. Repita los cálculos subdividiendo la integral en dos, la primera de -100 a 0 y la segunda de 0 a 200 . ¿Cuántos puntos serían necesarios para calcularlo de forma aproximada utilizando la fórmula del trapecio compuesta con un error menor que 1 caloría?
- ¿Qué fórmula de aproximación numérica de las estudiadas sería más adecuada para calcular esta integral?. Justifíquese la respuesta.

Apartado (a) Valor analítico de forma exacta

$$\begin{aligned} \Delta H &= m \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT = 100 \int_{-100}^{200} (0.132 + 1.56 \times 10^{-4}T + 2.64 \times 10^{-7}T^2) dT = \\ &= 100 \left[0.132T + 7.8 \times 10^{-5}T^2 + 8.8 \times 10^{-8}T^3 \right]_{-100}^{200} = 4273.2 \end{aligned}$$

Apartado (b) Fórmula del trapecio

La regla viene dada por $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$, así pues

$$\Delta H = 100 \int_{-100}^{200} c(T) dT \approx \frac{200+100}{2} 100 (c(-100) + c(200)) = 150 (11.904 + 17.376) = 4392$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 19 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

con cota de error $E \leq \frac{(200+100)^3}{12} \max_{-100 \leq x \leq 200} |c''(T)| = \frac{300^3}{12} 5.28 \times 10^{-5} = 118.8$

El error real es $|4273.2-4392|=118.8$

Tomamos ahora los 2 intervalos indicados

$$\Delta H = 100 \int_{-100}^0 c(T) dT + 100 \int_0^{200} c(T) dT \approx \frac{0+100}{2} 100 (c(-100) + c(0)) + \frac{200-0}{2} 100 (c(0) + c(200)) =$$

$$= 50(11.904+13.2) + 100(13.2+17.376) = 4312.8$$

cuya cota de error viene dada por

$$E \leq \frac{(0+100)^3}{12} \max_{-100 \leq x \leq 0} |c''(T)| + \frac{(200+0)^3}{12} \max_{0 \leq x \leq 200} |c''(T)| = \frac{100^3 + 200^3}{12} 5.28 \times 10^{-5} = 39.6$$

El error real es ahora $|4273.2-4312.8|=39.6$

Se observa que en ambos casos la cota coincide con el error.

La fórmula del trapecio compuesta para $n+1$ puntos viene dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right) - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\zeta) \text{ con } a \leq \zeta \leq b, \text{ y donde } h = \frac{b-a}{n},$$

siendo $x_i = a + ih$.

Puesto que el error debe ser menor que 1 caloría, se tiene que

$$E = \left| \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\zeta) \right| \leq \frac{(200+100)h^2}{12} 5.28 \times 10^{-5} < 1 \text{ cal} \rightarrow h \leq \sqrt{\frac{12}{300 \cdot 5.28 \times 10^{-5}}} = 27.52 \text{ y por}$$

$$\text{tanto } n \geq \frac{b-a}{h} + 1 = \frac{300}{27.52} + 1 = 12$$

Apartado (c) Fórmula adecuada

Puesto que $c(T)$ es un polinomio de segundo grado, lo más adecuado sería utilizar fórmulas

simples cuyo error contenga $c^{(k)}(T)$, donde $k \geq 3$ para poder asegurar un error nulo. Aunque

existen fórmulas de Newton Cotes abiertas y cerradas que verifican esa condición, la más simple

viene dada por la regla de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\zeta), \text{ donde } h = \frac{b-a}{2} \text{ y } x_i = a + ih$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 20 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

Ejercicio 8.- Fugacidad f es un término que se emplea en ingeniería para describir la energía disponible en un proceso isotérmico. Para gases ideales coincide con la presión, pero en gases reales viene dada por la expresión

$$\ln \frac{f}{P_F} = \int_0^{P_F} \frac{C-1}{P} dP$$

donde C es el factor de compresibilidad, determinado experimentalmente, y P_F la presión a que se mide la fugacidad. Cuando la presión tiende a cero, el valor de C se aproxima a la unidad a mayor velocidad. Los valores del factor de compresibilidad para el metano vienen dados en la siguiente tabla.

$P(atm)$	1	10	20	40	60	80	120	160	250	400
C	0.9940	0.9370	0.8683	0.7043	0.4515	0.3429	0.4259	0.5252	0.7468	1.0980

- (a) ¿Cuál es el orden de las fórmulas del trapecio y del punto medio?. Suponiendo que el valor de C varía linealmente entre los valores tabulados ¿se obtiene el mismo resultado con ambas fórmulas?. Justificar la respuesta.
- (b) Manteniendo la hipótesis de que C varía linealmente entre los valores tabulados, obtener el valor de la fugacidad a 70 atm. utilizando la regla de Simpson compuesta.

Apartado (a) Orden de las fórmulas

Ambas fórmulas son de orden 1, esto es, exactas para polinomios de primer grado o menor.

Regla del trapecio: $\int_a^b g(x)dx = \frac{g(a)+g(b)}{2}(b-a) - \frac{(b-a)^3}{12}g''(\xi)$ donde $a \leq \xi \leq b$

Regla del punto medio: $\int_a^b g(x)dx = g\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{(b-a)^3}{24}g''(\zeta)$ donde $a \leq \zeta \leq b$

Los resultados de ambas coinciden cuando la función es lineal, pero aunque el comportamiento de

C es lineal, la función $g(P) = \frac{C(P)-1}{P}$ no lo es, y por tanto

$$\frac{g(a)+g(b)}{2} = \frac{C(a)-1}{2a} + \frac{C(b)-1}{2b} \neq g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{C\left(\frac{a+b}{2}\right)-1}{\frac{a+b}{2}} = \frac{\frac{C(a)+C(b)}{2}-1}{\frac{a+b}{2}} = \frac{C(a)+C(b)-2}{a+b}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 21 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

Apartado (b)

Se necesita determinar $\ln \frac{f}{70} = \int_0^{70} \frac{C-1}{P} dP$, para lo cual es preciso primero conocer $C(70)$. Puesto que nos dicen que varía linealmente entre los valores tabulados, interpolamos su valor en el intervalo $[60,80]$ mediante diferencias divididas de Newton

$$C(P) = C(80) + (P-80) \frac{C(60) - C(80)}{60-80}, \text{ esto es, } C(70) = 0.3972.$$

Los puntos de la tabla no están equiespaciados, por lo tanto no podremos plantear el uso de la regla de Simpson compuesta, sino que es necesario aplicarla a cada subintervalo, así tendremos

$$\int_0^{70} g(P) dP = \int_0^1 g(P) dP + \int_1^{10} g(P) dP + \int_{10}^{20} g(P) dP + \int_{20}^{40} g(P) dP + \int_{40}^{60} g(P) dP + \int_{60}^{70} g(P) dP$$

y como

$$\int_a^b g(P) dP \approx \frac{b-a}{3} \left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right) = \frac{b-a}{3} \left(\frac{C(a)-1}{a} + 4 \frac{C(a)+C(b)-2}{a+b} + \frac{C(b)-1}{b} \right)$$

se tiene que

$$\int_0^1 g(P) dP \approx \frac{1}{3} \left(\frac{C(a)-1}{a} + 4 \frac{1+0.9940-2}{0+1} + \frac{0.9940-1}{1} \right) = -0.010 \quad (\text{puesto que } \lim_{a \rightarrow 0} \frac{C(a)-1}{a} = 0)$$

$$\int_1^{10} g(P) dP \approx \frac{10-1}{3} \left(\frac{0.9940-1}{1} + 4 \frac{0.9940+0.9370-2}{1+10} + \frac{0.9370-1}{10} \right) = -0.1122$$

$$\int_{10}^{20} g(P) dP \approx \frac{20-10}{3} \left(\frac{0.9370-1}{10} + 4 \frac{0.9370+0.8683-2}{10+20} + \frac{0.8683-1}{20} \right) = -0.1295$$

$$\int_{20}^{40} g(P) dP \approx \frac{40-20}{3} \left(\frac{0.8683-1}{20} + 4 \frac{0.8683+0.7043-2}{20+40} + \frac{0.7043-1}{40} \right) = -0.2831$$

$$\int_{40}^{60} g(P) dP \approx \frac{60-40}{3} \left(\frac{0.7043-1}{40} + 4 \frac{0.7043+0.4515-2}{40+60} + \frac{0.4515-1}{60} \right) = -0.3353$$

$$\int_{60}^{70} g(P) dP \approx \frac{70-60}{3} \left(\frac{0.4515-1}{60} + 4 \frac{0.4515+0.3972-2}{60+70} + \frac{0.3972-1}{70} \right) = -0.1773$$

y por tanto

$$\ln \frac{f}{70} \approx -1.0474 \rightarrow f \approx 70e^{-1.0474} = 24.56$$

Ejercicio 9.- Aproxime las siguientes integrales

$$1) \int_1^{10} \frac{1}{x} dx$$

$$2) \int_1^{5.5} \frac{1}{x} dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x} dx$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 22 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

- (a) Mediante las cuatro primeras fórmulas de Newton Cotes cerradas. ¿Son las exactitudes de las aproximaciones compatibles con las fórmulas de error? ¿Cuál sería la mejor aproximación?
- (b) Mediante las cuatro primeras fórmulas de Newton Cotes abiertas. ¿Son las exactitudes de las aproximaciones compatibles con las fórmulas de error? ¿Cuál sería la mejor aproximación?

Apartado (a) Fórmulas de Newton Cotes Cerradas

Comenzamos por calcular el valor exacto $\int_1^{10} f(x) dx = \int_1^{10} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{10} = \ln 10 = 2.3026$

y sus sucesivas derivadas $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

En las fórmulas cerradas de Newton-Cotes para calcular $\int_a^b f(x) dx$ con $n+1$ puntos se toma

$h = \frac{b-a}{n}$, y por tanto $x_k = a + kh$. Asimismo $x_0 \leq \zeta \leq x_n$.

n=1: Regla del trapecio

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3}{12} f''(\zeta)$$

$$1) \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \approx \frac{10-1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{10} \right) = 4.95 \text{ con error } E \leq \frac{9^3}{12} \max_{1 \leq x \leq 10} \left| \frac{2!}{x^3} \right| = \frac{9^3 2}{12} = 121.5$$

$$2) \int_1^{5.5} \frac{1}{x} dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x} dx \approx \frac{5.5-1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{5.5} \right) + \frac{10-5.5}{2} \left(\frac{1}{5.5} + \frac{1}{10} \right) = 2.6591 + 0.6341 = 3.2932 \text{ con error}$$

$$E \leq \frac{4.5^3}{12} \left(\max_{1 \leq x \leq 5.5} \left| \frac{2!}{x^3} \right| + \max_{5.5 \leq x \leq 10} \left| \frac{2!}{x^3} \right| \right) = \frac{4.5^3 2}{12} \left(1 + \frac{1}{5.5^3} \right) = 15.28$$

n=2: Regla de Simpson

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\zeta)$$

$$1) \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \approx \frac{4.5}{3} \left(\frac{1}{1} + 4 \frac{1}{5.5} + \frac{1}{10} \right) = 2.7409 \text{ con error } E \leq \frac{4.5^5}{90} \max_{1 \leq x \leq 10} \left| \frac{4!}{x^5} \right| = \frac{4.5^5 12}{90} = 246.0375$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 23 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

$$2) \int_1^{5.5} \frac{1}{x} dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x} dx \approx \frac{2.25}{3} \left(\frac{1}{1} + 4 \frac{1}{3.25} + \frac{1}{5.5} \right) + \frac{2.25}{3} \left(\frac{1}{5.5} + 4 \frac{1}{7.75} + \frac{1}{10} \right) = 2.4079 \quad \text{con error}$$

$$E \leq \frac{2.25^5}{90} \left(\max_{1 \leq x \leq 5.5} \left| \frac{4!}{x^5} \right| + \max_{5.5 \leq x \leq 10} \left| \frac{4!}{x^5} \right| \right) = \frac{2.25^5}{90} 4! \left(1 + \left| \frac{1}{5.5^5} \right| \right) = 15.3804$$

n=3: Regla de Simpson de tres octavos

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8} (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)) - \frac{3h^5}{80} f^{(iv)}(\zeta)$$

$$1) \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \approx \frac{3 \cdot 3}{8} \left(\frac{1}{1} + 3 \frac{1}{4} + 3 \frac{1}{7} + \frac{1}{10} \right) = 2.5634 \quad \text{con error } E \leq \frac{3 \cdot 3^5}{80} \max_{1 \leq x \leq 10} \left| \frac{4!}{x^5} \right| = 218.7$$

$$2) \int_1^{5.5} \frac{1}{x} dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x} dx \approx \frac{3 \cdot 1.5}{8} \left(\frac{1}{1} + 3 \frac{1}{2.5} + 3 \frac{1}{4} + \frac{1}{5.5} \right) + \frac{3 \cdot 1.5}{8} \left(\frac{1}{5.5} + 3 \frac{1}{7} + 3 \frac{1}{8.5} + \frac{1}{10} \right) = 2.3598 \quad \text{con error}$$

$$E \leq \frac{3 \cdot 1.5^5}{80} \left(\max_{1 \leq x \leq 5.5} \left| \frac{4!}{x^5} \right| + \max_{5.5 \leq x \leq 10} \left| \frac{4!}{x^5} \right| \right) = \frac{3 \cdot 1.5^5}{80} 4! \left(1 + \left| \frac{1}{5.5^5} \right| \right) = 6.8357$$

n=4

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{2h}{45} (7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)) - \frac{8h^7}{945} f^{(vi)}(\zeta)$$

$$1) \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \approx \frac{2 \cdot 2.25}{45} \left(7 \frac{1}{1} + 32 \frac{1}{3.25} + 12 \frac{1}{5.5} + 32 \frac{1}{7.75} + 7 \frac{1}{10} \right) = 2.3857 \quad \text{con cota de error}$$

$$E \leq \frac{8 \cdot 2.25^7}{945} \max_{1 \leq x \leq 10} \left| \frac{6!}{x^7} \right| = 1779.3784$$

$$2) \int_1^{5.5} \frac{1}{x} dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x} dx \approx \frac{3 \cdot 1.125}{8} \left(7 \frac{1}{1} + 32 \frac{1}{2.125} + 12 \frac{1}{3.25} + 32 \frac{1}{4.375} + 7 \frac{1}{5.5} \right) +$$

$$+ \frac{3 \cdot 1.125}{8} \left(7 \frac{1}{5.5} + 32 \frac{1}{6.625} + 12 \frac{1}{7.75} + 32 \frac{1}{8.875} + 7 \frac{1}{10} \right) = 2.3148$$

$$\text{con error } E \leq \frac{8 \cdot 1.125^7}{945} \left(\max_{1 \leq x \leq 5.5} \left| \frac{6!}{x^7} \right| + \max_{5.5 \leq x \leq 10} \left| \frac{6!}{x^7} \right| \right) = \frac{8 \cdot 1.125^7}{945} 6! \left(1 + \left| \frac{1}{5.5^7} \right| \right) = 1.7377$$

Presentando los resultados de forma tabular:

	Valor				Cota				Error			
n	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1)	4.95	2.7409	2.5634	2.3857	121.5	246.0	218.7	1779	2.6474	0.4383	0.2608	0.0831
2)	3.2932	2.4079	2.3598	2.3148	15.28	15.4	6.8	1.7	0.9906	0.1053	0.0572	0.0122

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 24 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

En todos los casos el error real es inferior a la cota, siendo preferible el segundo por tener menor cota de error. De todas formas, al ser la cota muy elevada, el valor calculado resulta de poca utilidad. Representándolo en forma de tabla se observa que al subdividir el intervalo, la cota del error disminuye drásticamente. Es así fácil de justificar el interés de la integración compuesta. Como era previsible, el menor error corresponde a la fórmula de 4 intervalos (5 puntos).

Apartado (b) Fórmulas de Newton Cotes Abiertas

En las fórmulas abiertas de Newton-Cotes para calcular $\int_a^b f(x)dx$ con $n+1$ puntos se toma

$h = \frac{b-a}{n+2}$, y por tanto $x_k = a + (k+1)h$. Asimismo $x_{-1} \leq \zeta \leq x_{n+1}$.

n=0: Regla del punto medio

$$\int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)dx = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\zeta)$$

$$1) \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \approx 2 \cdot 4.5 \left(\frac{1}{5.5} \right) = 1.6364 \text{ con error } E \leq \frac{4.5^3}{3} \max_{1 \leq x \leq 10} \left| \frac{2!}{x^3} \right| = \frac{4.5^3}{3} = 60.75$$

$$2) \int_1^{5.5} \frac{1}{x} dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x} dx \approx 2 \cdot 2.25 \frac{1}{3.25} + 2 \cdot 2.25 \frac{1}{7.75} = 1.3846 + 0.5806 = 1.9653 \text{ con error}$$

$$E \leq \frac{2.25^3}{3} \left(\max_{1 \leq x \leq 5.5} \left| \frac{2!}{x^3} \right| + \max_{5.5 \leq x \leq 10} \left| \frac{2!}{x^3} \right| \right) = \frac{2.25^3}{3} \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{5.5^3} \right) = 7.5938 + 0.0456 = 7.6394$$

n=1

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)dx = \frac{3h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi)$$

$$1) \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \approx \frac{3 \cdot 3}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{7} \right) = 1.7679 \text{ con error } E \leq \frac{3 \cdot 3^3}{4} \max_{1 \leq x \leq 10} \left| \frac{2!}{x^3} \right| = \frac{3 \cdot 3^3}{4} = 40.5$$

$$2) \int_1^{5.5} \frac{1}{x} dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x} dx \approx \frac{3 \cdot 1.5}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{5.5} \right) + \frac{3 \cdot 1.5}{2} \left(\frac{1}{5.5} + \frac{1}{10} \right) = 1.4625 + 0.5861 = 2.0486 \text{ con error}$$

$$E \leq \frac{3 \cdot 1.5^3}{4} \left(\max_{1 \leq x \leq 5.5} \left| \frac{2!}{x^3} \right| + \max_{5.5 \leq x \leq 10} \left| \frac{2!}{x^3} \right| \right) = \frac{3 \cdot 1.5^3}{4} \left(\frac{2}{1^3} + \frac{2}{5.5^3} \right) = 5.0625 + 0.0304 = 5.0929$$

n=2:

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)dx = \frac{4h}{3} [2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi)$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 25 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

$$1) \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \approx \frac{4 \cdot 2.25}{3} \left(2 \frac{1}{3.25} - \frac{1}{5.5} + 2 \frac{1}{7.75} \right) = 2.0749 \quad \text{con} \quad \text{error}$$

$$E \leq \frac{14 \cdot 2.25^5}{45} \max_{1 \leq x \leq 10} \left| \frac{4!}{x^5} \right| = 430.5656$$

$$2) \int_1^{5.5} \frac{1}{x} dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x} dx \approx \frac{4 \cdot 1.125}{3} \left(2 \frac{1}{2.125} - \frac{1}{3.25} + 2 \frac{1}{4.375} \right) + \frac{4 \cdot 1.125}{3} \left(2 \frac{1}{6.625} - \frac{1}{7.75} + 2 \frac{1}{8.875} \right) = 1.6359 + 0.5973 = 2.2333$$

con error

$$E \leq \frac{14 \cdot 1.125^5}{45} \left(\max_{1 \leq x \leq 5.5} \left| \frac{4!}{x^5} \right| + \max_{5.5 \leq x \leq 10} \left| \frac{4!}{x^5} \right| \right) = \frac{14 \cdot 1.125^5}{45} \left(\frac{24}{1^5} + \frac{24}{5.5^5} \right) = 13.4552 + 0.0027 = 13.4578$$

n=3

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{5h}{24} [11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] + \frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\xi)$$

$$1) \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \approx \frac{5 \cdot 1.8}{24} \left(11 \frac{1}{2.8} + \frac{1}{4.6} + \frac{1}{6.4} + 11 \frac{1}{8.2} \right) = 2.1164$$

$$\text{con cota de error } E \leq \frac{95 \cdot 1.8^5}{144} \max_{1 \leq x \leq 10} \left| \frac{4!}{x^5} \right| = 299.1816$$

$$2) \int_1^{5.5} \frac{1}{x} dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x} dx \approx \frac{5 \cdot 0.9}{24} \left(11 \frac{1}{1.9} + \frac{1}{2.8} + \frac{1}{3.7} + 11 \frac{1}{4.6} \right) + \frac{5 \cdot 0.9}{24} \left(11 \frac{1}{6.4} + \frac{1}{7.3} + \frac{1}{8.2} + 11 \frac{1}{9.1} \right) = 1.6515 + 0.5975 = 2.2490$$

con error

$$E \leq \frac{95 \cdot 0.9^5}{144} \left(\max_{1 \leq x \leq 5.5} \left| \frac{4!}{x^5} \right| + \max_{5.5 \leq x \leq 10} \left| \frac{4!}{x^5} \right| \right) = \frac{95 \cdot 0.9^5}{144} \left(\frac{4!}{1^5} + \frac{4!}{5.5^5} \right) = 9.3494 + 0.0019 = 9.3513$$

Presentando los resultados de forma tabular:

	Valor				Cota				Error			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1)	1.6364	1.767	2.074	2.116	60.750	40.500	430.565	299.18	0.6662	0.5347	0.2277	0.1862
2)	1.9653	2.048	2.233	2.249	7.6394	5.0929	13.4578	9.3513	0.3373	0.2540	0.0693	0.0536

En todos los casos el error real es inferior a la cota, siendo preferible el segundo por tener menor cota de error. De todas formas, al ser la cota muy elevada, el valor calculado resulta de poca utilidad. Representándolo en forma de tabla se observa que al subdividir el intervalo, la cota del

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 26 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

error disminuye drásticamente. Es así fácil de justificar el interés de la integración compuesta. Como era previsible, el menor error corresponde a la fórmula de 4 intervalos (5 puntos).

Ejercicio 10.- Dado el soporte de puntos $\{x_0, x_1, x_2\}$

- (a) Obtener la forma de Newton del polinomio de interpolación. Acotar el error cometido tomando puntos equiespaciados y denotando por $M_k = \max_{\zeta \in (x_0, x_2)} |f^{(k)}(\zeta)|$. ¿Es válida esa acotación cuando se extrapola?. Justificar la respuesta.
- (b) Obtener el polinomio de interpolación tomando los valores de $f(x) = x^3$ en el soporte $\{-1, 0, 1\}$. Determinar el error cometido al evaluar el polinomio en 0.5 y compararlo con la acotación teórica.
- (c) Obtener la fórmula de integración

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = (x_2 - x_0) f(x_0) + \frac{1}{2}(x_2 - x_0)^2 f[x_0, x_2] - \frac{1}{6}(x_2 - x_0)^3 f[x_0, x_1, x_2] + E$$

determinando el error que se comete. Particularizar la fórmula de integración y el error para el caso de puntos equiespaciados.

Apartado (a) Fórmulas de Newton de interpolación con tres puntos

La forma de Newton del polinomio de interpolación viene dada por:

$$f(x) = \sum_{k=0}^N f[x_0, \dots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) + f[x_0, \dots, x_N, x] \prod_{i=0}^N (x - x_i)$$

donde $f[x_0, \dots, x_N, x] \prod_{i=0}^N (x - x_i) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{i=0}^N (x - x_i)$, $x_0 \leq \xi \leq x_N$ es el error, y las diferencias

divididas se calculan mediante la regla de recurrencia

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

En el caso propuesto, se tiene

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 27 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$E_2(x) = f[x_0, x_1, x_2, x](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Si los puntos están equiespaciados con paso h , haciendo el cambio de variable $x = x_1 + sh$ se tiene:

$$|E_2(x)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!}(s+1)hsh(s-1)h \right| \leq \frac{M_3}{6} h^3 \max_{s \in (-1,1)} |s^3 - s|$$

$$\max_{s \in (-1,1)} |s^3 - s| \rightarrow 3s^2 - 1 = 0 \rightarrow s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ y por tanto } \max_{s \in (-1,1)} |s^3 - s| = \max_{s = \{-1, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\}} |s^3 - s| = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

La cota del error es entonces $|E_2(x)| \leq \frac{M_3}{9\sqrt{3}} h^3$

Esta acotación es válida para interpolación, pero no para extrapolación puesto que los máximos calculados lo son en el intervalo definido por el soporte. Veámoslo con un contraejemplo:

$$f(x) = x^3 \text{ en } \{-1, 0, 1\}$$

Operando, se obtiene: $P_2(x) = x$ y $|E_2(x)| < \frac{M_3}{9\sqrt{3}} h^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Se cumple que $\max_{x \in (-1,1)} |f(x) - P_2(x)| = \max_{x \in (-1,1)} |x^3 - x| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$, pero cuando $x=2$, $|E_2(2)| = 6 > \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Apartado (b) Particularización para $f(x) = x^3$ en $\{-1, 0, 1\}$

Aplicamos las diferencias divididas

	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
$x_0 = -1$	-1		
$x_1 = 0$	0	$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0 - (-1)}{0 - (-1)} = 1$	
$x_2 = 1$	1	$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = 0$

$$P_2(x) = -1 + 1(x + 1) + 0(x + 1)x = x$$

El error cometido en $x=0.5$ es $f(0.5) - P_2(0.5) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$

Y la acotación para ese punto viene expresada como

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 28 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

$$E_2(0.5) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(0.5+1)(0.5-0)(0.5-1) = \frac{3}{8}$$

Se observa que ambas coinciden.

Apartado (c) Integración de Simpson

Calculando el polinomio de interpolación tomando el soporte $\{x_0, x_2, x_1\}$ se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} (f[x_0] + f[x_0, x_2](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_2)) dx + E$$

$$\text{con } E = \int_{x_0}^{x_2} \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) dx$$

Operando

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= f[x_0] \left[x \right]_{x_0}^{x_2} + f[x_0, x_2] \left[\frac{(x - x_0)^2}{2} \right]_{x_0}^{x_2} + f[x_0, x_1, x_2] \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(x_2 + x_0) + xx_0x_2 \right]_{x_0}^{x_2} + E \\ &= (x_2 - x_0) f(x_0) + \frac{1}{2}(x_2 - x_0)^2 f[x_0, x_2] - \frac{1}{6}(x_2 - x_0)^3 f[x_0, x_1, x_2] + E \end{aligned}$$

Particularizando para puntos equiespaciados se debe obtener la regla de Simpson, esto es

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi).$$

Su verificación es simple in más que sustituir:

$$\begin{aligned} &(x_2 - x_0) f(x_0) + \frac{1}{2}(x_2 - x_0)^2 f[x_0, x_2] - \frac{1}{6}(x_2 - x_0)^3 f[x_0, x_1, x_2] = \\ &= (2h) f(x_0) + \frac{1}{2}(2h)^2 \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} - \frac{1}{6}(2h)^3 \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}}{2h} = \\ &= f(x_0)(2h - h - \frac{2h}{3}) + f(x_1)(\frac{2h}{3} + \frac{2h}{3}) + f(x_2)(h - \frac{2h}{3}) \end{aligned}$$

Ejercicio 11.-

- (a) Describir las ventajas e inconvenientes de utilizar, en general, la fórmula de Gauss-Legendre de 3 puntos frente a la regla de Simpson (precisión, límites de integración, etc.).

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 29 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

- (b) Deducir la regla de Simpson¹ compuesta, así como la estimación de error.
- (c) Una partícula de masa m que se desplaza por un fluido esta sujeto a una resistencia viscosa R que es función de la velocidad v . La relación entre resistencia R , velocidad

v y tiempo t viene dada por la ecuación $t = \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)} du$. Para un determinado fluido $R(v) = -v\sqrt{v}$. Usando la regla de Simpson compuesta, determinar con error menor de 10^{-3} s, el tiempo que tarda una partícula de 10 kg que se mueve a $v(0)=10$ m/s en reducir su velocidad a $v=5$ m/s. ¿Cuál es el error real cometido?.

Apartado (a) Comparación entre Simpson y Gauss-Legendre

En ambos casos la función se evalúa en tres puntos. La regla de Simpson se expresa como

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{f^{iv}(\zeta)}{90} \quad \text{con } \zeta \in (a,b)$$

mientras que la fórmula de Gauss-Legendre viene dada por

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0.5 f(0.7746) + 0.8 f(0) + 0.5 f(-0.7746) + k f^{vi}(\zeta) \quad \text{con } \zeta \in (-1,1)$$

la vista de ambas expresiones, se observan claramente las diferencias entre ambas. Por un lado, la fórmula de cuadratura tiene mayor orden (es exacta para polinomios de mayor grado). Mientras que Simpson es exacta para polinomios de tercer grado, la fórmula de Gauss-Legendre lo es para polinomios de grado 5. Por otro lado, la regla de Simpson es aplicable a cualquier intervalo, mientras que la fórmula de cuadratura está definida en el intervalo $(-1,1)$.

Apartado (b) Fórmula compuesta

Partiendo del intervalo total y dividiéndolo en n subintervalos de anchura $2h$ se tiene

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \frac{h}{3} \left[f(x_{2k-2}) + 4 f(x_{2k-1}) + f(x_{2k}) \right] - \sum_{k=1}^n h^5 \frac{f^{iv}(\zeta_k)}{90}$$

donde $x_k = a + kh$ y $\zeta_k \in (x_{2k-2}, x_{2k})$.

¹ Regla de Simpson: $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{f^{iv}(\zeta)}{90} \quad \text{con } \zeta \in (a,b)$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	Última Actualización	16/02/2007	Página 30 de 31
	Titulación / Centro	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	Asignatura	Análisis Numérico	
	Tema	Derivación e Integración Numérica	

Operando por separado sobre ambos términos

$$\sum_{k=1}^n \frac{h}{3} \left[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k}) \right] = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(x_{2n}) \right]$$

$$\sum_{k=1}^n h^5 \frac{f^{iv}(\zeta_k)}{90} \xrightarrow[\sum_{k=1}^n f^{iv}(\zeta_k) = n f^{iv}(\zeta)]{TVIG} \frac{h^5 n f^{iv}(\zeta)}{90} = \frac{h^5 \frac{b-a}{2h} f^{iv}(\zeta)}{90} = \frac{h^4 (b-a) f^{iv}(\zeta)}{180}$$

se obtiene finalmente

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{k=1}^n f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + f(x_{2n}) \right] - \frac{h^4 (b-a) f^{iv}(\zeta)}{180} \text{ con } \zeta \in (a, b).$$

Apartado (c) Aplicación

Se debe calcular

$$t = \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)} du = \int_{10}^5 \frac{10}{-u\sqrt{u}} du$$

mediante Simpson compuesta, con un error inferior a 10^{-3} s. Utilizando la fórmula anterior

$$\left| \frac{h^4 (b-a) f^{iv}(\zeta)}{180} \right| < 10^{-3}$$

Puesto que $f(x) = -10x^{-3/2}$ se tiene que $f^{iv}(x) = \frac{-4725}{8x^{11/2}}$ y $\forall x \in (5, 10): |f^{iv}(x)| \leq \frac{4725}{8 \cdot 5^{11/2}} \approx 0.0845$.

Despejando el valor de h

$$h < \sqrt[4]{\frac{10^{-3} \cdot 180}{|5-10| \cdot 0.0845}} < \sqrt[4]{0.4259} \approx 0.8079$$

se obtiene que el número de intervalos es $n > \frac{|b-a|}{2h} > 3.09 = 4$ y $h=0.625$.

Evaluando la función en los puntos indicados

x	10.0000	9.3750	8.7500	8.1250	7.5000	6.8750	6.2500	5.6250	5.0000
$F(x)$	-0.3162	-0.3484	-0.3864	-0.4318	-0.4869	-0.5547	-0.6400	-0.7496	-0.8944

y sustituyendo en la fórmula, $t \approx 2.6198$.

De forma exacta, $t = \int_{10}^5 \frac{10}{-u\sqrt{u}} du = \left[\frac{-20}{\sqrt{u}} \right]_{10}^5 = 2.6197$, y por tanto el error real es inferior a 0.0001.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS © CMF	<i>Última Actualización</i>	16/02/2007	<i>Página 31 de 31</i>
	<i>Titulación / Centro</i>	Ing. Geólogo - E.P.S.G. Schultz	
	<i>Asignatura</i>	Análisis Numérico	
	<i>Tema</i>	Derivación e Integración Numérica	