

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 6
	Tema	Derivación e Integración Numérica (Integración Compuesta)	
	Examen	Tabulación de valores	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $[1,2]$, se desea generar una tabla de valores con equiespaciado h

- Determinar el menor número de puntos necesarios n y el valor de h para que al usar interpolación mediante un polinomio de segundo grado entre tres puntos consecutivos el error sea menor que $\varepsilon=0.001$. Se exige que n sea impar.
- Acotar el error que se comete al aproximar la integral de dicha función por el conjunto de polinomios cuadráticos en cada terna de puntos consecutivos, suponiendo que $h=0.25$.
- Calcular el valor exacto de la integral y el valor aproximado para $h=0.25$ justificando la fórmula numérica utilizada, y verificar que cumple la cota anterior.

Ejercicio 2.-

- Obtener la regla general de integración numérica cuando se aproxima la función $f(x)$ por un polinomio de primer grado.
- Calcular el valor de δ para que
$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} - \delta\right) \left(x - \frac{a+b}{2} + \delta\right) dx = 0$$
- Particularizar la regla anterior cuando se toman
$$\left\{ \left(\frac{a+b}{2} - \delta\right), \left(\frac{a+b}{2} + \delta\right) \right\}$$
como puntos de interpolación. Acotar asimismo el valor del error cometido.
- Utilizando el resultado hallado, calcular la regla de integración compuesta cuando el intervalo (a,b) se subdivide en N intervalos de ancho $h = \frac{b-a}{N}$.

Ejercicio 3.-

- Utilizando el desarrollo en serie de Taylor en los puntos $\{a-h, a+h\}$, obtener las fórmulas de derivación numérica para $f'(a)$ y $f''(a)$.
- ¿Es posible conseguir dichas fórmulas de tres puntos a partir del polinomio de interpolación en los puntos $\{a-h, a+h\}$? Justifíquese la respuesta.
- ¿Se puede emplear el método de extrapolación de Richardson para obtener una fórmula de cinco puntos $\{a-2h, a-h, a, a+h, a+2h\}$ para $f'(a)$ a partir de la fórmula anterior de 3 puntos?. En caso afirmativo, calcularla.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 6
	Tema	Derivación e Integración Numérica (Integración Compuesta)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

(d) Justificar que el resultado de la fórmula de derivación de 3 puntos no mejora cuando $h \rightarrow 0$. ¿A qué es debido?

Ejercicio 4.- De un móvil cuyo desplazamiento viene dado por $S(t)$ se conocen los valores de $S(0), S(1), S(4), S(5), S(7), S(9)$, así como su velocidad para $t=0$ y $t=9$. ¿Existe algún método de interpolación que nos permita acotar el valor máximo de la aceleración para $0 \leq t \leq 9$ sabiendo que $S^{(k)}(t)$ está acotada para $0 \leq t \leq 9$ y $0 \leq k \leq 5$? En caso afirmativo, calcular dicha cota.

Ejercicio 5.- Una partícula m que se desliza por un fluido está sujeta a una resistencia viscosa R , la cual es función de la velocidad v . La relación entre la resistencia R , la velocidad v , y el tiempo t viene

dada por la ecuación $t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)} du$. Sea $R(v) = -\sqrt{v^3}$ para un

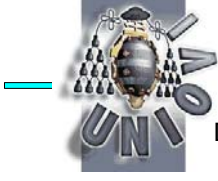
determinado fluido, donde R se da en N y v en m/s. Si $m=10\text{Kg}$ y $v(0)=10\text{m/s}$, aproxime el tiempo que la partícula tarda en reducir su velocidad a 5m/s.

- Utilizando la regla del trapecio compuesta con un error inferior a 0'1s.
- Utilizando el método de integración adaptativa de Simpson con un error inferior a 0'0005s.
- Utilizando integración analítica. Utilícese este resultado para verificar las cotas de error de los apartados anteriores.

Ejercicio 6.- Dada la función $f(x)=x \sin(x)$

- Se pretende tabular mediante puntos equidistantes. Determinar el número de puntos necesarios en el intervalo $(0, \pi)$ para que al interpolar linealmente entre dos de ellos se obtenga un error menor de una milésima.
- Determinar el polinomio de interpolación que coincide con la función en $\{0, \pi/2, \pi\}$ y con su derivada en los extremos. Acotar el error que se comete al sustituir la función por un polinomio.
- Acotar el error cometido cuando se utiliza la derivada del polinomio anterior para aproximar a $f'(\pi/2)$. Compara dicha cota con el error real ¿Se puede acotar el error en todo el intervalo? En caso afirmativo, cual es la cota.
- Calcular la integral definida en el intervalo y acotar el error cometido. Comparar dicha cota con el error real

Ejercicio 7.- La determinación de la cantidad de calor ΔH (en calorías) requerido para elevar la temperatura de un material desde una temperatura inicial T_1 hasta T_2 depende de su capacidad calorífica $c(T)$ (en cal/g °C) mediante la expresión

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 6
	Tema	Derivación e Integración Numérica (Integración Compuesta)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\Delta H = m \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT$$

Se desea calcular el calor necesario para elevar la temperatura de 100 g de un material cuya capacidad calorífica viene dada por

$$c(T) = 0.132 + 1.56 \times 10^{-4} T + 2.64 \times 10^{-7} T^2 \text{ desde } -100 \text{ hasta } 200^\circ\text{C}.$$

- Calcular el calor de forma analítica exacta.
- Utilice la regla del trapecio simple para aproximar la integral. Calcule la cota de error y verifique que es mayor que el error real. Repita los cálculos subdividiendo la integral en dos, la primera de -100 a 0 y la segunda de 0 a 200 . ¿Cuántos puntos serían necesarios para calcularlo de forma aproximada utilizando la fórmula del trapecio compuesta con un error menor que 1 caloría?
- ¿Qué fórmula de aproximación numérica de las estudiadas sería más adecuada para calcular esta integral? Justifíquese la respuesta.

Ejercicio 8.- Fugacidad f es un término que se emplea en ingeniería para describir la energía disponible en un proceso isotérmico. Para gases ideales coincide con la presión, pero en gases reales viene dada por la expresión

$$\ln \frac{f}{P_F} = \int_0^{P_F} \frac{C-1}{P} dP$$

donde C es el factor de compresibilidad, determinado experimentalmente, y P_F la presión a que se mide la fugacidad. Cuando la presión tiende a cero, el valor de C se aproxima a la unidad a mayor velocidad. Los valores del factor de compresibilidad para el metano vienen dados en la siguiente tabla.

$P(\text{atm})$	1	10	20	40	60	80	120	160	250	400
C	0.9940	0.9370	0.8683	0.7043	0.4515	0.3429	0.4259	0.5252	0.7468	1.0980

- ¿Cuál es el orden de las fórmulas del trapecio y del punto medio?. Suponiendo que el valor de C varía linealmente entre los valores tabulados ¿se obtiene el mismo resultado con ambas fórmulas?. Justificar la respuesta.
- Manteniendo la hipótesis de que C varía linealmente entre los valores tabulados, obtener el valor de la fugacidad a 70 atm. utilizando la regla de Simpson compuesta.

Ejercicio 9.- Aproxime las siguientes integrales

$$1) \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \quad 2) \int_1^{5.5} \frac{1}{x} dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x} dx$$

- Mediante las cuatro primeras fórmulas de Newton Cotes cerradas. ¿Son las exactitudes de las aproximaciones compatibles con las fórmulas de error? ¿Cuál sería la mejor aproximación?

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 4 de 6
	Tema	Derivación e Integración Numérica (Integración Compuesta)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

(b) Mediante las las cuatro primeras fórmulas de Newton Cottes abiertas. ¿Son las exactitudes de las aproximaciones compatibles con las fórmulas de error? ¿Cuál sería la mejor aproximación?

Ejercicio 10.- Dado el soporte de puntos $\{x_0, x_1, x_2\}$

(a) Obtener la forma de Newton del polinomio de interpolación. Acotar el error cometido tomando puntos equiespaciados y denotando por $M_k = \max_{\zeta \in (x_0, x_2)} |f^{(k)}(\zeta)|$. ¿Es válida esa acotación cuando se extrapola?. Justificar la respuesta.

(b) Obtener el polinomio de interpolación tomando los valores de $f(x) = x^3$ en el soporte $\{-1, 0, 1\}$. Determinar el error cometido al evaluar el polinomio en 0.5 y compararlo con la acotación teórica.

(c) Obtener la fórmula de integración

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = (x_2 - x_0) f(x_0) + \frac{1}{2}(x_2 - x_0)^2 f[x_0, x_2] - \frac{1}{6}(x_2 - x_0)^3 f[x_0, x_1, x_2] + E$$

determinando el error que se comete. Particularizar la fórmula de integración y el error para el caso de puntos equiespaciados.

Ejercicio 11.-

(a) Describir las ventajas e inconvenientes de utilizar, en general, la fórmula de Gauss-Legendre de 3 puntos frente a la regla de Simpson (precisión, límites de integración, etc.).

(b) Deducir la regla de Simpson¹ compuesta, así como la estimación de error.

(c) Una partícula de masa m que se desplaza por un fluido esta sujeto a una resistencia viscosa R que es función de la velocidad v . La relación entre resistencia R , velocidad v y

$$t = \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)} du$$

tiempo t viene dada por la ecuación . Para un

determinado fluido $R(v) = -v\sqrt{v}$. Usando la regla de Simpson compuesta, determinar con error menor de 10^{-3} s, el tiempo que tarda una partícula de 10 kg que se mueve a $v(0)=10$ m/s en reducir su velocidad a $v=5$ m/s. ¿Cuál es el error real cometido?.