



Titulación: Ingeniero Geólogo
Asignatura: Análisis Numérico
Autor: César Menéndez

Última actualización: 15/01/2008

Derivación Numérica

Planificación:

2 Teoría+1 Prácticas+0.5 Laboratorio

Materiales:

MATLAB

Conocimientos previos:

T^{mas}. básicos de Cálculo –
Desarrollos de Taylor – Sistemas
lineales –



Descripción del problema

Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

- Evaluación de la derivada de una función en un punto a partir de los valores de la función
 - Función muy compleja (difícil de calcular su derivada)
 - No se conoce la función sino sólo sus valores en algunos puntos
 - ...



Objetivos

Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

- Conocer las diferentes formas de obtener fórmulas de derivación numérica
 - Interpolación
 - Desarrollo de Taylor
 - Coeficientes indeterminados
- Aprender a obtener el error de la fórmula
- Reconocer las ventajas de las fórmulas centradas.
- Comprender que el error depende no solo de la fórmula numérica y de la función a derivar sino del punto en que se calcula y del valor de espaciado h .



Planteamiento y definiciones

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía

- Fórmulas de derivación numérica

$$f'(a) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) + \text{error}$$

- Obtención de los valores de los coeficientes
- Determinación o acotación del error cometido

- Error

- Una fórmula es de orden n cuando es exacta para polinomios de grado menor o igual que n

$$f(x) = x^k, k = 0, 1, \dots, n \Rightarrow f'(a) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

- El error de truncamiento de la fórmula es

$$O(h^k): \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{error}}{h^k} = \text{cte} \quad o(h^k): \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{error}}{h^k} = 0$$

- Se denomina parte principal del error de truncamiento al infinitésimo de menor orden

$$\text{error} = k_1 h^2 + k_2 h^5 + k_3 h^6$$



Ejemplo

- La siguiente fórmula de derivación es de orden 1 y con error de truncamiento $O(h)$

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f^{(2)}(\xi_0)}{2!}h = RN(h) + O(h)$$

$$f(x) = 1 \quad 0 = \frac{1}{h}[1 - 1]$$

$$f(x) = x \quad 1 = \frac{1}{h}[(a+h) - (a)]$$

$$f(x) = x^2 \quad 2a = \frac{1}{h}[(a+h)^2 - (a)^2] = 2a + h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{error}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a) - RN(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{f^{(2)}(\xi_0)}{2!}h}{h} = -\frac{f^{(2)}(\xi_0)}{2!}$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía



Derivación Numérica

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.
- Taylor
- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía

- Métodos para obtener reglas de derivación numéricas

- Interpolación

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

- Desarrollo de Taylor

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + f''(\xi)\frac{h^2}{2!}$$

- Coeficientes indeterminados

- Obtener tales que sea exacta para el mayor orden posible

$$f(x) = x^k, k = 1, 2, \dots: f'(a) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$



Formulas de tipo interpolatorio

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía

- Se definen por el número de puntos del polinomio interpolante
- Las fórmulas genéricas se toman para puntos equiespaciados, aunque su método de obtención es válido para cualesquiera puntos
- Motivación

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) \rightarrow \begin{cases} P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^n(x) \\ E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \end{cases}$$

$$f'(x) = P'_n(x) + e(x) \rightarrow e(x) = \frac{d}{dx} E_n(x)$$



Derivadas primeras (Acotación del error)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía

● Acotación del error

$$\begin{aligned} e(x) &= \frac{d}{dx} E_n(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right) = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{df^{(n+1)}(\xi_x)}{dx} \prod_{k=0}^n (x - x_k) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \frac{d}{dx} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \\ \text{siendo } \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \frac{d}{dx} \prod_{k=0}^n (x - x_k) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \sum_{j=0}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x - x_k) \end{aligned}$$

- No es posible la acotación para cualquier valor de x
- Se acota en uno de los puntos de interpolación

$$e(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x_i - x_k)$$



Derivadas primeras (2 y 3)

- 2 puntos

$$P_1(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \rightarrow P_1'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$e(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x_i - x_k) \rightarrow e(x_0) = -\frac{f^{(2)}(\xi_0)}{2!} (x_1 - x_0)$$

- Equiespaciados

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f^{(2)}(\xi_0)}{2!} h$$

- 3 puntos

$$P_2(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$P_2'(x) = f(x_0) \frac{(2x - x_1 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(2x - x_0 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(2x - x_0 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

- Equiespaciados

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left(-\frac{3}{2} f(x_0) + 2f(x_0 + h) - \frac{1}{2} f(x_0 + 2h) \right) + \frac{f^{(3)}(\xi_0)}{3} h^2$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h} (f(x_1 + h) - f(x_1 - h)) - \frac{f^{(3)}(\xi_0)}{6} h^2$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía



Derivadas primeras: (4 y 5)

● 4 puntos

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h}(-11f(x_0) + 18f(x_0 + h) - 9f(x_0 + 2h) + 2f(x_0 + 3h)) - \frac{f^{(4)}(\xi_0)}{4}h^3$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{6h}(-2f(x_1 - h) - 3f(x_1) + 6f(x_1 + h) - f(x_1 + 2h)) + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{12}h^3$$

● 5 puntos

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}(-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)) + \frac{f^{(5)}(\xi_0)}{5}h^4$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{24h}(-6f(x_1 - h) - 20f(x_1) + 36f(x_1 + h) - 12f(x_1 + 2h) + 2f(x_1 + 3h)) - \frac{f^{(5)}(\xi_1)}{20}h^4$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h}(f(x_2 - 2h) - 8f(x_2 - h) + 8f(x_2 + h) - f(x_2 + 2h)) + \frac{f^{(5)}(\xi_2)}{30}h^4$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía



Aplicación: $f(x)=\cos(x)$, calcular $f'(\pi/4)$ tomando $h=0.5$ y $h=0.1$

$$f'(\pi/4) = -\sin(\pi/4) \approx -0.7071$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía

Pts	h=0.5	h=0.1
2	$\frac{\cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - \cos(\frac{\pi}{4})}{0.5} \approx -0.8511$	-0.7413
3	$\frac{1}{0.5} \left(-\frac{3}{2} \cos(\frac{\pi}{4}) + 2 \cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{4} + 1) \right) = -0.7822$	-0.7096
	$\frac{1}{1} \left(\cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - \cos(\frac{\pi}{4} - 0.5) \right) \approx -0.6780$	-0.7059
4	$\frac{1}{3} \left(-11 \cos(\frac{\pi}{4}) + 18 \cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - 9 \cos(\frac{\pi}{4} + 1.0) + 2 \cos(\frac{\pi}{4} + 1.5) \right) \approx -0.7015$	-0.7070
	$\frac{1}{3} \left(-2 \cos(\frac{\pi}{4} - 0.5) - 3 \cos(\frac{\pi}{4}) + 6 \cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - \cos(\frac{\pi}{4} + 1) \right) \approx -0.7127$	-0.7072
5	$\frac{1}{6} \left(-25 \cos(\frac{\pi}{4}) + 48 \cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - 36 \cos(\frac{\pi}{4} + 1) + 16 \cos(\frac{\pi}{4} + 1.5) - 3 \cos(\frac{\pi}{4} + 2) \right) \approx -0.6951$	-0.7071
	$\frac{1}{12} \left(-6 \cos(\frac{\pi}{4} - 0.5) - 20 \cos(\frac{\pi}{4}) + 36 \cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - \cos(\frac{\pi}{4} + 1) + 2 \cos(\frac{\pi}{4} + 1.5) \right) \approx -0.7099$	-0.7071
	$\frac{1}{6} \left(f \cos(\frac{\pi}{4} - 1) - 8 \cos(\frac{\pi}{4} - 0.5) + 8 \cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) - \cos(\frac{\pi}{4} + 1) \right) \approx -0.7057$	-0.7071



Derivadas orden superior

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía

- Acotación del error

$$\begin{aligned} e(x) &= \frac{d^2}{dx^2} E_n(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right) = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^2 f^{(n+1)}(\xi_x)}{dx^2} \prod_{k=0}^n (x - x_k) + \\ &+ 2 \frac{1}{(n+1)!} \frac{df^{(n+1)}(\xi_x)}{dx} \frac{d}{dx} \prod_{k=0}^n (x - x_k) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \frac{d^2}{dx^2} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \end{aligned}$$

- **¡ No se anula en los puntos de interpolación !**
- No es posible la acotación usando este método



Obtención por desarrollo de Taylor

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía

- Plantea la obtención de las derivadas de cualquier orden en un punto a partir del desarrollo de Taylor de la función en otros puntos
- Proceso:
 - Desarrollar en serie en los puntos conocidos en torno al valor deseado
 - Combinar las expresiones anteriores, anulando todos los términos posibles
 - Obtener la expresión final de la formula y el error (cuando sea posible)



Ejemplo 1 (a)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía

- Obtener $f'(a)$ y $f''(a)$ a partir de los valores de $f(x)$ en $\{a-h, a, a+h\}$

– Desarrollamos por Taylor

$$f(a+h) = f(a) + h \frac{f'(a)}{1!} + h^2 \frac{f''(a)}{2!} + h^3 \frac{f'''(a)}{3!} + \dots + h^n \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!} \quad (I)$$

$$f(a-h) = f(a) - h \frac{f'(a)}{1!} + h^2 \frac{f''(a)}{2!} - h^3 \frac{f'''(a)}{3!} + \dots + (-h)^n \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!} \quad (II)$$

– Combinamos los desarrollos $\alpha(I) + \beta(II)$

$$h^0 : \quad \alpha f(a+h) + \beta f(a-h) - (\alpha + \beta) f(a)$$

$$h^1 : \quad f'(a)(\alpha - \beta)$$

$$h^2 : \quad \frac{1}{2!} f''(a)(\alpha + \beta)$$

$$h^{2k-1} : \quad \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(a)(\alpha - \beta)$$

$$h^{2k} : \quad \frac{1}{2k!} f^{(2k)}(a)(\alpha + \beta)$$

– Anulamos los términos no deseados

- Derivada 1ª: anula términos en h^2
- Derivada 2ª: anula términos en h



Ejemplo 1 (b)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía

• Derivada 1ª

$$\alpha = -\beta$$

$$\alpha f(a+h) - \alpha f(a-h) = 2\alpha f'(a)h + \alpha \frac{h^3}{3!} (f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)) \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(a) = \frac{1}{2h} (f(a+h) - f(a-h)) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

• Derivada 2ª

$$\alpha = \beta$$

$$\alpha f(a+h) + \alpha f(a-h) - 2\alpha f(a) = \alpha f''(a)h^2 + \alpha \frac{h^4}{4!} (f^{iv}(\xi_1) + f^{iv}(\xi_2)) \rightarrow$$

$$\rightarrow f''(a) = \frac{1}{h^2} (f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)) - \frac{h^2}{12} f^{iv}(\xi)$$

• Derivada 3ª

$$\alpha = -\beta$$

$$\alpha f(a+h) - \alpha f(a-h) = 2\alpha f'(a)h + 2\alpha \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \alpha \frac{h^5}{5!} (f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2)) \rightarrow$$

$$\rightarrow f'''(a) = \frac{3}{h^3} (f(a+h) - f(a-h)) + \frac{6}{h^2} f'(a) - \frac{h^2}{20} f^{(5)}(\xi) \rightarrow$$

$$\rightarrow f'''(a) = \frac{3}{h^3} (f(a+h) - f(a-h)) + \frac{6}{h^2} \left(\frac{1}{2h} (f(a+h) - f(a-h)) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \right) - \frac{h^2}{20} f^{(5)}(\xi)$$



Derivadas de orden superior (2)

- Derivada segunda

- Laterales

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} (f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)) + O(h)$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} (2f(x_0) - 5f(x_1) + 4f(x_2) - f(x_3)) + O(h^2)$$

- Centradas

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} (f(x_{-1}) - 2f(x_0) + f(x_1)) + O(h^2)$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{12h^2} (-f(x_{-2}) + 16f(x_{-1}) - 30f(x_0) + 16f(x_1) - f(x_2)) + O(h^4)$$

- Ejemplo

- $f(x) = \cos(x)$, calcular la derivada segunda en $\pi/4$ tomando $h=0.5$ y $h=0.1$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx -0.7071$$

Pts	Cent.	$h=0.5$	$h=0.1$
3	No	$\frac{1}{0.5^2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \right) \approx -0.2757$	-0.6325
3	Si	$\frac{1}{0.5^2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - 0.5\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) \right) \approx -0.6925$	-0.7065
4	No	$\frac{1}{0.5^2} \left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 5\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 1.5\right) \right) \approx -0.7600$	-0.7128
5	Si	$\frac{1}{3} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + 16\cos\left(\frac{\pi}{4} - 0.5\right) - 30\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 16\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \right) \approx -0.7066$	-0.7071

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía



Derivadas de orden superior (3)

- Derivada tercera

- Laterales

$$f'''(x_0) = \frac{1}{h^3} (-f(x_0) + 3f(x_1) - 3f(x_2) + f(x_3)) + O(h)$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{2h^3} (-5f(x_0) + 18f(x_1) - 24f(x_2) + 14f(x_3) - 3f(x_4)) + O(h^2)$$

- Centradas

$$f'''(x_0) = \frac{1}{2h^3} (-f(x_{-2}) + 2f(x_{-1}) - 2f(x_1) + f(x_2)) + O(h^2)$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{8h^3} (f(x_{-3}) - 8f(x_{-2}) + 13f(x_{-1}) - 13f(x_1) + 8f(x_2) - f(x_3)) + O(h^4)$$

- Ejemplo

- $f(x) = \cos(x)$, calcular la derivada tercera en $\pi/4$ tomando $h=0.5$ y $h=0.1$

$$f'''(\pi/4) = \sin(\pi/4) \approx 0.7071$$

Pts	Cent.	h=0.5	h=0.1
4	No	$\frac{1}{0.5^3} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 1.5\right) \right) \approx 0.9686$	0.8038
5	No	$\frac{1}{0.5^2} \left(-5\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 18\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) - 24\cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) + 14\cos\left(\frac{\pi}{4} + 1.5\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\right) \right) \approx 1.1217$	0.7211
5	Si	$\frac{1}{0.5^2} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 0.5\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \right) \approx 0.6640$	0.7053
7	Si	$\frac{1}{1} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - 1.5\right) - 8\cos\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + 13\cos\left(\frac{\pi}{4} - 0.5\right) - 13\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.5\right) + 8\cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) - 8\cos\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \right) \approx 0.7046$	0.7071

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía



Derivadas de orden superior (4)

- Derivada cuarta

- Laterales

$$f^{iv}(x_0) = \frac{1}{h^4} (f(x_0) - 4f(x_1) + 6f(x_2) - 4f(x_3) + f(x_4)) + O(h)$$

$$f^{iv}(x_0) = \frac{1}{h^4} (3f(x_0) - 14f(x_1) + 26f(x_2) - 24f(x_3) + 11f(x_4) - 2f(x_5)) + O(h^2)$$

- Centradas

$$f^{iv}(x_0) = \frac{1}{h^4} (f(x_{-2}) - 4f(x_{-1}) + 6f(x_0) - 4f(x_1) + f(x_2)) + O(h^2)$$

$$f^{iv}(x_0) = \frac{1}{6h^4} (-f(x_{-3}) + 12f(x_{-2}) - 39f(x_{-1}) + 56f(x_0) - 39f(x_1) + 12f(x_2) - f(x_3)) + O(h^4)$$

- Ejemplo

- $f(x) = \cos(x)$, calcular la derivada cuarta en $\pi/4$ tomando $h=0.5$ y $h=0.1$

$$f^{iv}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.7071$$

Pts	Cent.	$h=0.5$	$h=0.1$
5	No	$\frac{1}{0.5^4} (\cos(\frac{\pi}{4}) - 4\cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) + 6\cos(\frac{\pi}{4} + 1) - 4\cos(\frac{\pi}{4} + 1.5) + \cos(\frac{\pi}{4} + 2)) \approx -0.2042$	0.5516
5	Si	$\frac{1}{0.5^4} (\cos(\frac{\pi}{4} - 1) - 4\cos(\frac{\pi}{4} - 0.5) + 6\cos(\frac{\pi}{4}) - 4\cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) + \cos(\frac{\pi}{4} + 1)) \approx 0.6782$	0.7059
6	No	$\frac{1}{0.5^4} \left(3\cos(\frac{\pi}{4}) - 14\cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) + 26\cos(\frac{\pi}{4} + 1) - 24\cos(\frac{\pi}{4} + 1.5) + 11\cos(\frac{\pi}{4} + 2) - 2\cos(\frac{\pi}{4} + 2.5) \right) \approx 0.6443$	0.7223
7	Si	$\frac{8}{3} \left(-\cos(\frac{\pi}{4} - 1.5) + 12\cos(\frac{\pi}{4} - 1) - 39\cos(\frac{\pi}{4} - 0.5) + 56\cos(\frac{\pi}{4}) - 39\cos(\frac{\pi}{4} + 0.5) + 12\cos(\frac{\pi}{4} + 1) - \cos(\frac{\pi}{4} + 1.5) \right) \approx 0.7059$	0.7071

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía



Obtención por el método de Coeficientes Indeterminados

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía

- Fija los puntos de la fórmula
- Parte de una relación de coeficientes
- Plantea un sistema para que la fórmula sea exacta para el mayor orden posible (grado del polinomio)
- Obtiene el orden del error

$$f'(a) \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 & 0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i \\ f(x) = x & 1 = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \\ f(x) = x^2 & 2a = \sum_{i=0}^n \alpha_i (x_i)^2 \\ \vdots & \vdots \\ f(x) = x^n & na^{n-1} = \sum_{i=0}^n \alpha_i (x_i)^n \end{cases}$$



Ejemplo de obtención por coef. Indet.

- Calcular $f''(a)$ a partir del valor de $f(x)$ en $\{a-h, a, a+h\}$

– Sistema

$$f''(a) \approx \alpha_1 f(a-h) + \alpha_2 f(a) + \alpha_3 f(a+h) \rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 & 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ f(x) = x & 0 = \alpha_1(a-h) + \alpha_2(a) + \alpha_3(a+h) \\ f(x) = x^2 & 2 = \alpha_1(a-h)^2 + \alpha_2(a)^2 + \alpha_3(a+h)^2 \end{cases}$$

– Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (a-h) & (a) & (a+h) \\ (a-h)^2 & (a)^2 & (a+h)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1/h^2 \\ \alpha_2 = -2/h^2 \\ \alpha_3 = 1/h^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(a) \approx \frac{1}{h^2} [f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)]$$

– ¿Orden?

$$f(x) = x^3 \quad 6a = \frac{1}{h^2} [(a-h)^3 - 2(a)^3 + (a+h)^3]$$

$$f(x) = x^4 \quad 12a^2 \neq \frac{1}{h^2} [(a-h)^4 - 2(a)^4 + (a+h)^4] = 12a^2 + 2h^2$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía



Obtención de fórmulas de mayor orden

Sea M un valor exacto y $N_0(h)$ la fórmula numérica que lo aproxima dependiendo del parámetro h , pudiéndose expresar como

$$M = N_0(h) + k_1h + k_2h^2 + k_3h^3 + \dots + k_nh^n + \dots = N_0(h) + O(h) \quad (I)$$

Donde los coeficientes son constantes. Aplicándola para $h/2$, se tiene

$$M = N_0\left(\frac{h}{2}\right) + k_1\frac{h}{2} + k_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + k_3\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \dots + k_n\left(\frac{h}{2}\right)^n + \dots \quad (II)$$

y anulando entre ambas expresiones los términos en h^1 : $2(II)-(I)$,

$$\begin{aligned} M &= \left[2N_0\left(\frac{h}{2}\right) - N_0(h) \right] + h^2k_2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right] + k_3h^3\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right] + \dots + k_nh^n\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right] + \dots \\ &= N_1(h) + \bar{k}_2h^2 + \bar{k}_3h^3 + \dots + \bar{k}_nh^n + \dots = N_1(h) + O(h^2) \end{aligned} \quad (III)$$

se consigue aumentar la precisión de la fórmula. Repitiendo el proceso para anular h^2 :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{4-1} \left[4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h) \right] + \frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1\right]}{4-1} k_3h^3 + \dots + \frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right]}{4-1} k_nh^n + \dots \\ &= N_2(h) + \tilde{k}_3h^3 + \dots + \tilde{k}_nh^n + \dots = N_2(h) + O(h^3) \end{aligned} \quad (IV)$$

Y por inducción se llega a

$$M = N_n(h) + O(h^{n+1}) \quad \text{donde}$$

$$N_n(h) = \frac{2^n N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{n-1}(h)}{2^n - 1} = N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{n-1}(h)}{2^n - 1}$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.
- Taylor
- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía



Ejemplo

Dada la fórmula de derivación numérica

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + k_1 h + k_2 h^2 + k_3 h^3 + \dots + k_n h^n + \dots = N_0(h) + O(h) \quad (I)$$

Aplicar la extrapolación de Richardson, tomado $f(x) = \cos(x)$ para calcular $f'(\pi/4)$ tomando $h=0.5$. Compararla con la solución exacta: -0.7071

En este caso

$$M = N_n(h) + O(h^{n+1}) \quad \text{donde} \quad N_n(h) = N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{n-1}(h)}{2^n - 1}$$

Introducción

Obtención

- Interpolación.
- Taylor
- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía

h	$N_0(h)$	$N_1(h)$	$N_2(h)$	$N_3(h)$	$N_4(h)$
0.5	-0.8511				
0.25	-0.7877	-0.7243			
0.125	-0.7494	-0.7111	-0.7067		
0.0625	-0.7287	-0.7081	-0.7071	-0.7071	
0.03125	-0.7180	-0.7073	-0.7071	-0.7071	-0.7071



Obtención de fórmulas de mayor orden

- NOTA: Si la formula fuera

$$M = N_0(h) + k_1 h^2 + k_2 h^4 + k_3 h^6 + \dots + k_n h^{2n} + \dots = N_0(h) + O(h^2) \quad (I)$$

- Este proceso generaría la relación

$$M = N_n(h) + O(h^{2n+2}) \quad \text{donde}$$

$$N_n(h) = \frac{4^n N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{n-1}(h)}{4^n - 1} = N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{n-1}(h)}{4^n - 1}$$

- Aplicar al ejemplo anterior tomando

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + k_1 h^2 + k_2 h^4 + k_3 h^6 + \dots + k_n h^{2n} + \dots = N_0(h) + O(h^2) \quad (I)$$

h	$N_0(h)$	$N_1(h)$	$N_2(h)$	$N_3(h)$	$N_4(h)$
0.5	-0.6780				
0.25	-0.6998	-0.7070			
0.125	-0.7053	-0.7071	-0.7072		
0.0625	-0.7066	-0.7071	-0.7071	-0.7071	
0.03125	-0.7070	-0.7071	-0.7071	-0.7071	-0.7071

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Obtención

- Interpolación.

- Taylor

- Coef. Indetermin.

Extrap. Richardson

Inestabilidad

Bibliografía



Inestabilidad numérica de la derivación

Partiendo de la fórmula de derivación numérica

$$f'(a) = N(a, h) - \frac{h^2}{3!} \cdot f'''(\xi) \quad \text{con} \quad N(a, h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2 \cdot h}$$

pero al operar con aritmética finita, se evalúa

$$\tilde{N}(a, h) = \frac{\tilde{f}(a+h) - \tilde{f}(a-h)}{2 \cdot h} \cong \frac{f(a+h) + \varepsilon_1 - f(a-h) + \varepsilon_2}{2 \cdot h} \quad \text{donde} \quad |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| < \varepsilon$$

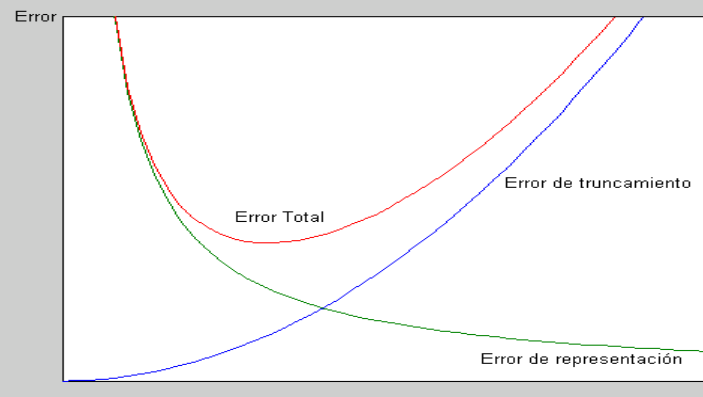
siendo ε el error de representación del ordenador. El error total es por tanto

$$E(h) = |f'(a) - \tilde{N}(a, h)| \leq |f'(a) - N(a, h)| + |N(a, h) - \tilde{N}(a, h)| = \frac{h^2}{3!} \cdot M + \frac{\varepsilon}{h} \quad \text{con} \quad M = \sup_{a-h \leq x \leq a+h} |f'''(x)|$$

que tiene un mínimo para $h_{\text{opt}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \varepsilon}{M}}$

Por tanto la precisión no mejora indefinidamente con la disminución del valor de h .

En la práctica no podemos calcular el valor de h óptimo, ya que la cota del error de representación depende de la máquina y M depende de la función y del intervalo en estudio.



 Descripción

 Objetivos

 Temario

Introducción

Obtención

Extrap. Richardson

Inestabilidad

 Bibliografía