

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 4
	Tema	Sistemas Lineales lineales (Pivoteo)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Dada la función $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

- Obtener el polinomio de interpolación de Taylor de segundo grado $T_2(x)$ en torno al punto $x=4$. ¿Qué error se comete con esa aproximación al evaluar $f(5)$?. Acotar el error que se comete al usar dicho polinomio para interpolar en el punto $x=5$ y en todo el intervalo $[0,9]$.
- Obtener el polinomio de interpolación de Lagrange $P_2(x)$ tomando $\{0,4,9\}$ como puntos de soporte. ¿Qué error se comete con esa aproximación al evaluar $f(5)$?. Acotar el error que se comete al usar dicho polinomio para interpolar en el punto $x=5$ y en todo el intervalo $[0,9]$.
- Determinar el número de puntos equiespaciados necesarios para poder asegurar que la interpolación lineal entre dos consecutivos tiene un error inferior a $0'001$ para todo el intervalo.

Ejercicio 2.- Se conoce la siguiente tabla de valores de una función $f(x)$:

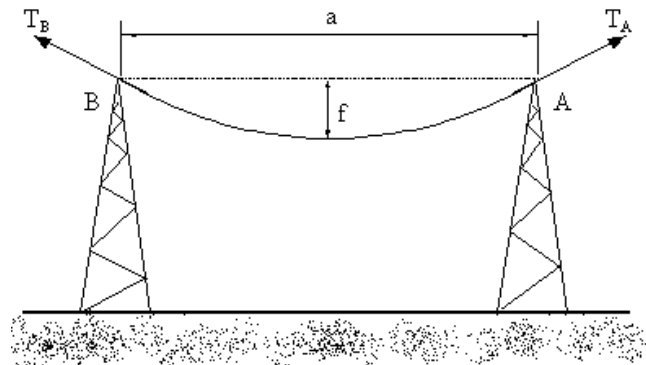
x	1	-1	2	-2
$f(x)$	-2	-3	$\frac{3}{5}$	$-\frac{13}{5}$

- Obtener el polinomio de interpolación en la forma de Newton.
- Obtener los polinomios de interpolación de Lagrange $\{l_0(x), l_1(x), l_2(x), l_3(x)\}$ y la expresión del polinomio de interpolación en la forma de Lagrange.
- Obtener el polinomio de interpolación en la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ y la matriz de paso entre ambas bases.
- Evaluar el polinomio de interpolación y su derivada en el punto $x=1$ utilizando la regla de Horner. Obtener la regla numérica de derivación numérica que genera el mismo resultado.
- Demostrar que el polinomio de interpolación tiene al menos una raíz real positiva.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 4
	Tema	Sistemas Lineales lineales (Pivoteo)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 3.- Las torres de soporte de una línea de alta tensión¹ tienen un vano de 400m. Se ha medido la altura a que se encuentra el cable en distintas partes del recorrido obteniéndose los siguientes valores

Distancia (m)	0	120	230	310	400
Altura (m)	50	43.28	42.18	44.42	50.00



- Obtener la forma de Newton del polinomio de interpolación y utilizarla para obtener la flecha máxima (punto medio de la catenaria).
- Utilizando el método de los coeficientes indeterminados, obtener una regla numérica que permita calcular la pendiente en el punto medio.

Ejercicio 4.- Se deposita una bola en la superficie de un fluido y se suelta, dejándola hundirse mientras se toman medidas. Al cabo de un segundo, se ha hundido 2.8383m, y 7.5458 al cabo de dos segundos.

- Obtener el polinomio de interpolación, considerando que en el instante inicial la bola tiene velocidad nula y esta sometida a la aceleración de la gravedad ($g=9.81\text{m/s}^2$).
- Sabiendo que la solución exacta es $S(t) = \frac{g}{4} (2t - 1 + e^{-2t})$, indicar el error que se comete al utilizar el polinomio de interpolación.
- Se desea saber cuánto tarda la bola en alcanzar los 100m. Utilizando la solución exacta, ¿cuál es el método de intervalo más adecuado para calcular el tiempo? Justifíquese la respuesta y realícense 2 iteraciones.

¹ La ecuación de flecha en la catenaria es $f = \frac{T}{P} \left(\cosh \frac{xP}{T} - 1 \right)$ y de la parábola $y = \frac{Px^2}{2T}$ donde P es el peso

unitario del cable, T la máxima tensión soportada y x se mide desde el punto más bajo. La aproximación es válida para vanos inferiores a 1000m.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 4
	Tema	Sistemas Lineales lineales (Pivoteo)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

- (d) Obténgase una función de punto fijo y un intervalo que cumplan las condiciones de convergencia y sirvan para solucionar la ecuación planteada en el apartado anterior. Realizar dos iteraciones a partir del valor $t=25$.

Ejercicio 5.- Dados los siguientes pares de valores $\{(0,1),(1,2),(3,0)\}$, obtener el polinomio de interpolación segmentaria siguiente:

- (a) Cuadrático con condición natural en el extremo izquierdo ($f'(0)=0$).
- (b) Cuadrático con condición sujeta en el extremo derecho ($f'(3)=1$).
- (c) Cúbico con condiciones naturales.
- (d) Cúbico con condiciones sujetas ($f'(0)=0$ y $f'(3)=1$).

Ejercicio 6.- Dado el punto $z=\pi/4$ y la función $f(x)=\sin(x)\cos(x)$, de la que se conoce su valor en el soporte $\{0,\pi/6,\pi/3,4\pi/6\}$:

- (a) Obtener, escogiendo los puntos de forma óptima para interpolar en z , polinomios de interpolación de grado 1, 2 y 3 con los datos anteriores. Acotar, utilizando la fórmula de error, el error cometido en el punto z . Comparar el resultado con el error real en el punto z .
- (b) Si se usara el polinomio de interpolación segmentaria lineal en todo el intervalo ¿Cuál es el menor número de puntos suficientes para asegurar que el error es siempre inferior a 0.001. Evaluar, en ese caso, el valor en el punto z .
- (c) Obtener el polinomio de interpolación segmentaria cuadrática (spline cuadrático) tomando como dato añadido el valor de la derivada de la función en el extremo izquierdo y evaluarlo en el punto z .

Ejercicio 7.- Dadas las funciones $f_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, $f_2(x) = \ln(1+x)$ y $f_3(x) = \sqrt{x}$ y el soporte formado por $\{0,4,9\}$

- (a) Obtener la expresión de los polinomios de interpolación. (Nota: NO es necesario desarrollar las expresiones de Lagrange o Newton).
- (b) Evaluar el polinomio de interpolación de $f_1(x)$ en $x=5$. Comparar el valor obtenido con $f_1(5)$ y obtener el error real. Acotar el término de error obtenido cuando se usa dicho polinomio para interpolar en el punto $x=5$ y en todo el intervalo $[0,9]$.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 4 de 4
	Tema	Sistemas Lineales lineales (Pivoteo)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

- (c) Determinar el número mínimo de puntos equiespaciados suficientes para poder asegurar que la interpolación segmentaria lineal de $f_1(x)$ entre dos consecutivos tiene un error inferior a 0'001 para todo el intervalo.
- (d) Obtener el polinomio de interpolación segmentaria cuadrática (spline cuadrático) tomando como datos el valor de la función $f_1(x)$ en $\{0,4,9\}$ y el de la derivada de la función en el extremo derecho. Evaluarlo en $x=5$.