



Titulación: Ingeniero Geólogo
Asignatura: Análisis Numérico
Autor: César Menéndez

Última actualización: 14/12/2008

Interpolación Numérica

Planificación:

4 Teoría+1 Prácticas+2 Laboratorio

Materiales:

MATLAB

Conocimientos previos:

T^{mas}. básicos de Cálculo –
Desarrollos de Taylor – Sistemas
lineales –



Ejemplo

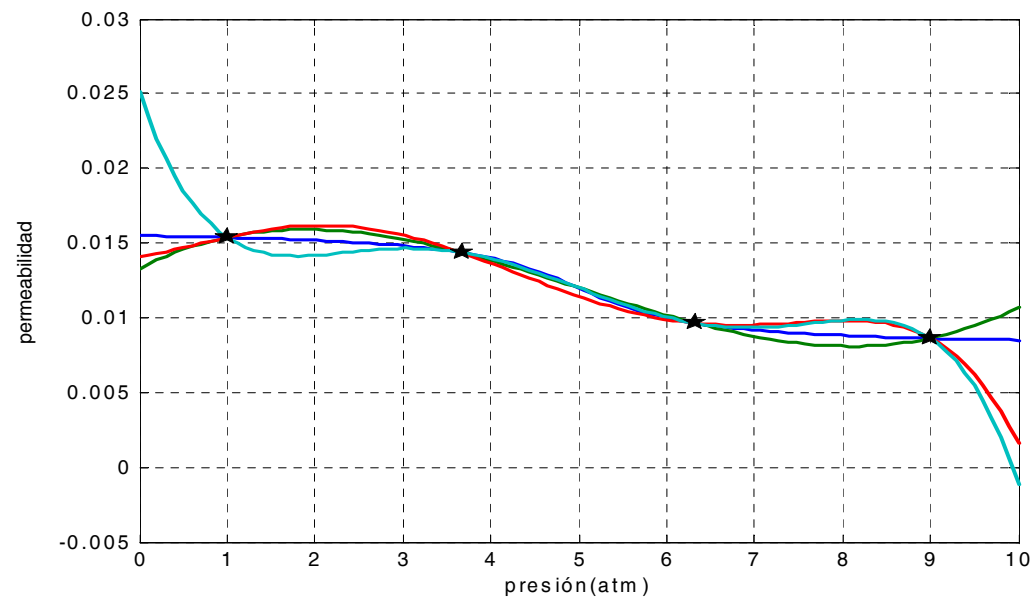
Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

- Ensayos en laboratorio que determinan la permeabilidad de un material para diferentes presiones
- Estimar su permeabilidad para presiones intermedias
- Determinar el tipo de problema y seleccionar la base de funciones
 - ¿Existencia y unicidad de solución?
 - Soporte $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$





Interpolación

Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

- Sustitución de una función (conocida o tabulada) por otra más simple
- Interpolante como combinación de la base de un espacio funcional:

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x)$$

- Funciones base: polinómicas, trigonométricas, ...
- Función interpolante “coincide” con la inicial
 - Lagrange: valor de la función en algunos puntos
 - Taylor: valor de las derivadas en un punto
 - Hermite: valor de la función y la derivada
 - ...



Interpolación

Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

- Plantear las condiciones de existencia y unicidad de solución del problema general de interpolación
- Saber que el problema de Lagrange tiene un único polinomio de interpolación de grado mínimo
- Conocer las diferentes formas de representar dicho polinomio
- Conocer las ventajas e inconvenientes de las formas de Lagrange y de Newton
- Comprender la relación entre diferencias divididas y expansión en serie de Taylor y su uso para acotar el error
- Comprender las limitaciones e incertidumbres de la extrapolación
- Valorar las ventajas e inconvenientes de los diferentes interpolantes segmentarios



Problema de Lagrange

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

Cuadratura Gausiana

Int. Romberg

Int. Adaptativa

Bibliografía

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x) : \psi(x_k) = f(x_k), k = 0, 1, \dots, n$$

- Existencia y unicidad asociadas al sistema

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

- Base polinómica: soporte sin puntos repetidos
 $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$
- Base trigonométrica: soporte sin puntos repetidos y comprendidos en $[-\pi, \pi]$
 $\{1, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(kx), \cos(kx), \dots\}$



Problema de Hermite

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} \alpha_i \varphi_i(x) : \begin{cases} \psi(x_k) = f(x_k) \\ \psi'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}, k = 0, 1, \dots, n$$

– Existencia y unicidad asociadas al sistema

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) & \varphi_{n+1}(x_0) & \cdots & \varphi_{2n+1}(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) & \varphi_{n+1}(x_1) & \cdots & \varphi_{2n+1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) & \varphi_{n+1}(x_n) & \cdots & \varphi_{2n+1}(x_n) \\ \varphi'_0(x_0) & \varphi'_1(x_0) & \cdots & \varphi'_n(x_0) & \varphi'_{n+1}(x_0) & \cdots & \varphi'_{2n+1}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_0(x_n) & \varphi'_1(x_n) & \cdots & \varphi'_n(x_n) & \varphi'_{n+1}(x_n) & \cdots & \varphi'_{2n+1}(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \\ \vdots \\ \alpha_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \\ f'(x_0) \\ \vdots \\ f'(x_n) \end{pmatrix}$$

– Base polinómica: soporte sin puntos repetidos

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^{2n+1}\}$$

– Base trigonométrica: soporte sin puntos repetidos y comprendidos en $[-\pi, \pi]$

$$\{1, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(kx), \cos(kx), \}$$



Problema de Taylor

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x) : \psi^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), k = 0, 1, \dots, n$$

– Existencia y unicidad asociados al sistema

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(a) & \varphi_1(a) & \cdots & \varphi_n(a) \\ \varphi'_0(a) & \varphi'_1(a) & \cdots & \varphi'_n(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0^{(n)}(a) & \varphi_1^{(n)}(a) & \cdots & \varphi_n^{(n)}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) \\ f'(a) \\ \vdots \\ f^{(n)}(a) \end{pmatrix}$$

– Series de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \xrightarrow{¿converge?} \psi(x)$

• Criterios del cociente y de la raíz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| = L \vee \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|} = L$$

- Si $L = \infty$, converge en $x=0$, si $L=0$, converge $\forall x$
- Sino converge para $|x| < 1/L$



Ejemplos

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

● Existencia y unicidad de

– $F(-\pi)=1, F(0)=0, F(\pi)=1$

- Base polinómica: solución única

$$P_2(x) = 0 + 0x + \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 x^2$$

- $\{1, \sin(x), \sin(2x)\}$: sin solución

- $\{1, \cos(x), \cos(2x)\}$: solución múltiple

$$\psi(x) = \frac{1}{2}1 + \frac{-1}{2}\cos(x) + 0 \cdot \cos(2x)$$

$$\psi(x) = 0 \cdot 1 + \frac{-1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

– $F(x_0)=y_0, F(x_1)=y_1, F'(x_2)=y_2$

- Base polinómica:

– Solución única si $x_0 \neq x_1 \wedge x_2 \neq \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$



Problema de Lagrange

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange
- Dif. Divididas
- Acotación del error
- Dif. Div. General

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^k : P_n(x_k) = f(x_k), k = 0, 1, \dots, n$$

- Resolución “frontal” del sistema: desaconsejable (mal condicionado)
- El polinomio de interpolación
 - Existe un único polinomio de grado menor o igual a n, pero existen infinitos polinomios de grado mayor.

[Demo](#)

- Hay formas más fáciles de calcularlo, e infinitas de “escribirlo” (aunque asociadas al cálculo)

- Forma canónica (resolución frontal)

$$P_2(x) = x^2 - 3x + 1 \quad \text{para} \quad \{(-1, 5), (0, 1), (1, -1)\}$$

- Forma de Lagrange

$$P_2(x) = \frac{5}{2}x(x-1) - (x+1)(x-1) - \frac{1}{2}x(x+1)$$

- Forma de Newton

$$P_2(x) = 5 - 4(x+1) + x(x+1)$$



Polinomios de Lagrange

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

- Polinomio de interpolación como combinación de polinomios más simples de obtener

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^n(x) : L_i^n(x_k) = \delta_i^k$$

- Propiedades de los polinomios de Lagrange
 - Cálculo

$$L_i^n(x) = \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

[Demo](#)

- Suma $\sum_{i=0}^n L_i^n(x) = 1$

[Demo](#)

- Derivación
$$\begin{cases} \frac{d}{dx} L_i^n(x_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_i-x_j} \\ \frac{d}{dx} L_i^n(x_j) = \left(\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(x_i-x_k)} \right) \prod_{k \neq i, j}^n (x_j-x_k) \end{cases}$$

[Demo](#)



Forma de Lagrange (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

Grado n y además $L_i^n(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} : L_i^n(x_k) = \delta_i^k$

Ejemplo

x	F(x)
$X_0 = -2$	$-13/5$
$X_1 = -1$	-3
$X_2 = 1$	-2
$X_3 = 2$	$3/5$

$$L_0^3(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)} = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{-12}$$

$$L_1^3(x) = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{6}$$

$$L_2^3(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-2)} = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{-6}$$

$$L_3^3(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-1)} = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{12}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^3(x) = -\frac{13}{5} L_0^3(x) - 3 L_1^3(x) - 2 L_2^3(x) + \frac{3}{5} L_3^3(x) =$$

$$= -\frac{13}{5} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{-12} - 3 \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{6} - 2 \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{-6} + \frac{3}{5} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{12}$$

$$= \frac{1}{10} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{5} x - 3$$



Forma de Lagrange (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

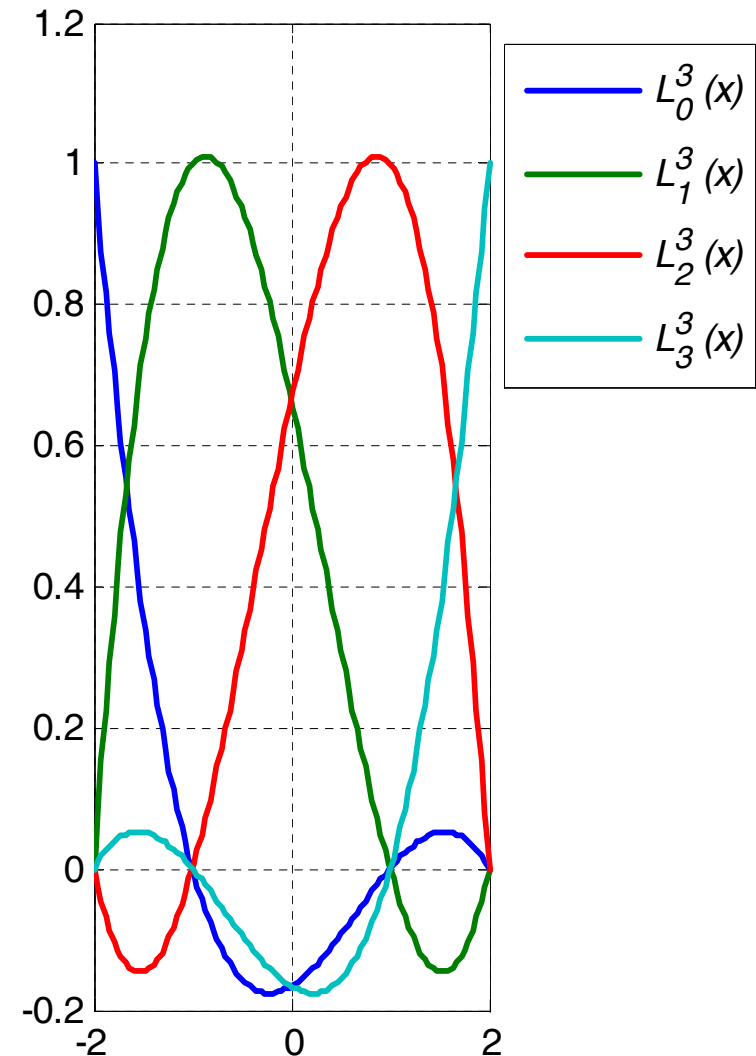
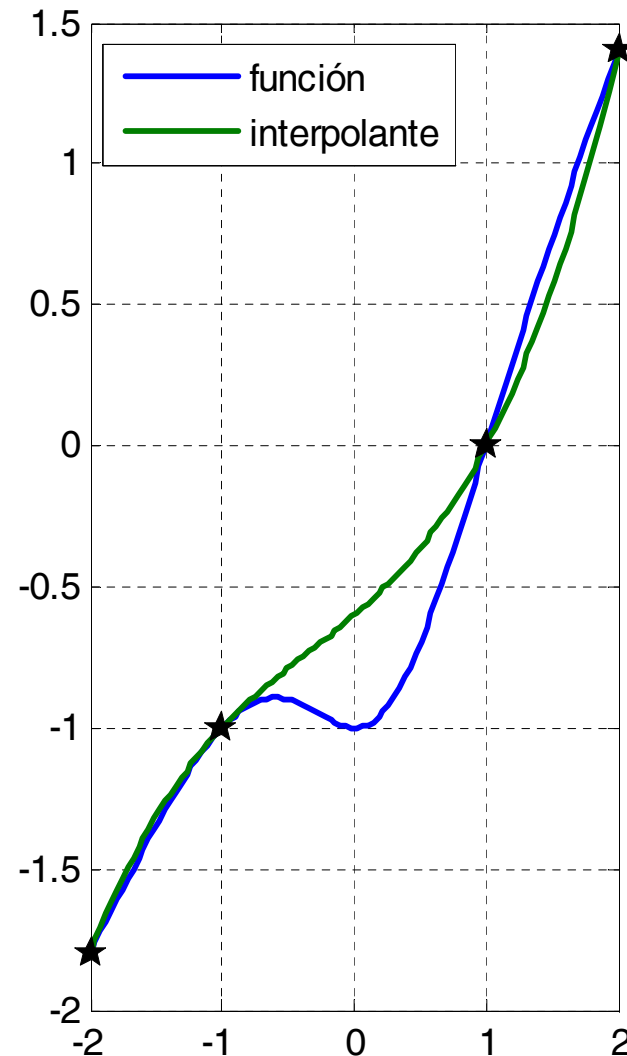
- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía





Forma de Lagrange (III)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

- Ventajas

- Fácil de calcular
- Independientes de la función a interpolar

- Polinomio: $y=2x-1$

- $\{(-2,-5),(-1,-3),(1,1),(2,3)\}$

$$\begin{aligned}P_n(x) &= \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^3(x) = \\&= -5L_0^3(x) - 3L_1^3(x) + 1L_2^3(x) + 3L_3^3(x) = \\&= -5 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{-12} - 3 \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{6} + \\&\quad + 1 \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{-6} + 3 \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{12} \\&= 0x^3 + 0x^2 + 2x - 1\end{aligned}$$

- Inconvenientes

- El interpolante puede ser mucho más simple que los polinomios de Lagrange
- Si cambia el soporte los polinomios obtenidos son inútiles, es necesario repetir todo el proceso



Forma de Newton – Diferencias Divididas (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) = \sum_{i=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

• Origen: $Q_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x) = \alpha_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \alpha_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)$$

• Propiedades

– Simetría

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k (x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

[Demo](#)

– Cálculo

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] - f[x_1, \dots, x_{k-1}, x_k]}{x_0 - x_k}$$

[Demo](#)



Forma de Newton – Diferencias Divididas (II)

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Cálculo de la tabla de Diferencias divididas

x	F(x)		
$x_0 = -2$	$f[x_0] = \frac{-13}{5}$		
$x_1 = -1$	$f[x_1] = -3$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = \frac{(-\frac{13}{5}) - (-3)}{(-2) - (-1)} = -\frac{2}{5}$	
$x_2 = 1$	$f[x_2] = -2$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_1] - f[x_2]}{x_1 - x_2} = \frac{(-3) - (-2)}{(-1) - (1)} = \frac{1}{2}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{-\frac{2}{5} - \frac{1}{2}}{(-2) - (1)} = \frac{3}{10}$
$x_3 = 2$	$f[x_3] = \frac{3}{5}$	$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_2] - f[x_3]}{x_2 - x_3} = \frac{(-2) - (\frac{3}{5})}{(2) - (1)} = -\frac{13}{5}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3} = \frac{\frac{1}{2} - (-\frac{13}{5})}{(-1) - (2)} = \frac{7}{10}$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_3} = \frac{\frac{3}{10} - \frac{7}{10}}{(-2) - (2)} = \frac{1}{10}$$

$$P_n(x) = \frac{-13}{5} + \frac{-2}{5}(x + 2) + \frac{3}{10}(x + 2)(x + 1) + \frac{1}{10}(x + 2)(x + 1)(x - 1) \\ = \frac{3}{5} + \frac{13}{5}(x - 2) + \frac{7}{10}(x - 2)(x - 1) + \frac{1}{10}(x - 2)(x - 1)(x + 1) \\ P_3(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}x - 3$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía



Forma de Newton – Diferencias Divididas (III)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

● Ventajas

- Los cálculos son muy simples
- La tabla de diferencias divididas se simplifica cuando el interpolante es de menor grado
- Las operaciones se pueden reutilizar al añadir o eliminar puntos

● Inconvenientes

- El cálculo depende de la función

● Polinomio: $y=2x-1$

- $\{(-2,-5),(-1,-3),(1,1),(2,3)\}$

x	F(x)			
$x_0=-2$	-5			
$x_1=-1$	-3	2		
$x_2=1$	1	2	0	
$x_3=2$	3	2	0	0



Forma de Newton – Diferencias Finitas

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

- Puntos equiespaciados $x_k = x_0 + k h$

- Progresivas $\Delta f_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ y $\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$
- Regresivas $\nabla f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$ y $\nabla^n f_k = \nabla^{n-1} f_k - \nabla^{n-1} f_{k-1}$

- Relaciones

- $\nabla f_k = \Delta f_{k-1}$ y $\nabla^n f_k = \Delta^n f_{k-n}$
- $\Delta^n f_k = n! h^n f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}]$
- $\Delta^n f_k = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_{k+i}$
- $\nabla^n f_k = n! h^n f[x_{k-n}, \dots, x_{k-1}, x_k]$
- $\nabla^n f_k = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_{k-n+i}$



Error en la interpolación de Lagrange (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

$$\bullet \quad f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \quad \xi \in I = (x_{\min}, x_{\max})$$

[Demo](#)

$$\bullet \quad f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!} \quad \xi \in I = (x_{\min}, x_{\max})$$

[Demo](#)

$$\bullet \quad |f(z) - P_n(z)| \leq \frac{\max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^n (z - x_k) \right|$$

$$\bullet \quad \max_{x \in I} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \max_{x \in I} \left| \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right|$$



Error en la interpolación de Lagrange (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

Datos provienen de

$$f(x) = \frac{x^3 - 5}{x^2 + 1} \quad f(0.5) = -3.9$$

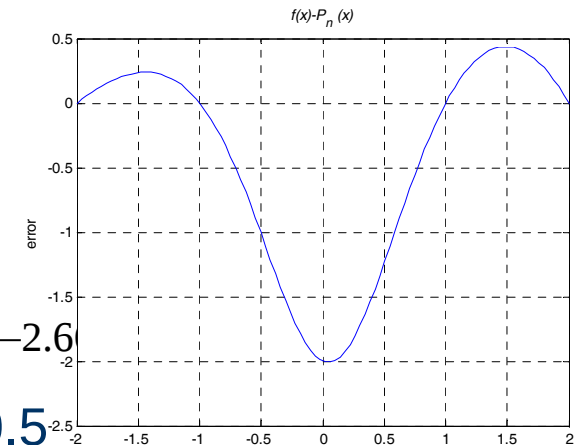
– Valor del interpolante en $x=0.5$

$$P_n(0.5) = \frac{1}{10} 0.5^3 + \frac{1}{2} 0.5^2 + \frac{2}{5} 0.5 - 3 = \frac{-213}{80} = -2.6625$$

– Error máximo cometido en $x=0.5$

$$\max_{x \in [-2, 2]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x \in [-2, 2]} \left| -24 \frac{x^5 + 25x^4 - 10x^3 - 50x^2 + 5x + 5}{(x^2 + 1)^5} \right| \approx 122$$

$$|f(0.5) - P_n(0.5)| \leq \frac{122}{4!} |(0.5 + 2)(0.5 + 1)(0.5 - 1)(0.5 - 2)| = \frac{915}{128} \approx 7.1484$$



– Error máximo cometido en todo el intervalo

$$\max_{x \in [-2, 2]} \left| \prod_{k=0}^3 (x - x_k) \right| = \left| \prod_{k=0}^3 (x - x_k) \right|_{x=0} = 4$$

$$\max_{x \in [-2, 2]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{122}{4!} 4 = \frac{61}{3} \approx 20.3333$$



Error en la interpolación de Lagrange (III)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

• Datos equiespaciados $x_k = x_0 + k h$

– Interpolación lineal

$$\max_{x \in [x_0, x_{0+h}]} |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{\max_{x \in I} |f^{(2)}(x)|}{2!} \max_{x \in I} \left| \prod_{k=0}^1 (x - x_k) \right| = \frac{\max_{x \in I} |f^{(2)}(x)|}{2!} \frac{1}{4} h^2$$

– Interpolación parabólica

$$\max_{x \in [x_0, x_{0+2h}]} |f(x) - P_2(x)| \leq \frac{\max_{x \in I} |f^{(3)}(x)|}{3!} \max_{x \in I} \left| \prod_{k=0}^2 (x - x_k) \right| = \frac{\max_{x \in I} |f^{(3)}(x)|}{3!} \frac{2}{3\sqrt{3}} h^3$$

– Interpolación cúbica

$$\max_{x \in [x_0, x_{0+3h}]} |f(x) - P_3(x)| \leq \frac{\max_{x \in I} |f^{(4)}(x)|}{4!} \max_{x \in I} \left| \prod_{k=0}^3 (x - x_k) \right| = \frac{\max_{x \in I} |f^{(4)}(x)|}{4!} h^4$$

n	$\max_{s \in [0, n]} \left \prod_{k=0}^n (s - k) \right $
4	3.6314
5	16.9009
6	95.8419

n	$\max_{s \in [0, n]} \left \prod_{k=0}^n (s - k) \right $
7	640.6010
8	4.9292 10^3
9	4.2901 10^4



Ejemplo 1 de Interpolación de Lagrange (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

- El mástil de un barco construido con una nueva aleación de aluminio tiene un área transversal de 5.65 cm^2 . Se desarrollan pruebas para definir la relación entre esfuerzo (fuerza aplicada al material por unidad de área) y deformación (deflexión por unidad de longitud), cuyos resultados se muestran en la tabla.

Esfuerzo (Kg/cm ²)	Deforma. (m)
126	0.0005
365	0.0013
506	0.002
527	0.0045
562	0.006
703	0.0085

- Utilice polinomios de varios grados para obtener la deformación del mástil debida a la fuerza del viento, evaluada en 2900Kg. . ¿Cual parece ser el más adecuado?.



Ejemplo 1 de Interpolación de Lagrange (II)

- Punto de interpolación: $z = 2900/5.65 = 513.2743$
- Condiciones para seleccionar el orden de los puntos de interpolación
 - El punto de interpolación z debe pertenecer al intervalo
 - Los puntos deben hacer mínima la cota de error; habitualmente significa que se seleccionan dependiendo de su distancia a z

x	F(x)					
506	0.002					
527	0.0045	$0.1190 \cdot 10^{-3}$				
562	0.006	$0.0429 \cdot 10^{-3}$	$-0.1361 \cdot 10^{-5}$			
365	0.0013	$0.0239 \cdot 10^{-3}$	$0.0117 \cdot 10^{-5}$	$-0.1048 \cdot 10^{-7}$		
703	0.0085	$0.0213 \cdot 10^{-3}$	$-0.0018 \cdot 10^{-5}$	$-0.0077 \cdot 10^{-7}$	$0.4930 \cdot 10^{-10}$	
126	0.0005	$0.0139 \cdot 10^{-3}$	$0.0031 \cdot 10^{-5}$	$-0.0011 \cdot 10^{-7}$	$-0.0164 \cdot 10^{-10}$	$0.1340 \cdot 10^{-12}$

Interpolante	P(z)
$P_1(x) = 0.002 + 0.1190 \cdot 10^{-3} (x-506)$	$2.865992 \cdot 10^{-3}$
$P_2(x) = P_1(x) - 0.1361 \cdot 10^{-5} (x-506)(x-527)$	$3.001836 \cdot 10^{-3}$
$P_3(x) = P_2(x) - 0.1048 \cdot 10^{-7} (x-506)(x-527)(x-562)$	$2.950845 \cdot 10^{-3}$
$P_4(x) = P_3(x) + 0.4930 \cdot 10^{-10} (x-506)(x-527)(x-562)(x-365)$	$2.986407 \cdot 10^{-3}$
$P_5(x) = P_4(x) + 0.1340 \cdot 10^{-12} (x-506)(x-527)(x-562)(x-365)(x-703)$	$2.968062 \cdot 10^{-3}$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía



Ejemplo 1 de Interpolación de Lagrange (III)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

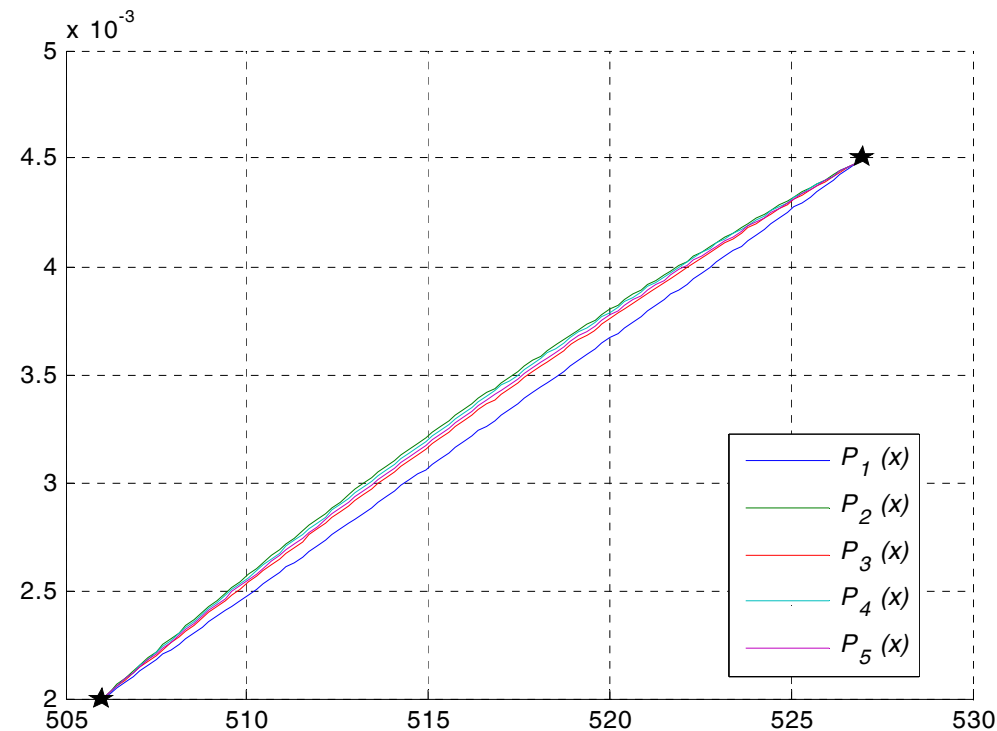
- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

Interpolante	P(z)
$P_1(x) = 0.002 + 0.1190 \cdot 10^{-3} (x-506)$	$2.865992 \cdot 10^{-3}$
$P_2(x) = P_1(x) - 0.1361 \cdot 10^{-5} (x-506)(x-527)$	$3.001836 \cdot 10^{-3}$
$P_3(x) = P_2(x) - 0.1048 \cdot 10^{-7} (x-506)(x-527)(x-562)$	$2.950845 \cdot 10^{-3}$
$P_4(x) = P_3(x) + 0.4930 \cdot 10^{-10} (x-506)(x-527)(x-562)(x-365)$	$2.986407 \cdot 10^{-3}$
$P_5(x) = P_4(x) + 0.1340 \cdot 10^{-12} (x-506)(x-527)(x-562)(x-365)(x-703)$	$2.968062 \cdot 10^{-3}$





Ejemplo 1 de Interpolación de Lagrange (IV)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

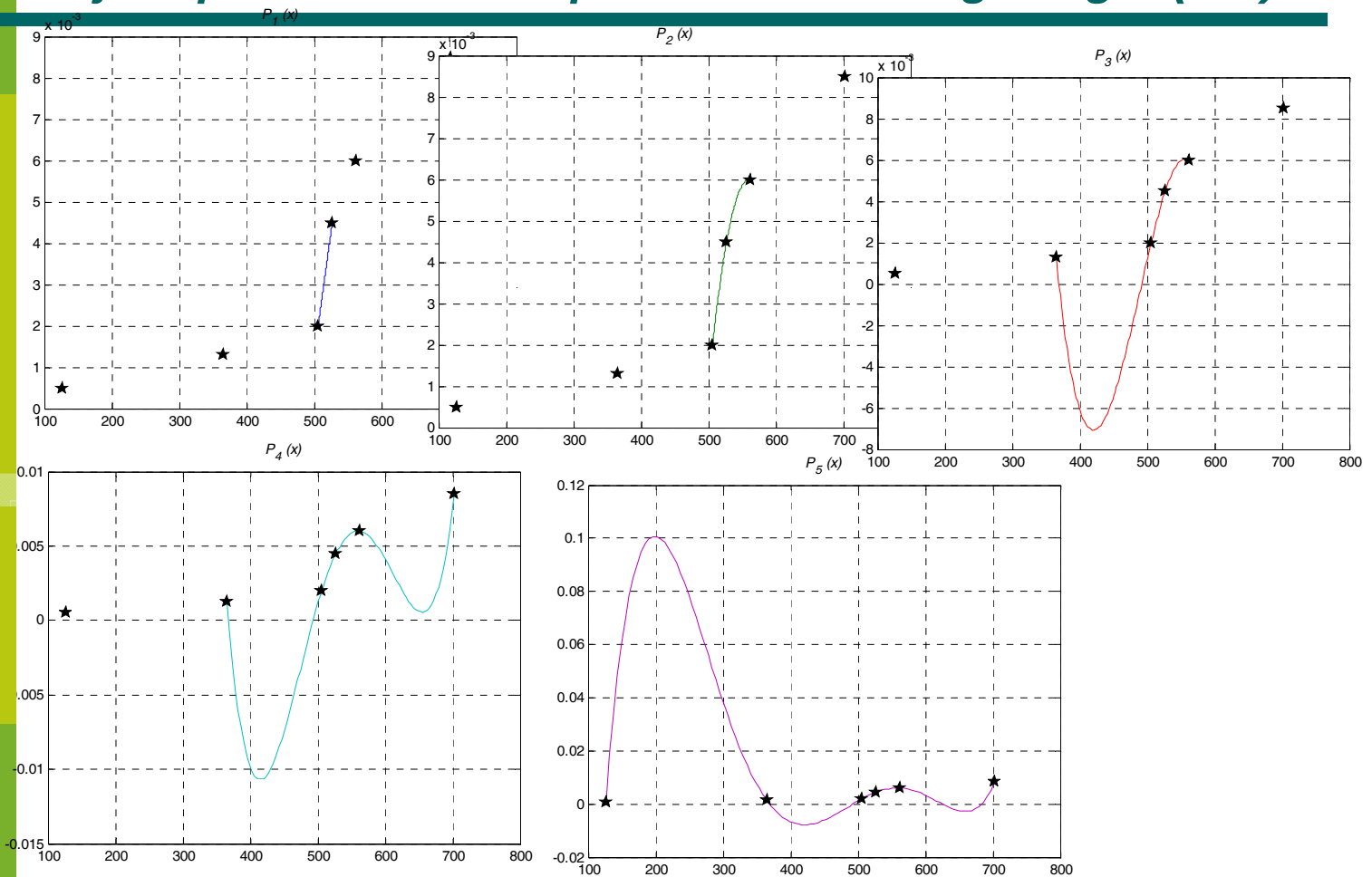
- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía



¡ Sólo tienen sentido físico los interpolantes de primer y segundo grado !



Ejemplo 2 de Interpolación de Lagrange (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- *Lagrange*

- *Dif. Divididas*

- *Acotación del error*

- *Dif. Div. General.*

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

- Se desea tabular la función $f(x)=\cos(x)*\exp(x)$ definida en el intervalo $[-\pi,\pi]$ mediante puntos equiespaciados.
- ¿Cuántos puntos son necesarios para que al interpolar linealmente entre dos valores consecutivos el error entre la función y el interpolante no supere la media unidad?. ¿Y si se utiliza una interpolación con tres puntos consecutivos?.
- ¿Cual es el máximo error cometido al utilizar 5 puntos equiespaciados? ¿Y si se toman 9?



Ejemplo 2 de Interpolación de Lagrange (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

- Error menor que 0.5
 - Interpolación lineal

$$\max_{x \in [x_0, x_{0+h}]} |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{\max_{x \in I} |f^{(2)}(x)|}{2!} \frac{1}{4} h^2$$

$$f(x) = \cos(x)e^x \rightarrow f''(x) = -2\sin(x)e^x \rightarrow M = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f^{(2)}(x)|$$

$$\text{Nota: } f^{(3)}(x) = 0 = 2e^x (\cos(x) + \sin(x)) \rightarrow x = \frac{3}{4}\pi \cup \{-\pi, \pi\} \Rightarrow M = \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$\max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi}}{2!} \frac{1}{4} h^2 < 0.5 \rightarrow h < 0.5178 \rightarrow N > \frac{2\pi}{h} + 1 = 14 \text{ puntos}$$

- Interpolación cuadrática

$$\max_{x \in [x_0, x_{0+2h}]} |f(x) - P_2(x)| \leq \frac{\max_{x \in I} |f'''(x)|}{3!} \frac{2}{3\sqrt{3}} h^3 \quad f'''(x) = -2e^x (\cos(x) + \sin(x))$$

$$f^{(4)}(x) = 0 = -4\cos(x)e^x \rightarrow x = \left\{\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\} \cup \{-\pi, \pi\} \Rightarrow M = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f'''(x)| = 2e^\pi$$

$$\max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |f(x) - P_2(x)| \leq \frac{2e^{\frac{\pi}{2}}}{3!} \frac{2}{3\sqrt{3}} h^3 < 0.5 \rightarrow h < 0.5522 \rightarrow N > \frac{2\pi}{h} + 1 = 13 \text{ puntos}$$



Ejemplo 2 de Interpolación de Lagrange (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

– Cota del error de interpolación

- con 5 puntos

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - P_4(x)| \leq \frac{\max_{x \in I} |f^{(5)}(x)|}{5!} 3.6314h^5$$

$$f^{(6)}(x) = 0 = 8\sin(x)e^x \rightarrow x = \{0, \pi\}$$

$$\Rightarrow M = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f^{(5)}(x)| = |4e^\pi (\sin(\pi) - \cos(\pi))| = 4e^\pi$$

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - P_4(x)| \leq \frac{4e^\pi}{5!} 3.6314 \left(\frac{2\pi}{4}\right)^5 < 26.7873$$

- con 9 puntos

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - P_8(x)| \leq \frac{\max_{x \in I} |f^{(9)}(x)|}{9!} 4.9292 \cdot 10^3 h^9$$

$$f^{(10)}(x) = 0 = 32\sin(x)e^x \rightarrow x = \{0, \pi\}$$

$$\Rightarrow M = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f^{(9)}(x)| = |16e^\pi (\sin(\pi) - \cos(\pi))| = 16e^\pi$$

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - P_8(x)| \leq \frac{16e^\pi}{9!} 4.9292 \cdot 10^3 \left(\frac{2\pi}{8}\right)^9 < 0.5719$$



Ejemplo 2 de Interpolación de Lagrange (III)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

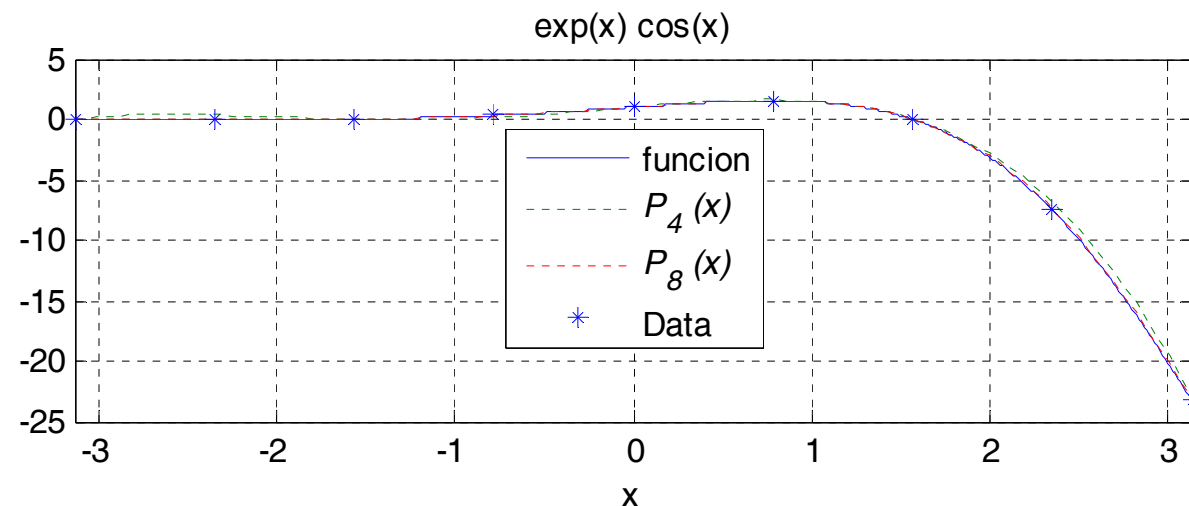
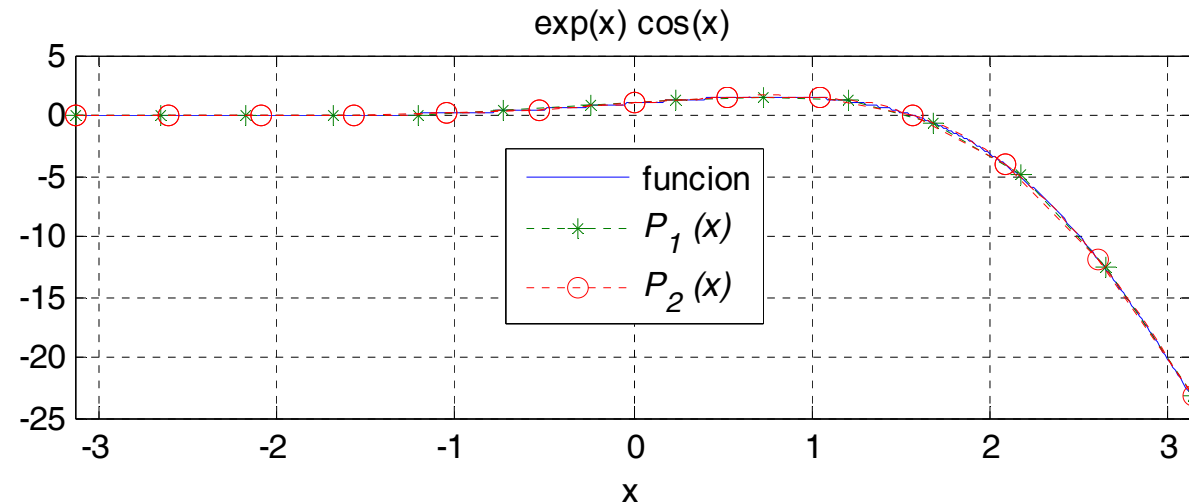
- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía



Máximo error real:

Lineal : 0.4234

Cuadrática: 0.1393

5 puntos: 0.9028

9 puntos: 0.0160



Interpolación de Hermite (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x) + \hat{\alpha}_i \hat{\varphi}_i(x) : \begin{cases} P_{2n+1}(x_k) = f(x_k) \\ P'_{2n+1}(x_k) = f'(x_k) \end{cases}, k = 0, 1, \dots, n$$

– Polinomios de Hermite

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(x_k) = \delta_i^k \wedge \varphi'_i(x_k) = 0 \\ \hat{\varphi}_i(x_k) = 0 \wedge \hat{\varphi}'_i(x_k) = \delta_i^k \end{array} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(x) = (a + bx)(L_i^n(x))^2 \\ \hat{\varphi}_i(x) = (\hat{a} + \hat{b}x)(L_i^n(x))^2 \end{array} \right\} \rightarrow \\ &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(x) = \left(1 - 2(x - x_i) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} \right) (L_i^n(x))^2 \\ \hat{\varphi}_i(x) = (x - x_i)(L_i^n(x))^2 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

– Diferencias divididas generalizadas

- Soporte donde cada punto se repite consecutivamente tantas veces como datos haya en el mismo

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \begin{cases} \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] - f[x_1, \dots, x_{k-1}, x_k]}{x_0 - x_k} & x_0 \neq x_k \\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} & x_0 = x_k \end{cases}$$



Ejemplo de Interpolación de Hermite (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

- A un vehículo que recorre un circuito de 6Km se le toma el tiempo y la velocidad cada vez que pasa por meta, obteniéndose la tabla anexa.
- Obtenga el polinomio que indica los Km recorridos en función del tiempo. ¿Cuánto habría recorrido en 120''?

Vuelta	Tiempo (s)	Velocidad (km/h)
0	0	0
2	250	234
5	640	252

Se debe comenzar por homogeneizar unidades

Tiempo (s)	Espacio (m)	Velocidad (m/s)
0	0	0
250	12000	65
640	30000	70



Ejemplo de Interpolación de Hermite (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General.

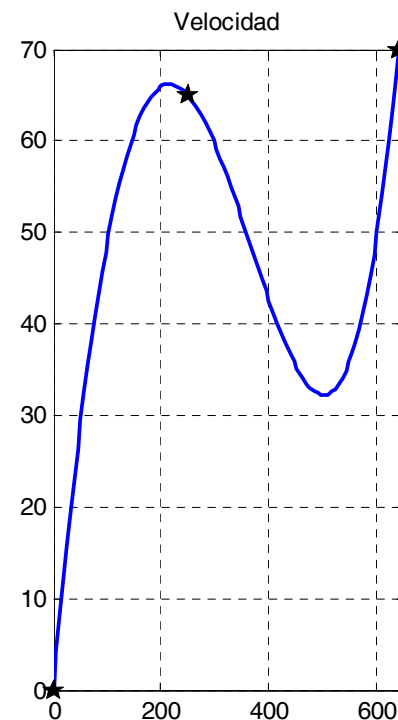
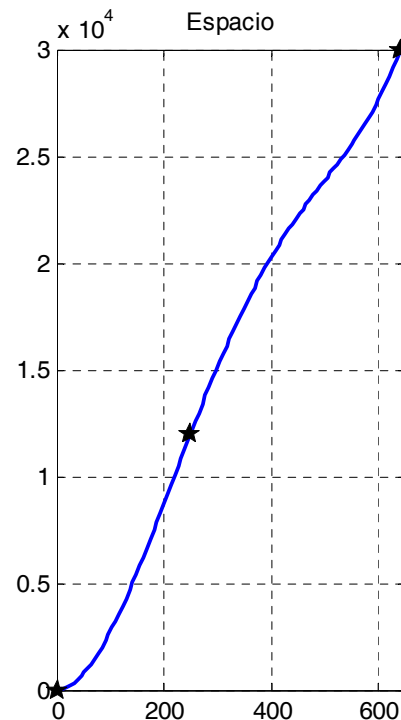
Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

Forma de Hermite

$$P_5(x) = 0\varphi_0(x) + 12000\varphi_1(x) + 30000\varphi_2(x) + 0\hat{\varphi}_0(x) + 65\hat{\varphi}_1(x) + 70\hat{\varphi}_2(x)$$



$$\varphi_0(x) = \left(1 - \frac{2(x-0)}{(0-250)(0-640)}\right) \left(L_0^2(x)\right)^2$$

$$\varphi_1(x) = \left(1 - \frac{2(x-250)}{(250-0)(250-640)}\right) \left(L_1^2(x)\right)^2$$

$$\varphi_2(x) = \left(1 - \frac{2(x-640)}{(640-0)(640-250)}\right) \left(L_2^2(x)\right)^2$$

$$\hat{\varphi}_i(x) = (x-0) \left(L_0^2(x)\right)^2$$

$$\hat{\varphi}_i(x) = (x-250) \left(L_1^2(x)\right)^2$$

$$\hat{\varphi}_i(x) = (x-640) \left(L_2^2(x)\right)^2$$

$$\begin{aligned} P_5(x) &= 0\varphi_0(120) + 12000\varphi_1(120) + 30000\varphi_2(120) + 0\hat{\varphi}_0(120) + 65\hat{\varphi}_1(120) + 70\hat{\varphi}_2(120) = \\ &= 3.618 \times 10^{-10} x^5 + 7.855 \times 10^{-8} x^4 - 6.031 \times 10^{-4} x^3 + 3.322 \times 10^{-1} x^2 \end{aligned}$$



Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

- Lagrange

- Dif. Divididas

- Acotación del error

- Dif. Div. General.

Int. Segmentaria

Int. Multidimensional

Bibliografía

Ejemplo de Interpolación de Hermite (III)

Diferencias Divididas Generalizadas

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Tabla de Diferencias

x	F(x)			$x \cdot 10^{-3}$	$x \cdot 10^{-6}$	$x \cdot 10^{-9}$
$x_0 = 0$	0					
$x_1 = 0$	0	$f[x_0, x_1] = \frac{f'(x_0)}{1!} =$	0			
$x_2 = 250$	12000	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_1] - f[x_2]}{x_1 - x_2} =$	48	0.1920		
$x_3 = 250$	12000	$f[x_2, x_3] = \frac{f'(x_2)}{1!} =$	65	0.0680	-0.4960	
$x_4 = 640$	30000	$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_3] - f[x_4]}{x_3 - x_4} =$	46.153	-0.0483	-0.1817	0.4910
$x_5 = 640$	30000	$f[x_4, x_5] = \frac{f'(x_4)}{1!} =$	70	0.0611	0.2807	0.7226
						0.3618

$$P_5(x) = 0 + 0(x - 0) + 0.1920x^2 - 0.4960 \cdot 10^{-3}x^2(x - 250) + \\ + 0.4910 \cdot 10^{-6}x^2(x - 250)^2 + 0.3618 \cdot 10^{-9}x^2(x - 250)^2(x - 640)$$

**Descripción****Objetivos****Temario**

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía

Definición

- Sea $X=\{a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n=b\}$ un soporte ordenado donde se conoce $f(x)$, se define el interpolante segmentario de grado n (spline de grado n) mediante

$$S(x) = \{P_k(x) \text{ con } x \in I_k\} \quad \text{con} \quad [a, b] = \bigcup_{k=1}^n I_k = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k]$$

donde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

$$S(x_k) = P_k(x_k) = P_{k+1}(x_k) = f(x_k)$$

y $S(x) \in C^{k-1}[a, b]$

- Incógnitas: $n \times (k+1)$ Ecuaciones: $(n+1) - k \times (n-1)$
- Condiciones
 - Naturales: $S^{(k-1)}(a) =: S^{(k-1)}(b) =: 0$
 - Sujetas: $S'(a) = S_a$ y $S'(b) =: 0$
 - Otras



Interpolación Segmentaria Lineal

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía

- Definición
 - Los polinomios en cada uno de los n intervalos de la partición son lineales, esto es, de grado 1 (dos coeficientes cada polinomio)
 - $P_k(x) = a_k(x - x_k) + b_k$
- Condiciones (Ecuaciones): $2n$
 - La spline coincide con la función en $(n+1)$ puntos
 - La función es continua en $(n-1)$ puntos internos.
- Coeficientes (Incógnitas): $2n$
 - Hay n polinomios lineales
- Sistema compatible determinado. Se obtiene una poligonal



Interpolación Segmentaria Lineal: Ejemplo (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía

- Aproximar la función $f(x)=\cos(x)*\exp(x)$ definida en $[-\pi, \pi]$ mediante una poligonal utilizando 5 y 9 puntos equiespaciados. Acotar el error cometido en cada caso.
- Interpolación con 5 puntos y polinomios

x	F[.]	F[.,.]
$-\pi$	-0.0432	
$-\pi/2$	0	0.0275
0	1	0.6366
$\pi/2$	0	-0.6366
π	-23.1407	-14.7318

Intervalo	Polinomio
$[-\pi, -\pi/2]$	$-0.0432 + 0.0275(x+\pi)$
$[-\pi/2, 0]$	$0 + 0.6366(x+\pi/2)$
$[0, \pi/2]$	$1 - 0.6366(x-0)$
$[\pi/2, \pi]$	$0 - 14.7318(x-\pi/2)$

- Error de interpolación

$$\begin{aligned}
 \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - S_1(x)| &= \max_{\substack{x \in I_k \\ k=1, \dots, n}} |f(x) - P_k(x)| \leq \frac{\max_{x \in I} |f^{(2)}(x)|}{2!} \max_{\substack{x \in I_k \\ k=1, \dots, n}} \left| \prod_{i=0}^1 (x - x_{k-i}) \right| = \\
 &= \frac{\max_{x \in I} |f^{(2)}(x)|}{2!} \frac{1}{4} h^2 = \frac{\sqrt{2} e^{\frac{3}{4}\pi}}{2!} \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{4} \right)^2 \approx 4.602
 \end{aligned}$$



Interpolación Segmentaria Lineal: Ejemplo (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

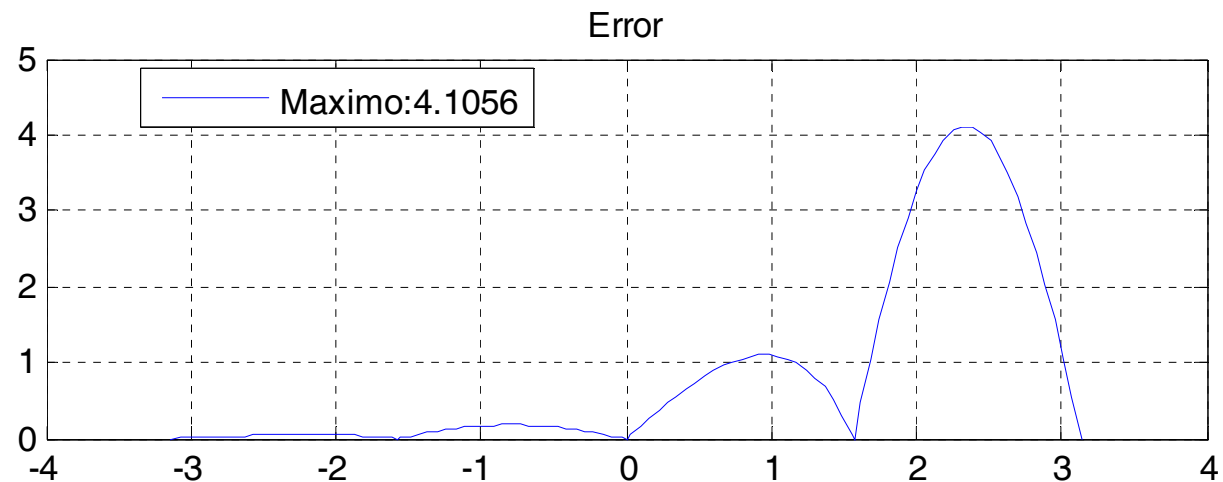
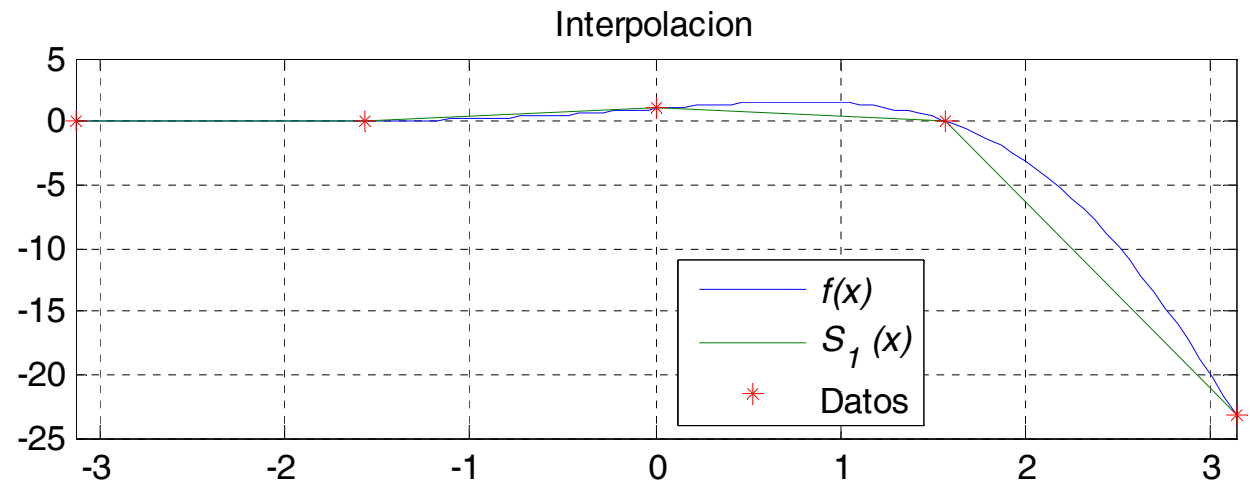
- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía





Interpolación Segmentaria Lineal: Ejemplo (III)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía

Interpolación con 9 puntos y polinomios

x	F[.]	F[.,.]
$-\pi$	-0.0432	
$-3\pi/4$	-0.0670	-0.0303
$-\pi/2$	0	0.0853
$-\pi/4$	0.3224	0.4105
0	1	0.8628
$\pi/4$	1.5509	0.7014
$\pi/2$	0	-1.9746
$3\pi/4$	-7.4605	-9.4990
π	-23.1407	-19.9647

Intervalo	Polinomio
$[-\pi, -3\pi/4]$	$-0.0432-0.0303(x+\pi)$
$[-3\pi/4, -\pi/2]$	$-0.0670+0.0853(x+3\pi/4)$
$[-\pi/2, -\pi/4]$	$0+ 0.4105(x+\pi/2)$
$[-\pi/4, 0]$	$0.3224+ 0.8628(x+\pi/4)$
$[0, \pi/4]$	$1 +0.7014(x-0)$
$[\pi/4, \pi/2]$	$1.5509-1.9746(x-\pi/4)$
$[\pi/2, 3\pi/4]$	$0 -9.4990(x-\pi/2)$
$[-\pi, -3\pi/4]$	$-7.4605-19.9647(x-3\pi/4)$

Error de interpolación

$$\begin{aligned} \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - S_1(x)| &= \max_{\substack{x \in I_k \\ k=1, \dots, n}} |f(x) - P_k(x)| \leq \frac{\max_{x \in I} |f^{(2)}(x)|}{2!} \max_{\substack{x \in I_k \\ k=1, \dots, n}} \left| \prod_{i=0}^1 (x - x_{k-i}) \right| = \\ &= \frac{\max_{x \in I} |f^{(2)}(x)|}{2!} \frac{1}{4} h^2 = \frac{\sqrt{2} e^{\frac{3}{4}\pi}}{2!} \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{8} \right)^2 \approx 1.1505 \end{aligned}$$



Interpolación Segmentaria Lineal: Ejemplo (IV)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Lineal

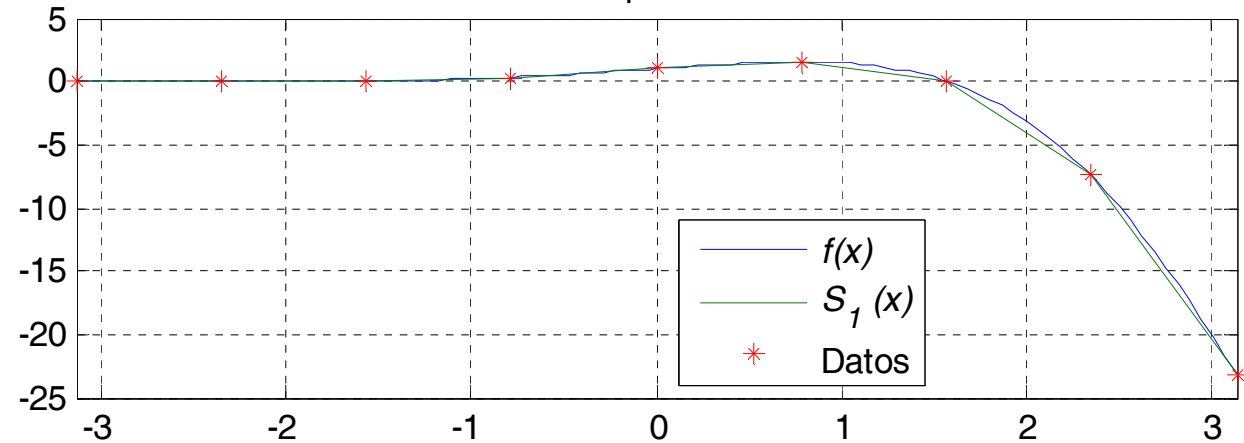
- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

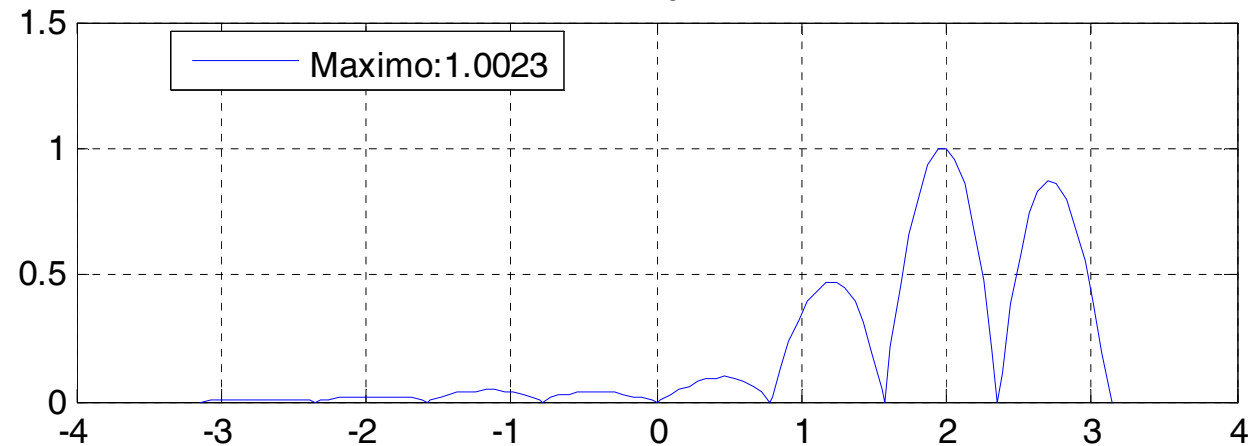
Int. Multidimensional

Bibliografía

Interpolacion



Error





Interpolación Segmentaria Cuadrática: Definición

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía

- **Definición**

- Los polinomios en cada uno de los n intervalos de la partición son cuadráticos (tres coeficientes cada polinomio).

- $$P_k(x) = a_k(x - x_k)^2 + b_k(x - x_k) + c_k$$

- **Condiciones (3n-1)**

- La spline coincide con la función en $(n+1)$ puntos
- La función es continua en $(n-1)$ puntos internos
- La derivada es continua en $(n-1)$ puntos internos

- **Incógnitas (3n)**

- n intervalos con polinomios cuadráticos en cada uno

- **Sistema indeterminado (hay 3n incógnitas y 3n-1 ecuaciones)**



Interpolación Segmentaria Cuadrática: Planteamiento (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía

- Definición

$$P_k(x) = a_k(x - x_{k-1})^2 + b_k(x - x_{k-1}) + c_k$$

$$\text{con } x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$$

- Condiciones

$$P_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1}) \wedge P_k(x_k) = f(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$P'_k(x_k) = P'_{k+1}(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

- Sustituyendo las condiciones, se obtiene

$$a_k = \frac{b_{k+1} - b_k}{2(x_k - x_{k-1})} = \frac{b_{k+1} - b_k}{2h_k} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$c_k = f(x_{k-1}) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$2f[x_k, x_{k-1}] = b_k + b_{k+1} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

[Demo](#)



Interpolación Segmentaria Cuadrática : Planteamiento (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía

● Sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} f[x_0, x_1] \\ f[x_1, x_2] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ f[x_{n-1}, x_n] \end{pmatrix}$$

- Se necesita 1 condición más para que el sistema sea compatible determinado.
 - 1) Aproximación lineal en el primer intervalo ($a_1=0 \leftrightarrow b_1=b_2$)
 - 2) Aproximación lineal en el último intervalo ($a_n=0 \leftrightarrow b_n=b_{n+1}$)
 - 3) Derivada conocida en a (b_1 conocido)
 - 4) Derivada conocida en b. (b_{n+1} conocido)



Interpolación Segmentaria Cuadrática: Planteamiento (III)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía

Caso 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} f[x_0, x_1] \\ f[x_1, x_2] \\ f[x_2, x_3] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ f[x_{n-1}, x_n] \end{pmatrix}$$

Caso 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} f[x_0, x_1] \\ f[x_1, x_2] \\ f[x_2, x_3] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ f[x_{n-1}, x_n] \end{pmatrix}$$

Caso 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} f'(x_0) \\ f[x_0, x_1] \\ f[x_1, x_2] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ f[x_{n-1}, x_n] \end{pmatrix}$$

Caso 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} f[x_0, x_1] \\ f[x_1, x_2] \\ f[x_2, x_3] \\ \vdots \\ f[x_{n-1}, x_n] \\ f'(x_n) \end{pmatrix}$$



Interpolación Segmentaria Cuadrática: Procedimiento

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía

- *Datos de partida $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$*
- *Selección de la condición a añadir*
- *Planteamiento y resolución del sistema*
- *Recuperación de los coeficientes de los polinomios para cada intervalo*
- *Selección del intervalo al que pertenece el punto a interpolar y uso del polinomio correspondiente*



Interpolación Segmentaria Cuadrática: Ejem. (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía

- Aproximar la función $f(x)=\cos(x)*\exp(x)$ definida en $[-\pi, \pi]$ mediante una Interpolación Segmentaria Cuadrática utilizando 5 y 9 puntos equiespaciados.

x	F(x)
$-\pi$	-0.0432
$-\pi/2$	0
0	1
$\pi/2$	0
π	-23.1407

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0.0275 \\ 0.6366 \\ -0.6366 \\ -14.7318 \end{pmatrix}$$

Intervalo	Polinomio
$[-\pi, -\pi/2]$	$0(x+\pi)^2 - 0.0275(x+\pi) - 0.0432$
$[-\pi/2, 0]$	$0.3878(x+\pi/2)^2 + 0.0275(x+\pi/2) + 0$
$[0, \pi/2]$	$-1.1983x^2 + 1.2457x + 1.0000$
$[\pi/2, \pi]$	$-7.7749(x-\pi/2)^2 - 2.5190(x-\pi/2) + 0$



Interpolación Segmentaria Cuadrática: Ejem. (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

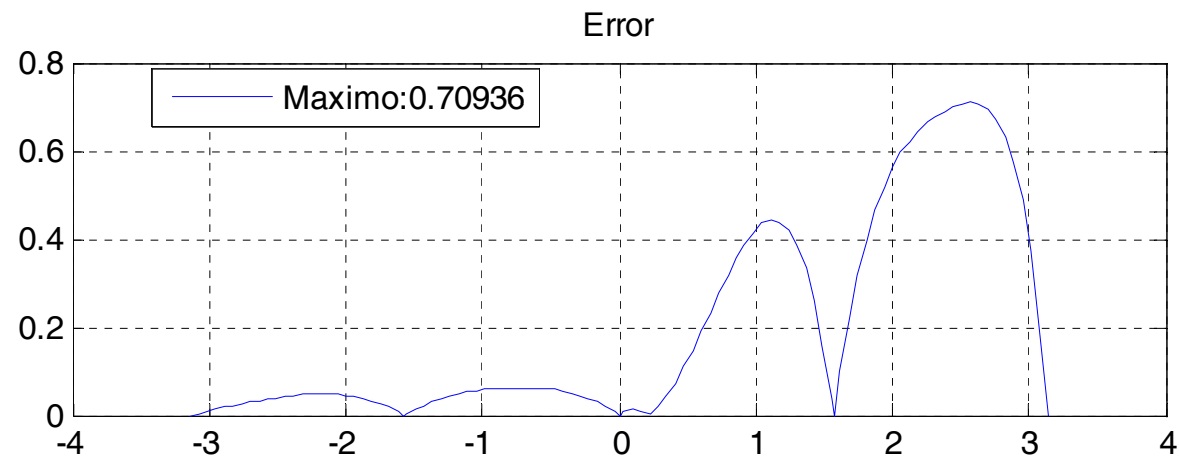
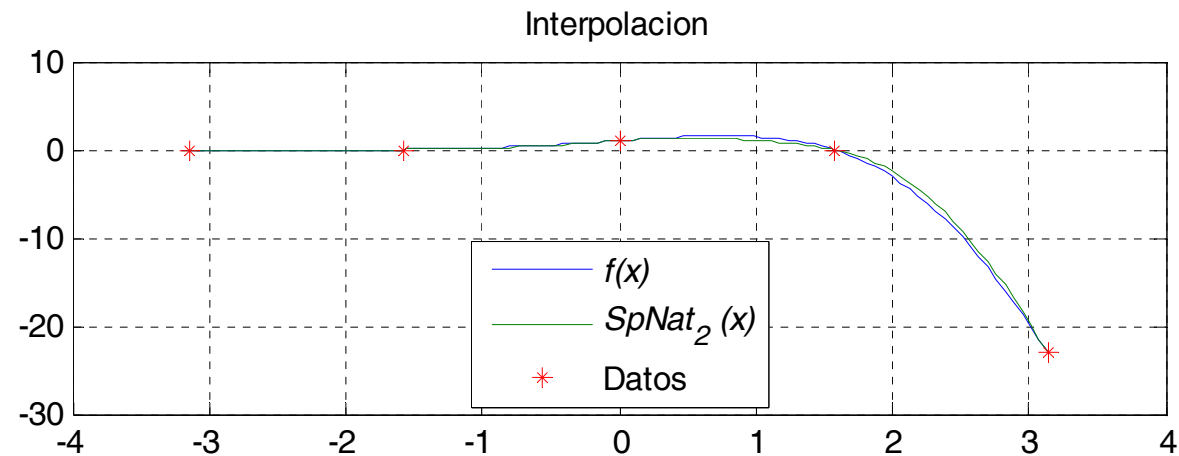
- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía





Interpolación Segmentaria Cuadrática: Ejem. (III)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía

- *NOTA: en el caso cuadrático no es necesario llegar a plantear el sistema total, ya que se puede resolver iterativamente para cada intervalo.*
- Primer intervalo

$$P_1(x) = a_1(x + \pi)^2 + b_1(x + \pi) + c_1 \begin{cases} a_1 = 0 \\ P_1(-\pi) = -0.0432 \rightarrow c_1 = -0.0432 \\ P_1(-\pi/2) = 0 \rightarrow b_1 = -0.0275 \end{cases}$$

$$P_1'(x) = 2a_1(x + \pi) + b_1$$
- Segundo intervalo

$$P_2(x) = a_2(x + \pi/2)^2 + b_2(x + \pi/2) + c_2 \begin{cases} P_2'(-\pi/2) = P_1'(-\pi/2) \rightarrow b_2 = 0.0275 \\ P_2(-\pi/2) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \\ P_2(0) = 1 \rightarrow a_2 = 0.3878 \end{cases}$$

$$P_2'(x) = 2a_2(x + \pi/2) + b_2$$
- Tercer intervalo

$$P_3(x) = a_3(x + 0)^2 + b_3(x + 0) + c_3 \begin{cases} P_3'(0) = P_2'(0) \rightarrow b_3 = 1.2457 \\ P_3(0) = 1 \rightarrow c_3 = 1 \\ P_3(\pi/2) = 0 \rightarrow a_3 = -1.1983 \end{cases}$$

$$P_3'(x) = 2a_3(x + 0) + b_3$$
- Cuarto intervalo

$$P_4(x) = a_4(x - \pi/2)^2 + b_4(x - \pi/2) + c_4 \begin{cases} P_4'(\pi/2) = P_3'(\pi/2) \rightarrow b_4 = -2.5190 \\ P_4(\pi/2) = 0 \rightarrow c_4 = 0 \\ P_4(\pi) = -23.1407 \rightarrow a_4 = -7.7749 \end{cases}$$

$$P_4'(x) = 2a_4(x - \pi/2) + b_4$$



Interpolación Segmentaria Cuadrática: Ejem. (IV)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía

● 9 puntos

x	F(x)
$-\pi$	-0.0432
$-3\pi/4$	-0.0670
$-\pi/2$	0
$-\pi/4$	0.3224
0	1
$\pi/4$	1.5509
$\pi/2$	0
$3\pi/4$	-7.4605
π	-23.1407

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -0.0303 \\ 0.0853 \\ 0.4105 \\ 0.8628 \\ 0.7014 \\ -1.9746 \\ -9.4990 \\ -19.9647 \end{pmatrix}$$

Intervalo	Polinomio
$[-\pi, -3\pi/4]$	$0(x+\pi)^2 - 0.0303(x+\pi) - 0.0432$
$[-3\pi/4, -\pi/2]$	$0.1472(x+3\pi/4)^2 - 0.0303(x+3\pi/4) - 0.0670$
$[-\pi/2, -\pi/4]$	$0.2668(x+\pi/2)^2 + 0.2010(x+\pi/2) + 0$
$[-\pi/4, 0]$	$0.3091(x+\pi/4)^2 + 0.6200(x+\pi/4) + 0.3224$
$[0, \pi/4]$	$-0.5145(x-0)^2 + 1.1055(x-0) + 1.0000$
$[\pi/4, \pi/2]$	$-2.8927(x+\pi/4)^2 + 0.2973(x+\pi/4) + 1.5509$
$[\pi/2, 3\pi/4]$	$-6.6875(x+\pi/2)^2 - 4.2466(x+\pi/2) + 0$
$[\pi/2, \pi]$	$-6.6378(x-\pi/2)^2 - 14.7514(x-\pi/2) - 7.4605$



Interpolación Segmentaria Cuadrática: Ejem. (V)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

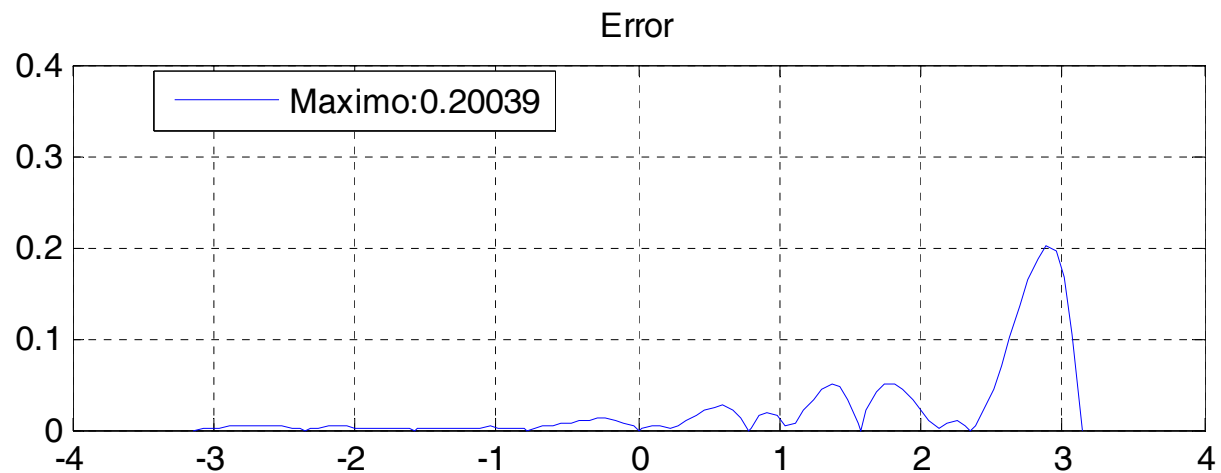
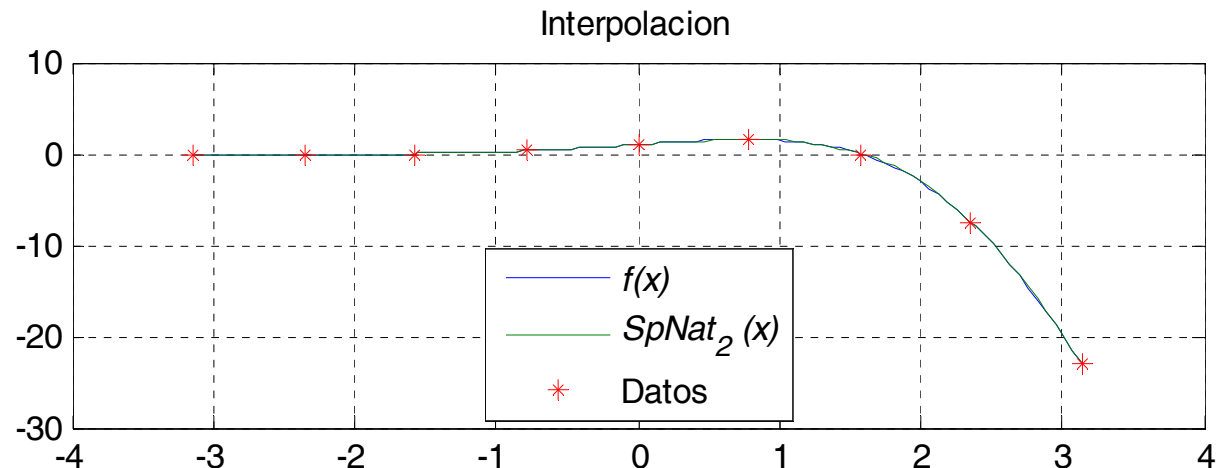
- Lineal

- Cuadrática

- Cúbica (Splines)

Int. Multidimensional

Bibliografía





Splines cúbicos: Definición

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

- Lineal

- Cuadrática

- *Splines (cúbicas)*

Int. Multidimensional

Bibliografía

- Definición
 - Los polinomios en cada uno de los n intervalos de la partición son cubicos (cuatro coeficientes cada polinomio).
- Condiciones ($4n-2$)
 - La spline coincide con la función en $(n+1)$ puntos
 - La función es continua en $(n-1)$ puntos internos
 - La derivada es continua en $(n-1)$ puntos internos
 - La derivada segunda es continua en $(n-1)$ puntos internos
- Incógnitas ($4n$)
 - n intervalos con polinomios cúbicos en cada uno
- Sistema indeterminado (hay $4n$ incógnitas y $4n-2$ ecuaciones)



Splines cúbicos: Planteamiento (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

- Lineal

- Cuadrática

- Splines (cúbicas)

Int. Multidimensional

Bibliografía

- Definición

$$P_k(x) = a_k(x - x_{k-1})^3 + b_k(x - x_{k-1})^2 + c_k(x - x_{k-1}) + d_k$$

$$\text{con } x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$$

- Condiciones

$$P_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1}) \wedge P_k(x_k) = f(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$P'_k(x_k) = P'_{k+1}(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

$$P''_k(x_k) = P''_{k+1}(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

- Sustituyendo las condiciones, se obtiene

$$a_k = \frac{b_{k+1} - b_k}{3(x_k - x_{k-1})} = \frac{b_{k+1} - b_k}{3h_k} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$c_k = f[x_k, x_{k-1}] - \frac{b_{k+1} + 2b_k}{3} h_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$d_k = f(x_{k-1}) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$3(f[x_{k+1}, x_k] - f[x_k, x_{k-1}]) = b_k h_k + 2b_{k+1}(h_k + h_{k+1}) + b_{k+2} h_{k+1} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

[Demo](#)



Splines cúbicos: Planteamiento (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

- Lineal

- Cuadrática

- Splines (cúbicas)

Int. Multidimensional

Bibliografía

• Sistema

$$\begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) & h_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \begin{pmatrix} f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2] \\ \vdots \\ f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}] \end{pmatrix}$$

- Se necesitan 2 condiciones más para que el sistema sea compatible determinado



Splines cúbicos: Planteamiento (III)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

- Lineal

- Cuadrática

- Splines (cúbicas)

Int. Multidimensional

Bibliografía

- Condiciones
 - Spline Sujeta (pendiente conocida en los extremos)
 - Spline Natural ($S''(a)=S''(b)=0$)
 - Aproximación parabólica en los extremos
 $S''(x_0) = S''(x_1); S''(x_{n-1}) = S''(x_n)$
 - Aproximación cúbica en los extremos
 - Comportamiento periódico
 - ...

$$\begin{pmatrix} 2h_1 & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-1} + h_n) & h_n \\ 0 & 0 & \cdots & h_n & 2h_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} f[x_0, x_1] - A \\ f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ \vdots \\ f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ B - f[x_{n-1}, x_n] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ f[x_2, x_3] - f[x_1, x_0] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}] - f[x_{n-3}, x_{n-2}] \\ f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}] \end{pmatrix}$$



Spline Cúbicos: Procedimiento y Cota de error

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

- Lineal

- Cuadrática

- Splines (cúbicas)

Int. Multidimensional

Bibliografía

● Procedimiento

- Datos de partida $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$ (derivadas en los extremos cuando se desea una spline sujeta)
- Selección de las 2 condiciones a añadir
- Planteamiento y resolución del sistema
- Recuperación de los coeficientes de los polinomios para cada intervalo
- Selección del intervalo al que pertenece el punto a interpolar y uso del polinomio correspondiente

● Acotación del error

- Spline sujeta

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)| \leq c_k M h^{4-k}, k = 0, 1, 2$$

$$\text{con } M = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(4)}(x)|, c_0 = \frac{5}{384}, c_1 = \frac{1}{24}, c_2 = \frac{3}{8}$$

- Spline natural

$$\max_{x_1 \leq x \leq x_{n-1}} |f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)| \leq \tilde{c}_k M h^{4-k}, k = 0, 1, 2$$

$$\max_{x \in [x_0, x_1] \cup [x_{n-1}, x_n]} |f(x) - S(x)| \leq \tilde{c} M h^2$$



Spline Cúbico Sujeto: Ejemplo (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

- Lineal

- Cuadrática

- Splines (cúbicas)

Int. Multidimensional

Bibliografía

- Aproximar la función $f(x)=\cos(x)*\exp(x)$ definida en $[-\pi, \pi]$ mediante una spline cúbica sujeta utilizando 5 y 9 puntos equiespaciados.
- Spline Sujeta con 5 puntos

x	F(x),F'(x)
$-\pi$	-0.0432
$-\pi$	-0.0432
$-\pi/2$	0
0	1
$\pi/2$	0
π	-23.1407
π	-23.1407

$$\begin{pmatrix} \pi & \pi/2 \\ \pi/2 & 2\pi & \pi/2 \\ & \pi/2 & 2\pi & \pi/2 \\ & & \pi/2 & 2\pi & \pi/2 \\ & & & \pi/2 & 2\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0.0275 + 0.0432 \\ 0.6366 - 0.0432 \\ -0.6366 - 0.6366 \\ -14.7318 + 0.6366 \\ -23.1407 + 14.7318 \end{pmatrix}$$

Intervalo	Polinomio
$[-\pi, -\pi/2]$	$0.0150(x+\pi)^3 - 0.0215(x+\pi)^2 - 0.0432(x+\pi) - 0.0432$
$[-\pi/2, 0]$	$0.1446(x+\pi/2)^3 + 0.0920(x+\pi/2)^2 + 0.1352(x+\pi/2) + 0$
$[0, \pi/2]$	$-1.3564x^3 + 0.7736x^2 + 1.4949x + 1.0000$
$[\pi/2, \pi]$	$0.0843(x-\pi/2)^3 - 5.6182(x-\pi/2)^2 - 6.1149(x-\pi/2) + 0$

- Error $\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f(x) - S(x)| \leq \frac{5}{384} Mh^4$
 $\leq \frac{5}{384} 4e^\pi \left(\frac{2\pi}{4}\right)^4 \approx 7.3376$



Spline Cúbico Sujeto: Ejemplo (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

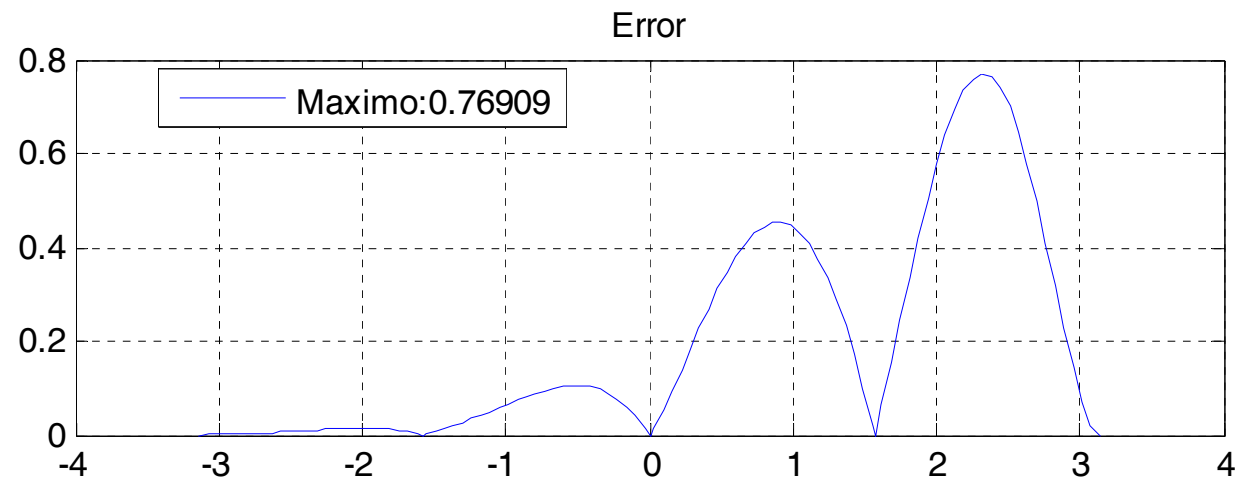
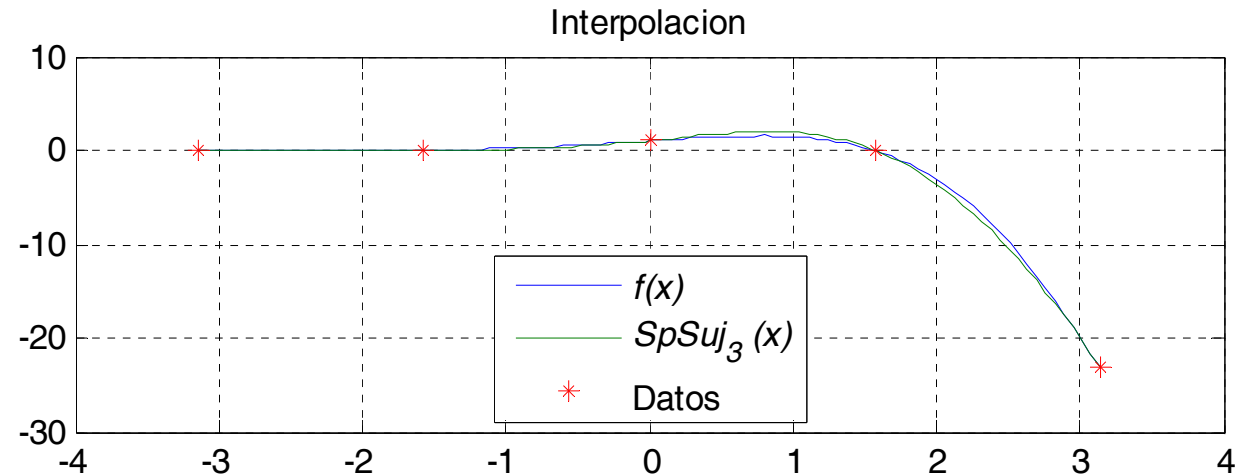
- Lineal

- Cuadrática

- Splines (cúbicas)

Int. Multidimensional

Bibliografía





Spline Cúbico Sujeto: Ejemplo (III)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

- Lineal

- Cuadrática

- Splines (cúbicas)

Int. Multidimensional

Bibliografía

• Spline Sujeta con 9 puntos

x	F(x), F'(x)	Intervalo	Polinomio
$-\pi$	-0.0432	$[-\pi, -3\pi/4]$	$0.0277(x+\pi)^3 - 0.0054(x+\pi)^2 - 0.0432(x+\pi) - 0.0432$
$-\pi$	-0.0432	$[-3\pi/4, -\pi/2]$	$0.0624(x+3\pi/4)^3 + 0.0600(x+3\pi/4)^2 - 0.0003(x+3\pi/4) - 0.0670$
$-3\pi/4$	-0.0670	$[-\pi/2, -\pi/4]$	$0.0622(x+\pi/2)^3 + 0.2071(x+\pi/2)^2 + 0.2095(x+\pi/2) + 0$
$-\pi/2$	0	$[-\pi/4, 0]$	$-0.1052(x+\pi/4)^3 + 0.3536(x+\pi/4)^2 + 0.6499(x+\pi/4) + 0.3224$
$-\pi/4$	0.3224	$[0, \pi/4]$	$-0.6363(x-0)^3 + 0.1058(x-0)^2 + 1.0108(x-0) + 1.0000$
0	1	$[\pi/4, \pi/2]$	$-1.4265(x+\pi/4)^3 - 1.3933(x+\pi/4)^2 - 0.0004(x+\pi/4) + 1.5509$
$\pi/4$	1.5509	$[\pi/2, 3\pi/4]$	$-1.5177(x+\pi/2)^3 - 4.7543(x+\pi/2)^2 - 4.8288(x+\pi/2) + 0$
$\pi/2$	0	$[\pi/2, \pi]$	$2.7288(x-\pi/2)^3 - 8.3302(x-\pi/2)^2 - 15.1054(x-\pi/2) - 7.4605$
$3\pi/4$	-7.4605		
π	-23.1407		
π	-23.1407		

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f(x) - S(x)| \leq \frac{5}{384} Mh^4$$

$$\leq \frac{5}{384} 4e^\pi \left(\frac{2\pi}{8}\right)^4 \approx 0.4586$$



Spline Cúbico Sujeto: Ejemplo (IV)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

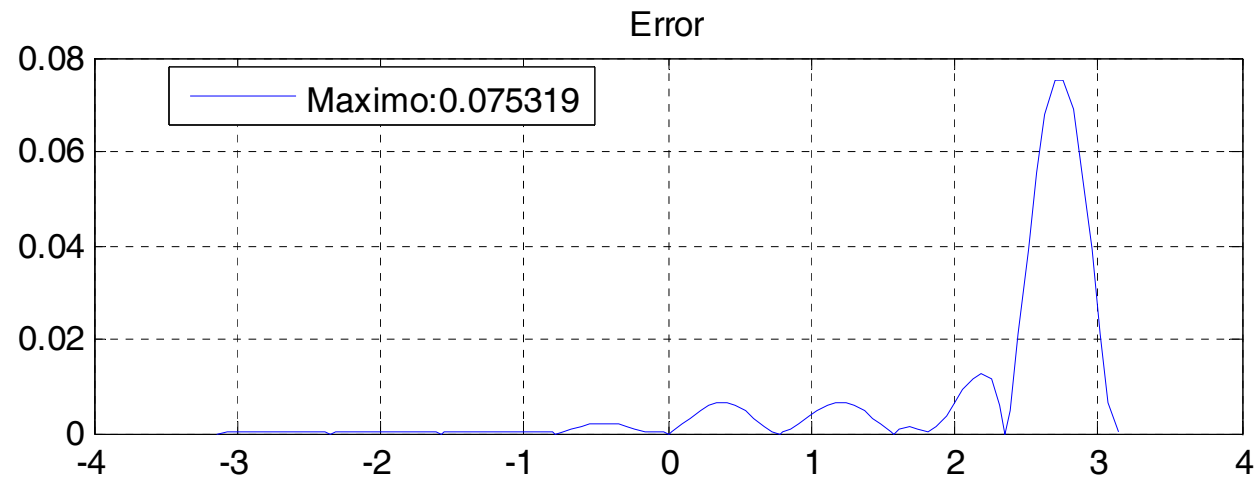
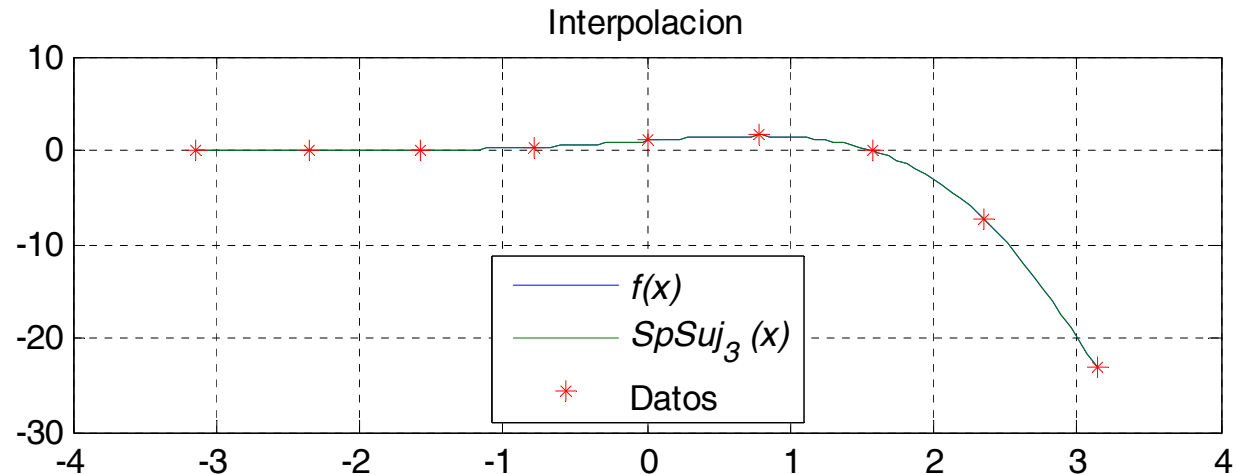
- Lineal

- Cuadrática

- Splines (cúbicas)

Int. Multidimensional

Bibliografía





Spline Cúbico Natural: Ejemplo (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

- Lineal

- Cuadrática

- Splines (cúbicas)

Int. Multidimensional

Bibliografía

- Aproximar la función $f(x)=\cos(x)*\exp(x)$ definida en $[-\pi, \pi]$ mediante una spline cúbica natural utilizando 5 y 9 puntos equiespaciados.
- Spline Natural con 5 puntos

x	F[.]
$-\pi$	-0.0432
$-\pi/2$	0
0	1
$\pi/2$	0
π	-23.1407

Intervalo	Polinomio
$[-\pi, -\pi/2]$	$0.0576(x+\pi)^3-0.0775(x+\pi)^2+0.0071(x+\pi)-0.0432$
$[-\pi/2, 0]$	$0.0576(x+\pi/2)^3+0.1939(x+\pi/2)^2+0.1900(x+\pi/2)+0$
$[0, \pi/2]$	$-1.0508x^3+0.4653x^2+1.2254x+1.0000$
$[\pi/2, \pi]$	$-1.0508(x-\pi/2)^3-4.4866(x-\pi/2)^2-5.0914(x-\pi/2)+0$



Spline Cúbico Natural: Ejemplo (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

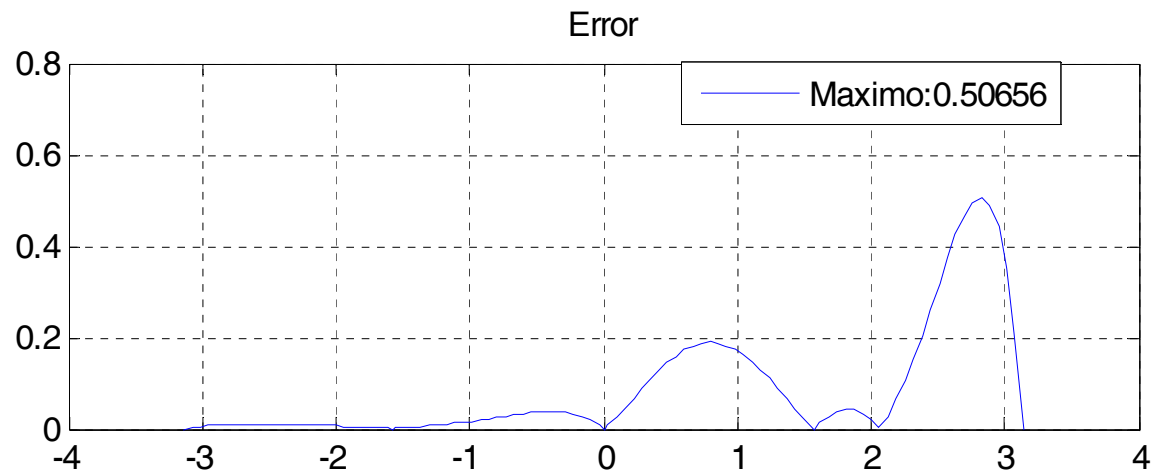
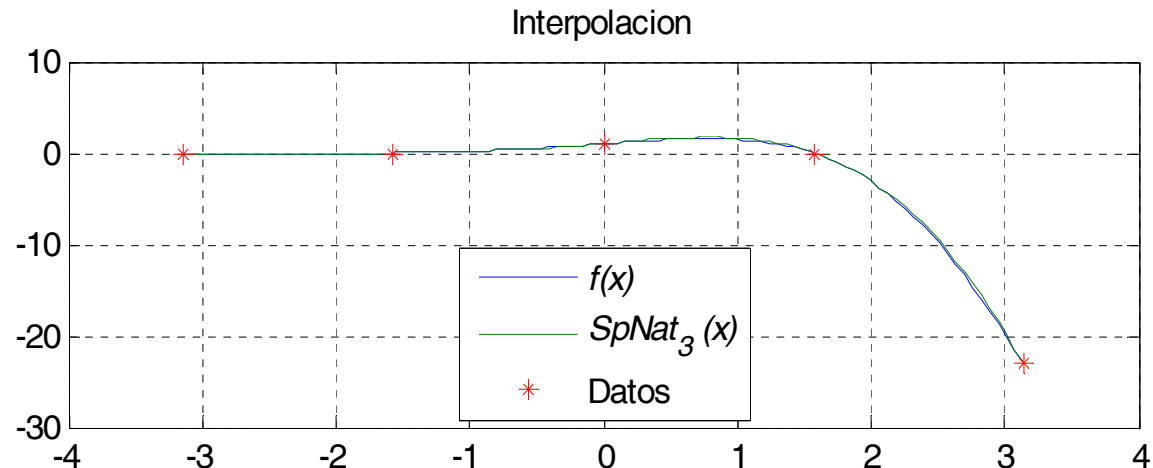
- Lineal

- Cuadrática

- Splines (cúbicas)

Int. Multidimensional

Bibliografía





Spline Cúbico Natural: Ejemplo (III)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

- Lineal

- Cuadrática

- Splines (cúbicas)

Int. Multidimensional

Resumen

Bibliografía

• Spline Natural con 9 puntos

x	F[.]	Intervalo	Polinomio
$-\pi$	-0.0432	$[-\pi, -3\pi/4]$	$0.0542(x+\pi)^3 - 0.0541(x+\pi)^2 - 0.0213(x+\pi) - 0.0432$
$-3\pi/4$	-0.0670	$[-3\pi/4, -\pi/2]$	$0.0542(x+3\pi/4)^3 - 0.0736(x+3\pi/4)^2 - 0.0059(x+3\pi/4) - 0.0670$
$-\pi/2$	0	$[-\pi/2, -\pi/4]$	$0.0687(x+\pi/2)^3 + 0.2013(x+\pi/2)^2 + 0.2100(x+\pi/2) + 0$
$-\pi/4$	0.3224	$[-\pi/4, 0]$	$-0.1229(x+\pi/4)^3 + 0.3632(x+\pi/4)^2 + 0.6533(x+\pi/4) + 0.3224$
0	1	$[0, \pi/4]$	$-0.5717(x-0)^3 + 0.0735(x-0)^2 + 0.9963(x-0) + 1.0000$
$\pi/4$	1.5509	$[\pi/4, \pi/2]$	$-1.6669(x+\pi/4)^3 - 1.2735(x+\pi/4)^2 + 0.0538(x+\pi/4) + 1.5509$
$\pi/2$	0	$[\pi/2, 3\pi/4]$	$-0.6203(x+\pi/2)^3 - 5.2012(x+\pi/2)^2 - 5.0314(x+\pi/2) + 0$
$3\pi/4$	-7.4605	$[\pi/2, \pi]$	$-0.6203(x-\pi/2)^3 - 6.6627(x-\pi/2)^2 - 14.3492(x-\pi/2) - 7.4605$
π	-23.1407		



Spline Cúbico Natural: Ejemplo (IV)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

- Lineal

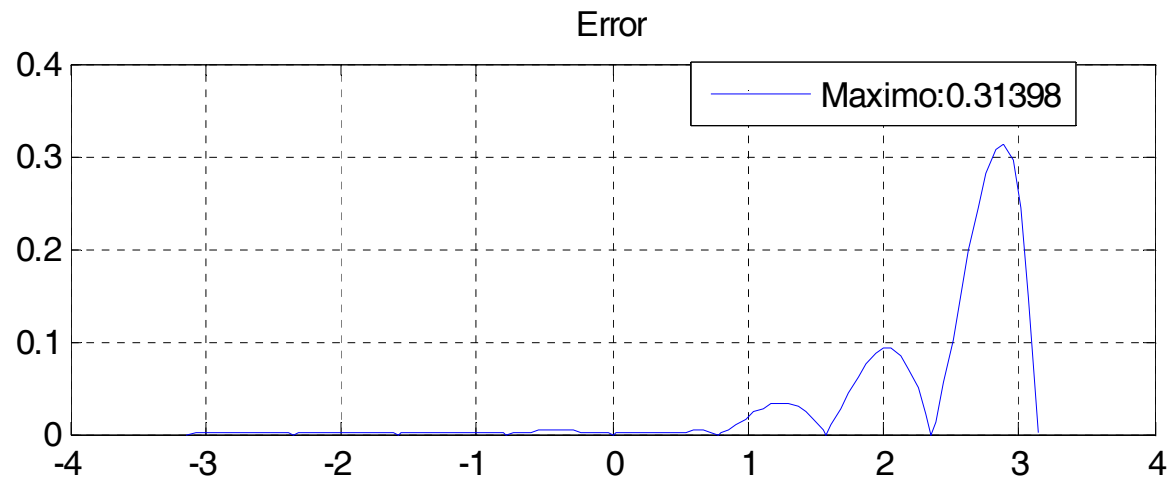
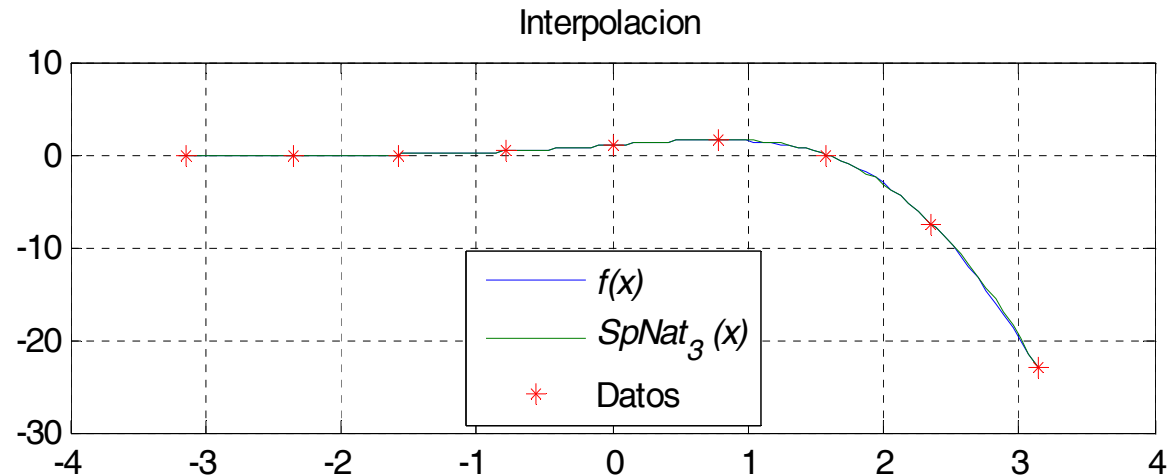
- Cuadrática

- Splines (cúbicas)

Int. Multidimensional

Resumen

Bibliografía





Resumen

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

- Lineal

- Splines (cúbicas)

Int. Multidimensional

Resumen

Bibliografía

- El problema de Lagrange tiene un único polinomio de interpolación de grado mínimo que se puede obtener mediante
 - Planteamiento directo del sistema lineal
 - Usando los polinomios de Lagrange
 - Usando diferencias divididas de Newton
- Los polinomios de Lagrange permiten sólo dependen de los puntos del soporte y son independientes de la función pero pueden ser más complejos que la función de partida
- Las diferencias divididas de Newton dependen tanto de los puntos como de la función y permiten añadir o eliminar puntos del soporte aprovechando los cálculos realizados
- La fórmula de error del polinomio de interpolación es independiente de la forma en que se de éste y no siempre el error disminuye con el aumento del número de puntos del soporte
- Los polinomios de interpolación de grado elevado tienden a tener oscilaciones muy fuertes, lo que limita su aplicabilidad
- La interpolación segmentaria permite disminuir el error con el aumento del número de puntos a consta de calcular interpolantes simples en cada subintervalo
- Los mejores resultados se suelen obtener con los splines cúbicos sujetos, si bien se utilizan las naturales porque los sujetos exigen conocer el valor de la derivada en los extremos



Resumen (Ejemplo)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Int. Polinomial

Int. Segmentaria

- Definición

- Lineal

- Splines (cúbicas)

Int. Multidimensional

Resumen

Bibliografía

Tipo	Puntos	Cota	Error
<i>Lineal</i>	14	0.5	0.4234
<i>Cuadrática</i>	13	0.5	0.1393
<i>Polinomial</i>	5	26.7073	0.9028
	9	0.5719	0.0160
<i>Poligonal</i>	5	14.2743	4.1046
	9	3.5886	1.0023
<i>I.S.Cuadrática</i>	5		0.7094
	9		0.2004
<i>Sp. Sujeta</i>	5	7.3376	0.76909
	9	0.4586	0.075319
<i>Sp. Natural</i>	5		0.50656
	9		0.31398



Anexos

- Demostraciones y desarrollos



Unicidad o no del polinomio de interpolación

Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

Demostraciones

Sean $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ polinomios de grado menor o igual que n y que interpolan a $f(x)$ en el soporte $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Su diferencia será otro polinomio, a lo sumo de grado n .

$$R_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$$

su valor en los puntos de interpolación viene dado por

$$R_n(x_k) = P_n(x_k) - Q_n(x_k) = f(x_k) - f(x_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

de donde se puede escribir como

$$R_n(x) = \alpha(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

que es un polinomio de grado $n+1$, salvo que $\alpha=0$, en cuyo caso

$$R_n(x) = 0 \Rightarrow P_n(x) = Q_n(x)$$

●Nota: Existen infinitos polinomios de grado mayor. Para ello es suficiente añadir cualquier otro punto, obteniéndole un polinomio de grado superior que interpola los datos iniciales

[Volver](#)



Cálculo de los polinomios de Lagrange

Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

Demostraciones

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k^n(x) : L_k^n(x_i) = \delta_i^k \rightarrow \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

- Encontrar con las siguientes condiciones

- Polinomio de grado n (hay $n+1$ condiciones y $n+1$ coeficientes)
- Se anula en todos los puntos salvo en x_k : (el resto del soporte son raíces del polinomio)

$$L_k^n(x) = \alpha (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n) = \alpha \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i)$$

- Vale uno en el punto x_k

$$L_k^n(x_k) = 1 = \alpha (x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{x_k - x_i}$$

- Por tanto

$$L_k^n(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

[Volver](#)

 **Descripción** **Objetivos** **Temario** **Bibliografía** **Demostraciones**

Propiedades de los polinomios de Lagrange

- $\sum_{i=0}^n L_i^n(x) = 1$

- La suma es el polinomio de interpolación que vale 1 en todos los puntos; dicho polinomio es único, luego

$$\sum_{i=0}^n L_i^n(x) = P_n(x) = 1$$

- $\frac{d}{dx} L_i^n(x) = \frac{d}{dx} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \left(\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} \right) \sum_{j=0}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i, j}}^n (x - x_k)$

[Volver](#)



Simetría de las D.Divididas

Unicidad del polinomio de interpolación

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \sum_{i=0}^n \alpha_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

Coeficiente de grado n (x^n)

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} = \alpha_n = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n]$$

Nota sobre $P(x) = \alpha(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$

Coeficientes

x^{n+1}	$\left[C_{n+1}^0 \right]$	α
x^n	$\left[C_{n+1}^1 \right]$	$(-1)^1 \alpha (x_0 + x_1 \cdots + x_{n-1} + x_n)$
x^{n-1}	$\left[C_{n+1}^2 \right]$	$(-1)^2 \alpha (x_0 x_1 + \cdots x_0 x_n + x_1 x_2 + \cdots x_1 x_n + \cdots x_{n-1} x_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x^1	$\left[C_{n+1}^n \right]$	$(-1)^n \alpha (x_1 \cdots x_{n-1} x_n + x_0 x_2 \cdots x_{n-1} x_n \cdots + x_0 x_1 \cdots x_{n-2} x_n + x_0 x_1 \cdots x_{n-1})$
x^0	$\left[C_{n+1}^{n+1} \right]$	$(-1)^{n+1} \alpha (x_0 x_1 \cdots x_{n-1} x_n)$

[Volver](#)

[Descripción](#)

[Objetivos](#)

[Temario](#)

[Bibliografía](#)

[Demostraciones](#)



Cálculo de las D.Divididas

Unicidad del polinomio de interpolación-Coeficiente de grado n (x^n)

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} = \alpha_n = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n] = f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0]$$

Soporte: $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\} \rightarrow$

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}](x - x_0) \cdots (x - x_{n-2}) + f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

Soporte: $\{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0\} \rightarrow$

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots \\ + f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1](x - x_n) \cdots (x - x_2) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0](x - x_n) \cdots (x - x_1)$$

Iguando coeficiente de grado $n-1$ (x^{n-1})

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n](-x_0 - x_1 - x_2 \cdots - x_{n-1}) + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] = \\ f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0](-x_1 - x_2 \cdots - x_{n-1} - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1] \\ f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n](-(x_0 + x_1 + x_2 \cdots + x_{n-1}) + (x_1 + x_2 \cdots + x_{n-1} + x_n)) = \\ f[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$$

[Volver](#)

Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

Demostraciones



Error en la interpolación de Lagrange

Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

Demostraciones

Dado $x \in I$ y $P_n(x)$ polinomio de interpolación de $f(x)$ en $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ se define

$$g(t) = (f(t) - P_n(t)) - (f(x) - P_n(x)) \prod_{k=0}^n \frac{t - x_k}{x - x_k}$$

En los puntos de interpolación

$$g(x_k) = (f(x_k) - P_n(x_k)) - (f(x) - P_n(x)) \prod_{k=0}^n \frac{x_k - x_k}{x - x_k} = 0$$

En el punto genérico x

$$g(x) = (f(x) - P_n(x)) - (f(x) - P_n(x)) \prod_{k=0}^n \frac{x - x_k}{x - x_k} = 0$$

$g(t)$ se anula en $n+2$ puntos. Aplicando el TVM generalizado

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(\xi) = 0 &= \frac{d^{(n+1)}}{dt^{(n+1)}} \left[(f(t) - P_n(t)) - (f(x) - P_n(x)) \prod_{k=0}^n \frac{t - x_k}{x - x_k} \right]_{t=\xi} = \\ &= f^{(n+1)}(\xi) - (f(x) - P_n(x)) (n+1)! \prod_{k=0}^n \frac{1}{x - x_k} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$



Diferencias divididas

 **Descripción**

 **Objetivos**

 **Temario**

 **Bibliografía**

 **Demostraciones**

Dado $x \in I$ y $P_n(x)$ polinomio de interpolación de $f(x)$ en $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ se define

$$R(x) = f(x) - P_n(x)$$

En los puntos de interpolación

$$R(x_k) = f(x_k) - P_n(x_k) = 0$$

$R(x)$ se anula en $n+1$ puntos. Aplicando el TVM generalizado

$$R^{(n)}(\xi) = 0 = \frac{d^{(n)}}{dt^n} [f(x) - P_n(x)]_{x=\xi} = f^{(n)}(\xi) - n! f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n]$$

[Volver](#)



Interpolación segmentaria cuadrática

Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

Demostraciones

$$P_k(x) = a_k(x - x_{k-1})^2 + b_k(x - x_{k-1}) + c_k : x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$$

$$P'_k(x) = 2a_k(x - x_{k-1}) + b_k$$

$$\dagger P'_k(x_k) = P'_{k+1}(x_k) : k = 1, \dots, n-1 \rightarrow 2a_k(x_k - x_{k-1}) + b_k = b_{k+1} \rightarrow$$

$$\rightarrow a_k = \frac{b_{k+1} - b_k}{2(x_k - x_{k-1})} = \frac{b_{k+1} - b_k}{2h_k}$$

$$\dagger P_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1}) : k = 0, \dots, n-1 \rightarrow c_k = f(x_{k-1})$$

$$\dagger P_k(x_k) = f(x_k) : k = 0, \dots, n-1 \rightarrow a_k(h_k)^2 + b_k(h_k) + c_k = f(x_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b_{k+1} - b_k}{2h_k}(h_k)^2 + b_k(h_k) = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

$$\Rightarrow b_k + b_{k+1} = 2f[x_{k-1}, x_k]$$

[Volver](#)



Interpolación segmentaria cúbica

Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

Demostraciones

$$P_k(x) = a_k(x - x_{k-1})^3 + b_k(x - x_{k-1})^2 + c_k(x - x_{k-1}) + d_k : x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$$

$$P'_k(x) = 3a_k(x - x_{k-1})^2 + 2b_k(x - x_{k-1}) + c_k$$

$$P''_k(x) = 6a_k(x - x_{k-1}) + 2b_k$$

$$\dagger P''_k(x_k) = P''_{k+1}(x_k) : k = 1, \dots, n-1 \rightarrow 6a_k(x_k - x_{k-1}) + 2b_k = 2b_{k+1} \rightarrow$$

$$\rightarrow a_k = \frac{b_{k+1} - b_k}{3(x_k - x_{k-1})} = \frac{b_{k+1} - b_k}{3h_k}$$

$$\dagger P_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1}) : k = 1, \dots, n \rightarrow d_k = f(x_{k-1})$$

$$\dagger P_k(x_k) = f(x_k) : k = 1, \dots, n \rightarrow a_k(h_k)^3 + b_k(h_k)^2 + c_k h_k + d_k = f(x_k) \rightarrow$$

$$\rightarrow c_k = \frac{f(x_k) - d_k}{h_k} - a_k(h_k)^2 - b_k h_k = f[x_{k-1}, x_k] - \frac{b_{k+1} + 2b_k}{3} h_k$$

$$\dagger P'_k(x_k) = P'_{k+1}(x_k) : k = 1, \dots, n-1 \rightarrow 3a_k(h_k)^2 + 2b_k h_k + c_k = c_{k+1} \rightarrow$$

$$3 \frac{b_{k+1} - b_k}{3h_k} (h_k)^2 + 2b_k h_k + f[x_{k-1}, x_k] - \frac{b_{k+1} + 2b_k}{3} h_k = f[x_k, x_{k+1}] - \frac{b_{k+2} + 2b_{k+1}}{3} h_{k+1}$$

$$h_k \cdot b_k + 2(h_k + h_{k+1})b_{k+1} + h_{k+1} \cdot b_{k+2} = 3(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]) : k = 1, \dots, n$$

[Volver](#)