Manuel José Fernández, mjfg@uniovi.es

METODOS NUMERICOS
E.U.I.T. INFORMATICA DE OVIEDO. 05-06
3. AJUSTE DE DATOS

1) Obtener los valores de "a" y "b" de tal manera que F(x) = a(x-1) – 2b sea la recta de ajuste mínimo-cuadrática a los puntos $\{(0,10),(1,13),(2,18),(3,20),(4,24)\}$.

Solución:

$$F(x) = a(x-1) - 2b = ax - a - 2b = c_1 + c_2 x \quad / \quad c_1 = -a - 2b, \quad c_2 = a$$

Sabemos que c_1 y c_2 son la solución del siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i \end{pmatrix}$$

Resulta:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 \\ 205 \end{pmatrix} \quad , \quad c_2 = 3.5 \qquad c_1 = 10$$

Por tanto: a = 3.5 , b = - 6.75

2) Obtener la parábola de ajuste mínimo-cuadrática que aproxima a la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en los puntos de abscisa -1,0,8.

Solución:

La parábola es $F(x) = a + bx + cx^2$, donde a, b y c son la solución del siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i . y_i \\ \sum x_i^2 . y_i \end{pmatrix} ,$$

$$y_1 = f(-1) = -1, \qquad y_2 = f(0) = 0, \qquad y_3 = f(8) = 2$$

Resulta:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 65 \\ 7 & 65 & 511 \\ 65 & 511 & 4097 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ 127 \end{pmatrix}$$

Como su resolución se complica "un poco", podríamos utilizar (en este caso) un método alternativo.

Sabemos que por estos tres puntos pasa un parábola (es el polinomio de interpolación) :

$$F(x) = a + bx + cx^2$$

Por tanto: $\sum_{i=1}^{3}\left(y_i - F(x_i)\right)^2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 = 0$

que es el valor mínimo que puede alcanzar una suma de cuadrados. Así pues, para tales puntos, la parábola de ajuste mínimo-cuadrático coincide con el polinomio de interpolación.

Mediante la tabla de diferencias divididas se obtiene:

-1	-1		
		1	
0	0		- 1/12
		1/4	
8	2		

En consecuencia:

$$F(x) = -1 + x + 1 - \frac{1}{12}(x+1)x = \frac{11}{12}x - \frac{1}{12}x^2$$

3) Se consideran los puntos $\{(-2,-3),(-1,-6),(0,-5),(1,1),(2,13)\}$

a) Demostrar, sin plantear ningún sistema lineal, que el polinomio de ajuste mínimo-cuadrático de grado tres a los puntos dados pasa por todos ellos.

b) Determinar la parábola de ajuste mínimo-cuadrática . ¿ Pasa la parábola por alguno de los puntos?.

c) Determinar la recta de ajuste mínimo-cuadrática . ¿ Pasa la recta por alguno de los puntos?.

Solución:

a) A partir de la tabla de diferencias divididas vamos a calcular el grado del polinomio de interpolación

-2	-3				
		-3			
-1	-6		2		
		1		1/6	
0	–5		5/2		0
		6		1/6	
1	1		3		
		12			
2	13				

Así pues, el grado del polinomio de interpolación es tres:

$$P(x) = -3 - 3(x+2) + 2(x+2)(x+1) + \frac{1}{6}(x+2)(x+1)x$$

Al pasar $P(x)$ por todos los puntos, es evidente que $P(x)$ es el polinomio de ajuste mínimo-cuadrático de grado tres, ya que: $\sum_{i=1}^{5}\left(y_i - P(x_i)\right)^2 = 0^2 + \ldots + 0^2 = 0$

b) La parábola es $F(x) = a + bx + cx^2$, donde a , b y c son la solución del sistema :

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i . y_i \\ \sum x_i^2 . y_i \end{pmatrix}$$

Resulta:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 39 \\ 35 \end{pmatrix} \quad , \quad b = 3.9 \qquad c = 2.5 \qquad a = -5$$

$F(x) = -5 + 3.9x + 2.5x^2$ que pasa por el punto (0, -5)

c) La recta es $F(x) = a + bx$, donde a y b son la solución del siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i \end{pmatrix}$$

Resulta:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 39 \end{pmatrix} \quad , \quad a = 0 \qquad b = 3.9$$

$F(x) = 3.9x$ no pasa por ninguno de los punto

4)

a) Plantear y resolver el problema de ajuste mínimo-cuadrático de una colección de puntos del plano $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ mediante una función del tipo $F(x) = a + bx^2$.

b) Aplicar el apartado anterior para determinar la función $F(x) = a + bx^2$ de ajuste mínimo-cuadrático a la colección de puntos $\{(-1,1), (0,4), (1,5), (2,3), (3,0)\}$.

Solución:

a) Se trata de determinar los valores de a y b tales que si $F(x) = a + bx^2$ entonces:

$$d(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - F(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i^2\right)^2 \quad \text{sea mínimo.}$$

$d(a,b)$ alcanza un mínimo en el punto $(a^*, b^*) \Leftrightarrow \dfrac{\partial d}{\partial a}(a^*, b^*) = \dfrac{\partial d}{\partial b}(a^*, b^*) = 0.$

$$\frac{\partial d}{\partial a}(a^*,b^*) = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a^* - b^* x_i^{\,2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial d}{\partial b}(a^*,b^*) = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a^* - b^* x_i^{\,2}\right)x_i^{\,2} = 0$$

o equivalentemente:

$$-2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2na^* + 2b^*\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = 0$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^{\,2} + 2a^*\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + 2b^*\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,4} = 0$$

es decir,

$$na^* + b^*\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a^*\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b^*\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,4} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} y_i$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} y_i \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 99 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad a = \frac{113}{30} \qquad b = -\frac{7}{18}$$

$$F(x) = \frac{113}{30} - \frac{7}{18}x^2$$

5) Con el objeto de medir la aceleración g de la gravedad, se han recogido unos datos experimentales sobre el tiempo (en segundos) que tarda en llegar al suelo un cuerpo, según la altura (en metros) desde la que se le deja caer:

Tiempo	Altura
0.2	0.1960
0.4	0.7850
0.6	1.7665
0.8	3.1405
1	4.9075

Encontrar la función $h(t) = \frac{1}{2}g.t^2$ de ajuste mínimo-cuadrático a los datos anteriores y determinar así un valor aproximado de g en m/s^2.

Solución:

$$h(t)=\frac{1}{2}gt^2 = c.\phi(t) \qquad \text{siendo} \qquad c=\frac{1}{2}g \quad , \quad \phi(t)=t^2$$

Se trata de determinar el valor de c tal que $d(c)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-h(t_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i-c\phi(t_i)\right)^2$ sea mínimo. $d(c)$ alcanza un mínimo en el punto c^* $\Leftrightarrow$ $d´(c^*)=0$

$$d´(c^*)=-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-c^*\phi(t_i)\right)\phi(t_i)=0$$ o equivalentemente:

$$-2\sum_{i=1}^{n}y_i.\phi(t_i)+2c^*\sum_{i=1}^{n}\phi(t_i)\phi(t_i)=0$$, es decir,

$$c^*=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\phi(t_i)}{\sum_{i=1}^{n}\left[\phi(t_i)\right]^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}y_i.t_i^{\,2}}{\sum_{i=1}^{n}t_i^{\,4}} = \frac{(0.2)^2 0.1960+(0.4)^2 0.7850+\ldots}{(0.2)^4+(0.4)^4+(0.6)^4+(0.8)^4+1} = 4.9073$$

$$h(t)=4.9073.t^2 \qquad\qquad g=2c=9.8146$$

6) Se desea que una vía de comunicación que une las ciudades A = (0 , 0) y B = (5 , 0) pase "próxima a los pueblos C_1 = (4 , 1) y C_2 = (3 , 2). Por razones de índole técnica, el trazado de la vía debe coincidir con la gráfica de una función de la forma

$$F(x)=a+bx+cx^2, \quad (a,b,c\in R)$$

Con objeto de simplificar el proceso de cálculo, se decide que la mejor vía es aquella que minimiza el valor de S , donde $S=\left(1-F(4)\right)^2+\left(2-F(3)\right)^2$

Calcular a, b, c.

Solución:

Si pasa por (0,0) , $F(0)=0$ y si pasa por (5,0) , $F(5)=0$. Al ser $F(0)=a$ y $F(5)=a+5b+25c$ se obtiene que $a=0$ y $b=-5c$. Por tanto $F(x)=-5cx+cx^2$ y $S=\left(1-F(4)\right)^2+\left(2-F(3)\right)^2 = \left(1+20c-16c\right)^2+\left(2+15c-9c\right)^2 = \left(1+4c\right)^2+\left(2+6c\right)^2$

$$S´(c)=2(1+4c)4+2(2+6c)6=8(1+4c)+12(2+6c)=0 \Leftrightarrow 104c+32=0 \Leftrightarrow c=-\frac{4}{13}$$

$$b=-5c=\frac{20}{13} \qquad\qquad F(x)=\frac{20}{13}x-\frac{4}{13}x^2$$

7)

a) Plantear y resolver teóricamente el problema del ajuste mínimo-cuadrático a una colección de puntos del plano $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ mediante una función del tipo $F(x) = a.\phi(x)$ siendo ϕ una función conocida.

b) Se han tomado los tiempos (en segundos) de ejecución de un programa sobre x datos de entrada para diversos valores de x , obteniéndose la siguiente tabla:

$$\{(x = 10, t = 15), (20,51), (30,152), (40,300)\}$$

Determinar la función $t(x) = x^a$ de ajuste mínimo-cuadrático con linealización de los los datos y estimar el estimar el tiempo de ejecución para x = 25.

Solución:

a) Se trata de determinar el valor de "a" tal que

$$d(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - F(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a.\phi(x_i)\right)^2 \quad \text{sea mínimo.}$$

Condición necesaria (y suficiente en este caso) para que esta función de una variable alcance un mínimo en el punto $a*$ es que $d´(a*) = 0$.

$$d´(a*) = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a*.\phi(x_i))\phi(x_i) = 0 \iff -2\sum_{i=1}^{n} y_i.\phi(x_i) + 2a*\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\phi(x_i) = 0 \iff$$

$$\iff a* = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i.\phi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i).\phi(x_i)}$$

b) $t(x) = x^a$, $\log(t(x)) = a.\log(x) = a.\phi(x)$

Los puntos que inicialmente eran $[(x_i, t_i); i = 1,2,3,4]$ serían ahora $[(x_i, \log(t_i)); i = 1,2,3,4]$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{4} \log(t_i)\log(x_i)}{\sum_{i=1}^{4} \log(x_i)\log(x_i)} = \frac{56.1416}{39.4519} = 1.42304$$

x_i	t_i	$\log x_i$	$\log t_i$	$\log t_i . \log x_i$	$\log x_i . \log x_i$
10	15	2.30258	2.708	6.23547	5.30187
20	51	2.99573	3.931	11.7786	8.9744
30	152	3.40119	5.023	17.0871	11.5680
40	300	3.68887	5.703	21.0405	13.6077
				56.1416	39.4519

$$t(x) = x^{1.42304} \quad \Rightarrow t(25) = 25^{1.42304} = 97.5$$

8) Dados los puntos $\{(1,0.5),(2,1.7),(3,3.4),(4,5.7),(5,8.4)\}$ obtener la función $F(x)=a.x^b$ que aproxima tales puntos utilizando el método de ajuste mínimo-cuadrático con linealización.

Solución:

$$\log(F(x))=\log(a)+b.\log(x)=c_1+c_2.\log(x) \quad \text{siendo } c_1=\log(a) \text{ y } c_2=b$$

$\phi_1(x)=1$, $\phi_2(x)=\log(x)$ y los puntos serían $\{(x_i,\log(y_i))\}$ $i=1,\ldots,5$

c_1 y c_2 se obtienen como solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5}\phi_1(x_i).\phi_1(x_i) & \sum_{i=1}^{5}\phi_1(x_i).\phi_2(x_i) \\ \sum_{i=1}^{5}\phi_2(x_i)\phi_1(x_i) & \sum_{i=1}^{5}\phi_2(x_i)\phi_2(x_i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5}\log(y_i).\phi_1(x_i) \\ \sum_{i=1}^{5}\log(y_i).\phi_2(x_i) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & \sum_{i=1}^{5}\log(x_i) \\ \sum_{i=1}^{5}\log(x_i) & \sum_{i=1}^{5}(\log(x_i))^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5}\log(y_i) \\ \sum_{i=1}^{5}\log(y_i).\log(x_i) \end{pmatrix}$$

x_i	y_i	$\log x_i$	$(\log(x_i))^2$	$\log y_i$	$\log(x_i).\log(y_i)$
1	0.5	0	0	-0.6931	0
2	1.7	0.6931	0.4804	0.5306	0.3677
3	3.4	1.0986	1.2069	1.2238	1.3445
4	5.7	1.3863	1.9218	1.7405	2.4128
5	8.4	1.6094	2.5902	2.1282	3.4251
		4.7874	6.1993	4.93	7.5501

$$\begin{pmatrix} 5 & 4.7874 \\ 4.7874 & 6.1993 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4.93 \\ 7.5501 \end{pmatrix} \quad ; \quad c_1=-0.6912 \qquad c_2=1.7516$$

$$\log(a)=-0.6912 \Rightarrow a=e^{-0.6912}=0.501 \quad ; \quad b=c_2=1.7516$$

$$F(x)=0.501.x^{1.7516}$$

9) En un mapa de carreteras tenemos cuatro pueblos situados en las coordenadas :
$\{(1,0.3),(2,1.9),(3,4.3),(4,7.6)\}$

Encontrar la ecuación de la carretera de la forma $F(x)=a.e^{bx}$ que aproxima dichos pueblos utilizando el método de ajuste mínimo-cuadrático con linealización de los los datos.

Solución:

$$\log(F(x)) = \log(a.e^{bx}) = \log(a) + \log e^{bx} = \log(a) + bx = c_1.\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$$

$$\text{siendo} \quad c_1 = \log(a) \quad , \quad \phi_1(x) = 1 \, , \; c_2 = b \, , \; \phi_2(x) = x$$

Los puntos serían $\{(x_i, \log(y_i))\}$ $i = 1,\ldots,4$. c_1 y c_2 se obtienen como solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} \phi_1(x_i).\phi_1(x_i) & \sum_{i=1}^{4} \phi_1(x_i).\phi_2(x_i) \\ \sum_{i=1}^{4} \phi_2(x_i).\phi_1(x_i) & \sum_{i=1}^{4} \phi_2(x_i).\phi_2(x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} \log(y_i).\phi_1(x_i) \\ \sum_{i=1}^{4} \log(y_i).\phi_2(x_i) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & \sum_{i=1}^{4} x_i \\ \sum_{i=1}^{4} x_i & \sum_{i=1}^{4} x_i^{\,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} \log(y_i) \\ \sum_{i=1}^{4} x_i.\log(y_i) \end{pmatrix}$$

x_i	y_i	$x_i^{\,2}$	$\log y_i$	$x_i.\log(y_i)$
1	0.3	1	-1.204	-1.204
2	1.9	4	0.642	1.284
3	4.3	9	1.459	4.377
4	7.6	16	2.028	8.112
10		30	2.925	12.569

$$4c_1 + 10c_2 = 2.925$$

$$c_1 = -1.897 \qquad\qquad c_2 = 0.758$$

$$10c_1 + 30c_2 = 12.569$$

$$\log(a) = -1.897 \;\; \Rightarrow a = e^{-1.897} = 0.15 \qquad ; \qquad b = 0.758$$

$$F(x) = 0.15.e^{0.758x}$$

10) Si una población tiene un crecimiento logístico y no puede superar la cantidad de 1000 individuos, entonces el número P de individuos en un instante t viene dado por la expresión:

$$P(t) = \frac{1000}{1 + c.e^{At}}$$

Aproximar mediante el método de mínimos cuadrados con linealización el valor de c y A para los datos siguientes:

t	0	1	2	3	4
p	200	400	650	850	950

Solución:

$$\frac{1}{P(t)}=\frac{1+C.e^{At}}{1000}=\frac{1}{1000}+\frac{C}{1000}.e^{At} \quad ; \quad \frac{1}{P(t)}-\frac{1}{1000}=\frac{C}{1000}.e^{At}$$

$$\log\left(\frac{1}{P(t)}-\frac{1}{1000}\right)=\log\frac{C}{1000}+\log e^{At} = \log C-\log 1000+At$$

$$\log\left(\frac{1}{P(t)}-\frac{1}{1000}\right)+\log 1000=\log C+At \quad ; \quad \log\left(\frac{1000}{P(t)}-1\right)=\log C+At$$

$$\log\left(\frac{1000}{P(t)}-1\right)=c_1\phi_1(t)+c_2\phi_2(t) \quad \text{siendo } c_1=\log C \text{ , } \phi_1(t)=1 \text{ , } c_2=A, \ \phi_2(t)=t$$

Puntos: $\left\{\left(t_i,\log\left(\frac{1000}{P_i}-1\right)\right)\right\}$ $\quad i=1,\ldots,5$

c_1 y c_2 se obtienen como solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5}\phi_1(t_i)\phi_1(t_i) & \sum_{i=1}^{5}\phi_1(t_i)\phi_2(t_i) \\ \sum_{i=1}^{5}\phi_2(t_i)\phi_1(t_i) & \sum_{i=1}^{5}\phi_2(t_i)\phi_2(t_i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5}\log\left(\frac{1000}{P_i}-1\right).\phi_1(t_i) \\ \sum_{i=1}^{5}\log\left(\frac{1000}{P_i}-1\right).\phi_2(t_i) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & \sum_{i=1}^{5}t_i \\ \sum_{i=1}^{5}t_i & \sum_{i=1}^{5}t_i^{\,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5}\log\left(\frac{1000}{P_i}-1\right) \\ \sum_{i=1}^{5}t_i.\log\left(\frac{1000}{P_i}-1\right) \end{pmatrix}$$

t_i	P_i	$t_i^{\,2}$	$\log\left(\frac{1000}{P_i}-1\right)$	$t_i.\log\left(\frac{1000}{P_i}-1\right)$
0	200	0	log 4 = 1.386	0
1	400	1	log 1.5 = 0.405	0.405
2	650	4	log 7/13 = -0.619	-1.238
3	850	9	log 3/17 = -1.735	-5.205
4	950	16	log 1/19 = -2.944	-11.776
10		30	-3.507	-17.814

$$\begin{aligned} 5c_1 + 10c_2 &= -3.507 \\ 10c_1 + 30c_2 &= -17.814 \end{aligned} \qquad c_1 = 1.46 \qquad c_2 = -1.08$$

$$C = e^{c_1} = e^{1.46} = 4.306 \quad ; \quad A = c_2 = -1.08$$