



Asignatura: Análisis Numérico

Autor: César Menéndez

Ultima actualización: 15/01/2008

Aproximación

Titulación:

Ingeniero Técnico Informático

Planificación:

6 Teoría+1Tablero+0.5Laboratorio

Materiales:

MATLAB y apuntes

Conocimientos previos:

T^{mas}. básicos de Cálculo –
Desarrollos de Taylor – Sistemas
lineales –



Ejemplo

Descripción

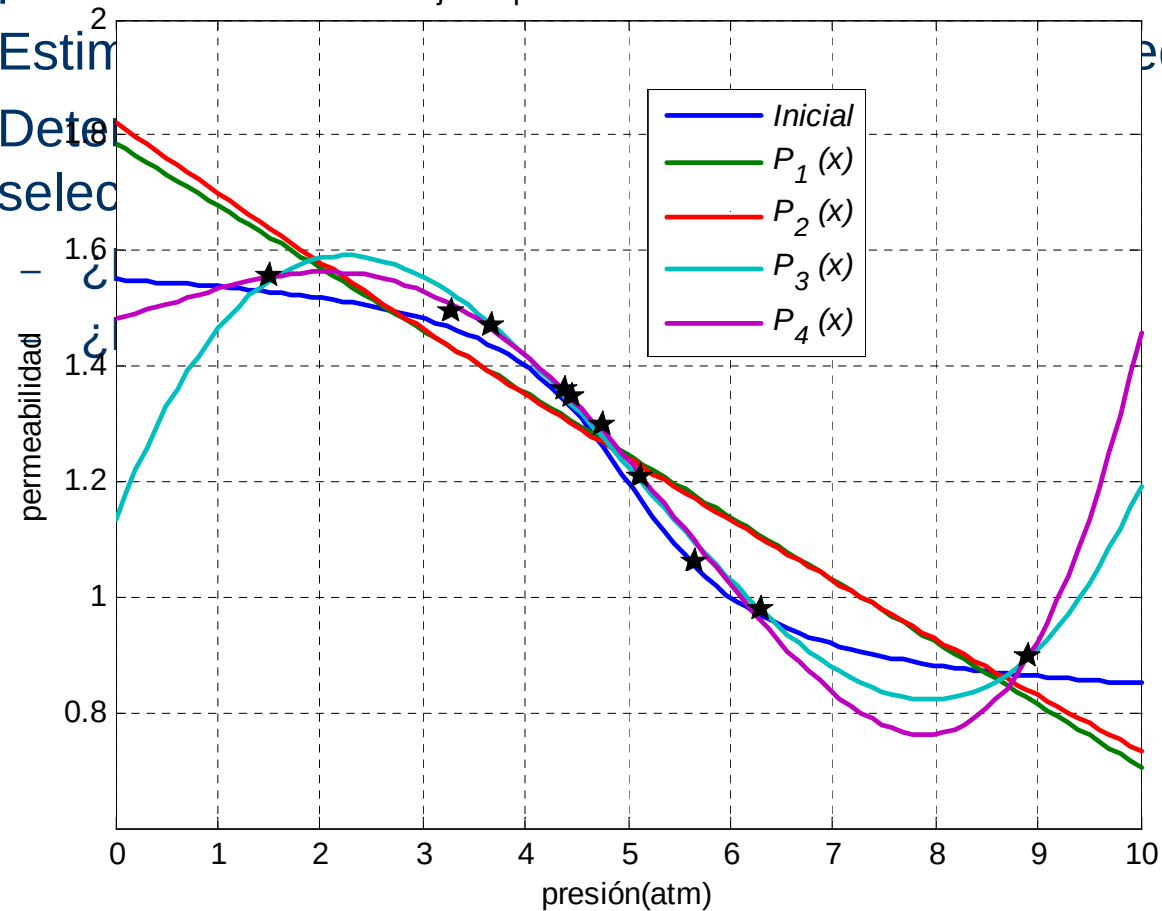
Objetivos

Temario

Bibliografía

- Ensayos en laboratorio que miden, con un cierto error, la permeabilidad de un material para diferentes presiones

- Estimación de la permeabilidad para presiones medias
- Determinación de la permeabilidad seleccionada





Aproximación

Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

- Aprender los diferentes tipos de aproximación dependiendo de la “medida” y su interpretación geométrica
- Entender la similitud entre el planteamiento de la minimización del error continua y discreta
- Comprender la generación de la aproximación por mínimos cuadrados y los cambios de variable para linealizar el problema
- Conocer las ventajas de los polinomios ortogonales para mejorar el condicionamiento del sistema
- Ser capaz de valorar la fiabilidad del ajuste usando gráficas o apreciaciones cuantitativas



Planteamiento

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

- Distancias
- Minoración
- Ejemplos

Mínimos cuadrados

Aprox. Uniforme

Bibliografía

- Sustitución de una función (conocida o tabulada) por otra “próxima” más simple
- Función de ajuste como combinación de la base de un espacio funcional:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x)$$

- Funciones base: polinómicas, trigonométricas, ...
- Tipos de aproximación:
 - Funcional: aproxima a otra función en un intervalo
 - Discreta (ajuste): aproxima un conjunto de datos
- Función de aproximación es la “más próxima” a la función o datos conocidos
 - ¿Cómo se mide la “proximidad”
 - Aproximación en espacios normados o cuasinormados



Medidas

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

- Distancias

- Minoración

- Ejemplos

Mínimos cuadrados

Aprox. Uniforme

Bibliografía

- ¿Cómo se mide la proximidad de un elemento a otro?
- Definición: Un espacio métrico es un conjunto M (a cuyos elementos se les denomina puntos) con una función *distancia* asociada (también llamada métrica) $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades
 - $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M$
 - $d(x, x) = 0 \quad \forall x \in M$
 - $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in M$
 - $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in M$
 - $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in M$
 - Si no cumple la última es un espacio pseudo-métrico
- Ejemplos:
 - Distancia trivial: $d(x, y) = 1$ para puntos diferentes
 - Distancia euclídea (en un espacio vectorial de dimensión n):
Pseudodistancia en los enteros: $d(x, y) = \text{resto}(|x - y|, 2)$
- Habitualmente se trabaja con conjuntos que son espacios vectoriales normados sobre el cuerpo $\mathbb{R}$



Normas

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

- Distancias
- Minoración
- Ejemplos

Mínimos cuadrados Aprox. Uniforme

Bibliografía

- Definición: Un espacio vectorial normado sobre un cuerpo K es un conjunto V (a cuyos elementos se les denomina vectores) con una función *norma* $\| \cdot \| : V \rightarrow K / x \in V \rightarrow \|x\|$ que satisface las siguientes propiedades

- $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in V, \lambda \in K$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

– Si no cumple la última es un espacio pseudo-normado

- Ejemplos (sobre el cuerpo de los reales):

$$V = \mathbb{R}^n \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k)^2} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

$$V = \{f \in C[a, b]\} \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \quad \|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

- Una norma siempre define una distancia $d(x, y) = \|x - y\|$

**Descripción****Objetivos****Temario****Introducción**

- Distancias

- Minoración

- Ejemplos

Mínimos cuadrados**Aprox. Uniforme****Bibliografía**

Producto escalar

- Definición: Un espacio vectorial prehilbertiano sobre un cuerpo K es un conjunto V (a cuyos elementos se les denomina vectores) con una función *producto escalar* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K / x, y \in V \rightarrow \langle x, y \rangle$ que satisface las siguientes propiedades

- $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$
- $\langle \lambda x, y \rangle = |\lambda| \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V, \lambda \in K$
- $\langle x + y, z \rangle \leq \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in V$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in V$
- $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 - Si el espacio vectorial es de dimensión finita se denomina euclídeo
 - Si no cumple la última propiedad es un espacio pseudo-prehilbertiano
 - En un espacio euclídeo el producto escalar viene asociado a una forma sesquilineal, hermítica y definida positiva
 - Si el cuerpo es $\mathbb{R}$, entonces la forma es bilineal y definida positiva
- Ejemplos: $V = \mathbb{R}^n \quad V = \{ f \in C[a, b] \} \quad V = M_n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$$

- Un producto escalar siempre define una norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- Una norma a veces define un producto escalar

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \quad \|x\|_2 \Rightarrow SI \quad \|x\|_\infty \Rightarrow NO : x = (2, -1), y = (-1, -1), \lambda = 3$$



Minoración (minimización) del error

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

- Distancias
- Minoración
- Ejemplos

Mínimos cuadrados

Aprox. Uniforme

Bibliografía

- Seleccionado el espacio funcional $\Psi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ y el valor n , encontrar $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ que hagan mínima la distancia

$$d(f(x), \psi(x)) = d\left(f(x), \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x)\right)$$
- Para asegurar la existencia y unicidad de solución, se debe trabajar en espacios normados o prehilbertianos
- Tipos de aproximaciones: continua/discreta (norma/pseudonorma)

- Mínimos cuadrados (norma 2)

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x) \rightarrow \min_{\alpha_i} \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x) - f(x) \right\|_2^2 = \min_{i=1,2,\dots,m} E(\alpha_i)$$

$$\begin{cases} \text{Discreta: } \{x_k, f(x_k)\}_{k=1}^N & E(\alpha_i) = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x_k) - f(x_k) \right)^2 \\ \text{Continua: } [a, b] & E(\alpha_i) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x) - f(x) \right)^2 dx \end{cases}$$

- Uniforme (norma infinito)

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x) \rightarrow \min_{\alpha_i} \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x) - f(x) \right\|_{\infty} = \min_{i=1,2,\dots,m} E_{\infty}(\alpha_i)$$

$$\begin{cases} \text{Discreta: } \{x_k, f(x_k)\}_{k=1}^N & E(\alpha_i) = \max_{1 \leq k \leq N} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x_k) - f(x_k) \right| \\ \text{Continua: } [a, b] & E(\alpha_i) = \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x) - f(x) \right| \end{cases}$$



Representación (caso discreto)

Descripción

Objetivos

Temario

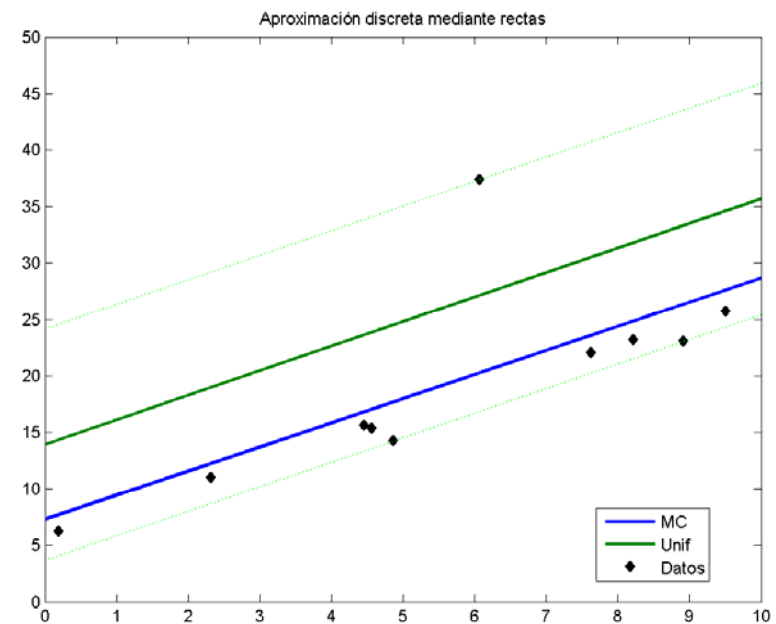
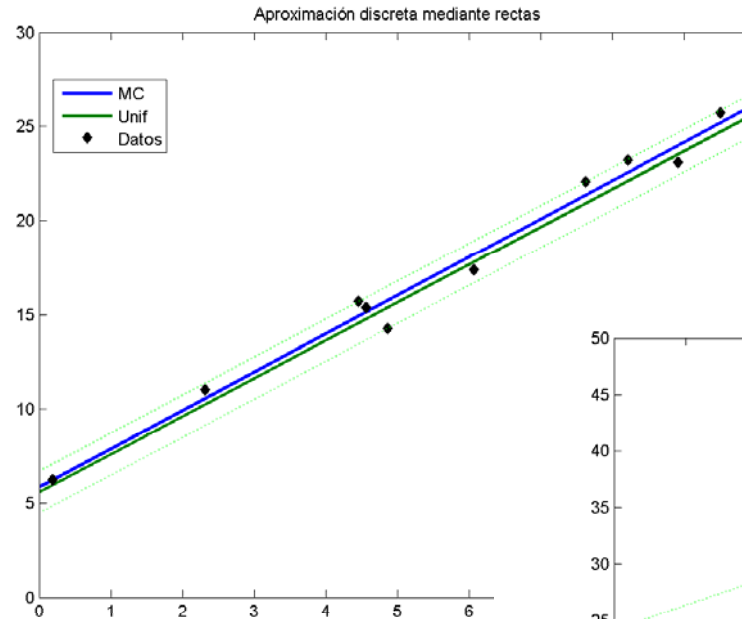
Introducción

- Distancias
- Minoración
- Ejemplos

Mínimos cuadrados

Aprox. Uniforme

Bibliografía



Aproximación	Error	Máximo	Promedio
Caso I	MC	1.4839 (5)	2.3921
	Unif	1.1210 (5)	2.6870
Caso II	MC	17.1213 (6)	18.2036
	Unif	10.2395 (6)	28.3372



Representación (caso continuo): $\cos(x)$

Descripción

Objetivos

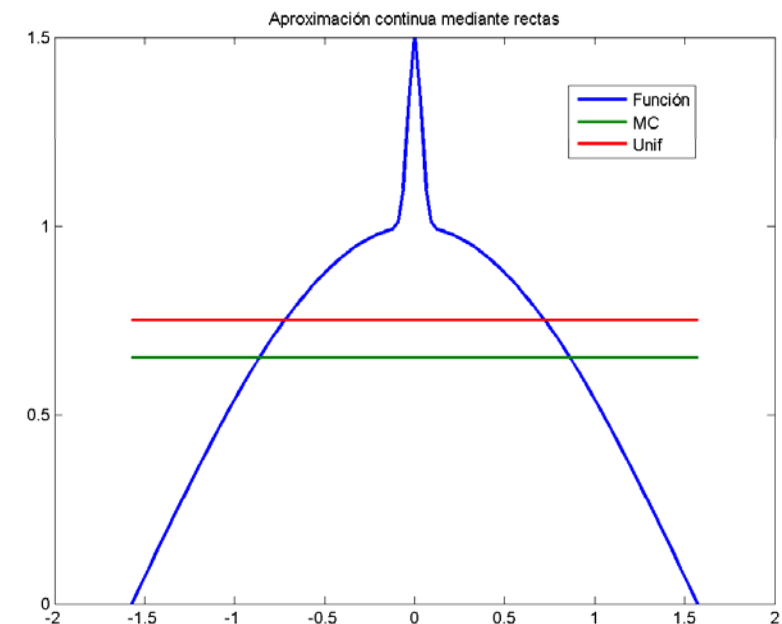
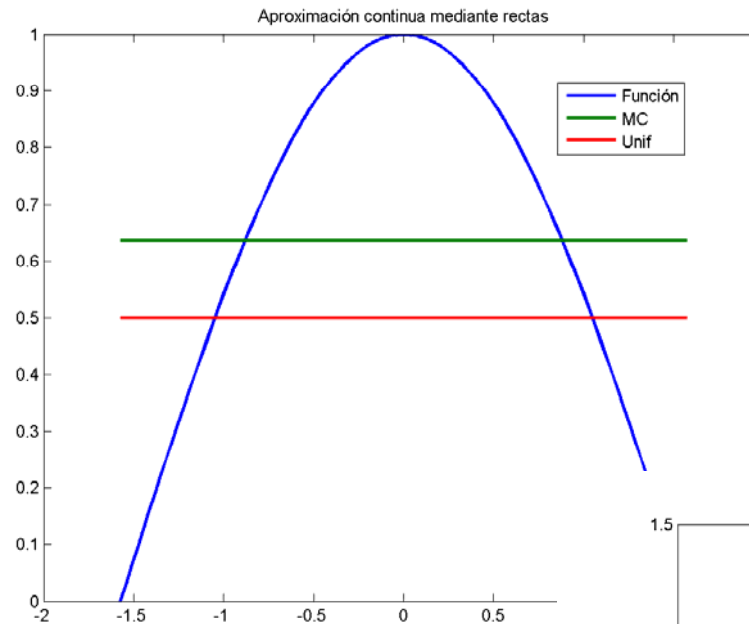
Temario

Introducción

- Distancias
- Minoración
- Ejemplos

Mínimos cuadrados Aprox. Uniforme

Bibliografía



Aproximación	Error	Máximo	Area
Caso I	MC	0.6366	0.2976
	Unif	0.5000	0.3562
Caso II	MC	0.8493	0.3447
	Unif	0.7500	0.3757



Obtención de la aproximación por M.C.

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mínimos cuadrados

- Planteamiento

- Aprox. Discreta

- Aprox. Continua

- Linealización

- No lineal

- Ponderación

- Valoración

Aprox. Uniforme

Bibliografía

- Puesto que el error es siempre positivo, los valores para los que se alcanza el mínimo son iguales para

$$E(\alpha_i) \text{ y } E^2(\alpha_i) \Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} / \min_{i=1,2,\dots,m} E(\alpha_i) \rightarrow \min_{i=1,2,\dots,m} E^2(\alpha_i)$$

- Los puntos minimales verifican que las parciales son nulas

$$\frac{\partial E^2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{Denotando por } \langle \phi(x), \psi(x) \rangle = \langle \psi(x), \phi(x) \rangle = \begin{cases} \sum_{k=1}^N \phi(x_k) \psi(x_k) & \text{Discreta: } \{x_k, y_k\}_{k=1}^N \\ \int_a^b \phi(x) \psi(x) dx & \text{Continua: } [a, b] \end{cases}$$

$$\text{se obtiene } \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle \phi_k(x), \phi_i(x) \rangle = \langle \phi_k(x), f(x) \rangle \quad k = 1, 2, \dots, m$$

que conduce a un sistema lineal cuya resolución calcula los coeficientes

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_1(x), \phi_1(x) \rangle & \langle \phi_1(x), \phi_2(x) \rangle & \dots & \langle \phi_1(x), \phi_m(x) \rangle \\ \langle \phi_1(x), \phi_2(x) \rangle & \langle \phi_2(x), \phi_2(x) \rangle & \dots & \langle \phi_2(x), \phi_m(x) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_1(x), \phi_m(x) \rangle & \langle \phi_2(x), \phi_m(x) \rangle & \dots & \langle \phi_m(x), \phi_m(x) \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \phi_1(x), f(x) \rangle \\ \langle \phi_2(x), f(x) \rangle \\ \vdots \\ \langle \phi_m(x), f(x) \rangle \end{pmatrix}$$



Aproximación polinómica por M.C.

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mínimos cuadrados

- Planteamiento

- Aprox. Discreta

- Aprox. Continua

- No lineal

- Ponderación

- Valoración

Aprox. Uniforme

Bibliografía

- El espacio sobre el que se proyecta son los polinomios.
- Este espacio tiene infinitas bases, si bien la más conocida es la base canónica
 - $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots, x^n\}$
 - $B = \{(1-x)^n, x(1-x)^{n-1}, x^2(1-x)^{n-2}, x^3(1-x)^{n-3}, x^4(1-x)^{n-4}, \dots, x^n\}$
 - ...
- Una base se denomina ortogonal cuando verifica
$$\langle \varphi_i(x), \varphi_j(x) \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ > 0 & i = j \end{cases}$$
- Una base ortogonal es ortonormal cuando
$$\langle \varphi_i(x), \varphi_j(x) \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$
- El sistema anterior se convierte en diagonal cuando la base es ortogonal, lo que lo hace muy sencillo de resolver. La dificultad se traslada a la obtención de la base ortogonal, ya que depende del intervalo (continua) o de los puntos (discreta)



Aproximación polinómica discreta por M.C. (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mínimos cuadrados

- Planteamiento

- Aprox. Discreta

- Aprox. Continua

- No lineal

- Ponderación

- Valoración

Aprox. Uniforme

Bibliografía

- Tomando la base canónica, el sistema se escribe como:

$$\begin{matrix} & \varphi_1(x)=1 & \varphi_2(x)=x & \varphi_3(x)=x^2 & \dots & \varphi_m(x)=x^{m-1} \\ \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N 1 \cdot 1 & \sum_{k=1}^N 1 \cdot x_k & \sum_{k=1}^N 1 \cdot (x_k)^2 & \dots & \sum_{k=1}^N 1 \cdot (x_k)^{m-1} \\ \sum_{k=1}^N x_k \cdot 1 & \sum_{k=1}^N x_k \cdot x_k & \sum_{k=1}^N x_k \cdot (x_k)^2 & \dots & \sum_{k=1}^N x_k \cdot (x_k)^{m-1} \\ \sum_{k=1}^N (x_k)^2 \cdot 1 & \sum_{k=1}^N (x_k)^2 \cdot x_k & \sum_{k=1}^N (x_k)^2 \cdot (x_k)^2 & \dots & \sum_{k=1}^N (x_k)^2 \cdot (x_k)^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^N (x_k)^{m-1} \cdot 1 & \sum_{k=1}^N (x_k)^{m-1} \cdot x_k & \sum_{k=1}^N (x_k)^{m-1} \cdot (x_k)^2 & \dots & \sum_{k=1}^N (x_k)^{m-1} \cdot (x_k)^{m-1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N 1 \cdot y_k \\ \sum_{k=1}^N x_k \cdot y_k \\ \sum_{k=1}^N (x_k)^2 \cdot y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N (x_k)^{m-1} \cdot y_k \end{pmatrix} & \rightarrow A\alpha = b
 \end{matrix}$$

- Denotando por $y_k = f(x_k)$ $A = X^t \cdot X$ $b = X^t Y$

- Donde
$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^{m-1} \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \dots & (x_2)^{m-1} \\ 1 & x_3 & (x_3)^2 & \dots & (x_3)^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & (x_N)^2 & \dots & (x_N)^{m-1} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

- Se tiene

$$X^t \cdot X \alpha = X^t \cdot Y$$



Ej.1.-Aproximación polinómica discreta

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mínimos cuadrados

- Planteamiento

- Aprox. Discreta

- Aprox. Continua

- No lineal

- Ponderación

- Valoración

Aprox. Uniforme

Bibliografía

- Ejemplo: Obtener la mejor aproximación de la función constante $f(x)=2$ mediante funciones de la forma $\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2$ por mínimos cuadrados discreta utilizando los puntos $\{-2,-1, 0, 1, 2\}$.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & (-2)^2 \\ 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & 0 & (0)^2 \\ 1 & 1 & (1)^2 \\ 1 & 2 & (2)^2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = X^t \cdot X = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^5 1 & \sum_{k=1}^5 x_k & \sum_{k=1}^5 (x_k)^2 \\ \sum_{k=1}^5 x_k & \sum_{k=1}^5 (x_k)^2 & \sum_{k=1}^5 (x_k)^3 \\ \sum_{k=1}^5 (x_k)^2 & \sum_{k=1}^5 (x_k)^3 & \sum_{k=1}^5 (x_k)^4 \end{pmatrix} \\ b = X^t \cdot Y = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^5 y_k \\ \sum_{k=1}^5 x_k \cdot y_k \\ \sum_{k=1}^5 (x_k)^2 \cdot y_k \end{pmatrix} \end{array} \right. \rightarrow$$

$$A\alpha = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 2 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$



Ej.2.-Aproximación polinómica discreta (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mínimos cuadrados

- Planteamiento

- Aprox. Discreta

- Aprox. Continua

- No lineal

- Ponderación

- Valoración

Aprox. Uniforme

Bibliografía

- Ejemplo: Obtener la mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función de Runge $f(x)=(1+x^2)^{-1}$ tomando la base $\{1,x\}$ y utilizando los puntos $\{-2,-1, 0, 1, 2\}$. Repetir el proceso tomando $\{1,x^2\}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \rightarrow A = X^t \cdot X = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^5 1 & \sum_{k=1}^5 x_k \\ \sum_{k=1}^5 x_k & \sum_{k=1}^5 (x_k)^2 \end{pmatrix} \quad b = X^t \cdot Y = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^5 y_k \\ \sum_{k=1}^5 x_k \cdot y_k \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$A\alpha = b \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{12}{25} \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0x + \frac{12}{25}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & (-2)^2 \\ 1 & (-1)^2 \\ 1 & (0)^2 \\ 1 & (1)^2 \\ 1 & (2)^2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \rightarrow A = X^t \cdot X = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^5 1 & \sum_{k=1}^5 (x_k)^2 \\ \sum_{k=1}^5 (x_k)^2 & \sum_{k=1}^5 (x_k)^4 \end{pmatrix} \quad b = X^t \cdot Y = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^5 y_k \\ \sum_{k=1}^5 (x_k)^2 \cdot y_k \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$A\alpha = b \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{13}{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{13}{5} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ -\frac{11}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{139}{175} \\ \alpha_2 = -\frac{11}{70} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{11}{70}x^2 + \frac{139}{175}$$



Ej.2.-Aproximación polinómica discreta (II)

- Ejemplo: Obtener la mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función de Runge $f(x)=(1+x^2)^{-1}$ tomando la base $\{1,x\}$ y utilizando los puntos $\{-2,-1, 0, 1, 2\}$. Repetir el proceso tomando $\{1,x^2\}$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mínimos cuadrados

- Planteamiento

- Aprox. Discreta

- Aprox. Continua

- No lineal

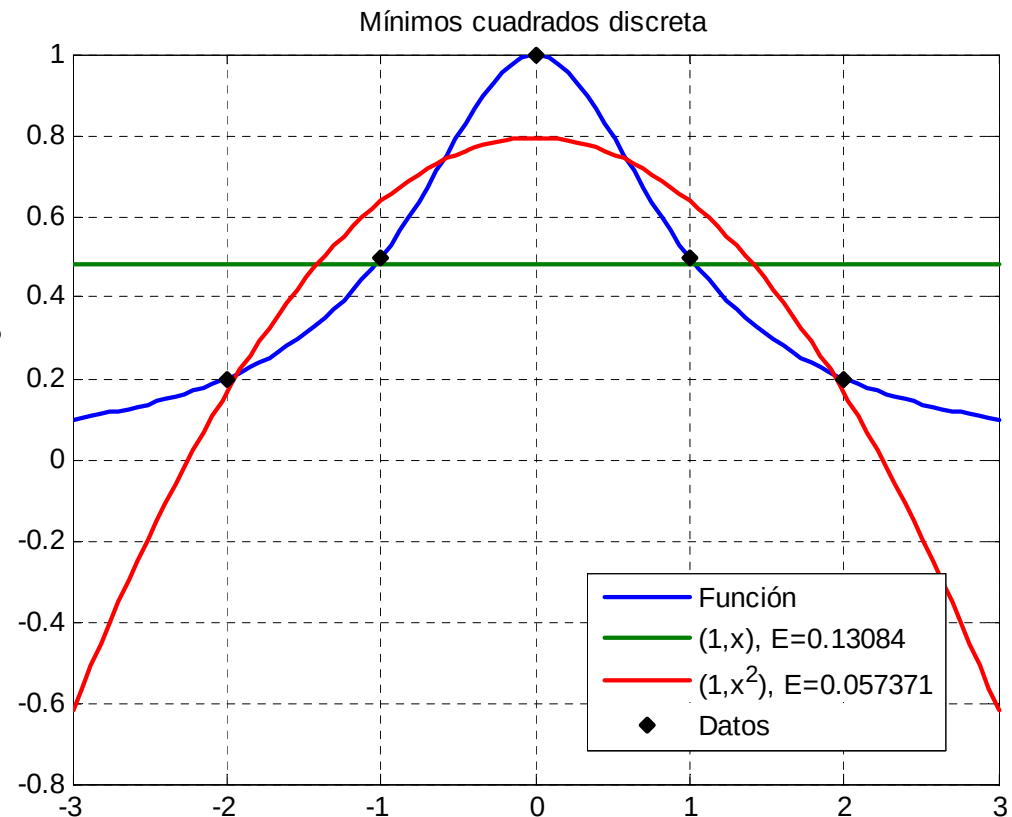
- Ponderación

- Valoración

Aprox. Uniforme

Bibliografía

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$y_1 = 0x + \frac{12}{25}$$
$$y_2 = -\frac{11}{70}x^2 + \frac{139}{175}$$





Aproximación polinómica continua (I)

- Tomando la base canónica, y definido el intervalo $[a,b]$ donde se desea aproximar la función, el sistema se escribe como:

$$\begin{array}{c}
 (\varphi_1(x)=1 \quad \varphi_2(x)=x \quad \varphi_3(x)=x^2 \quad \varphi_m(x)=x^{m-1}) \\
 \left(\begin{array}{ccccc}
 \int_a^b 1 \cdot 1 dx & \int_a^b 1 \cdot x dx & \int_a^b 1 \cdot x^2 dx & \cdots & \int_a^b 1 \cdot x^{m-1} dx \\
 \int_a^b 1 \cdot x dx & \int_a^b x \cdot x dx & \int_a^b x \cdot x^2 dx & \cdots & \int_a^b x \cdot x^{m-1} dx \\
 \int_a^b 1 \cdot x^2 dx & \int_a^b x \cdot x^2 dx & \int_a^b x^2 \cdot x^2 dx & \cdots & \int_a^b x^2 \cdot x^{m-1} dx \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \int_a^b 1 \cdot x^{m-1} dx & \int_a^b x \cdot x^{m-1} dx & \int_a^b x^2 \cdot x^{m-1} dx & \cdots & \int_a^b x^{m-1} \cdot x^{m-1} dx
 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b 1 \cdot f(x) dx \\ \int_a^b x \cdot f(x) dx \\ \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b x^{m-1} \cdot f(x) dx \end{pmatrix} \\
 \rightarrow A\alpha = b
 \end{array}$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mínimos cuadrados

- Planteamiento
- Aprox. Discreta
- Aprox. Continua
- No lineal
- Ponderación
- Valoración

Aprox. Uniforme

Bibliografía



Ej.1.-Aproximación polinómica continua

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mínimos cuadrados

- Planteamiento
- Aprox. Discreta
- Aprox. Continua
- No lineal
- Ponderación
- Valoración

Aprox. Uniforme

Bibliografía

- Ejemplo: Obtener la mejor aproximación de la función constante $f(x)=2$ mediante funciones de la forma $\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2$ por mínimos cuadrados en el intervalo $[-2,2]$.

$$\begin{pmatrix} \int_{-2}^2 1dx & \int_{-2}^2 xdx & \int_{-2}^2 x^2dx \\ \int_{-2}^2 xdx & \int_{-2}^2 x^2dx & \int_{-2}^2 x^3dx \\ \int_{-2}^2 x^2dx & \int_{-2}^2 x^3dx & \int_{-2}^2 x^4dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-2}^2 2dx \\ \int_{-2}^2 x \cdot 2dx \\ \int_{-2}^2 x^2 \cdot 2dx \end{pmatrix}$$

$$\int_{-2}^2 1dx = 4 \qquad \int_{-2}^2 2dx = 8$$

$$\int_{-2}^2 xdx = 0 \qquad \int_{-2}^2 x^3dx = 0 \qquad \int_{-2}^2 x \cdot 2dx = 0$$

$$\int_{-2}^2 x^2dx = \frac{16}{3} \qquad \int_{-2}^2 x^4dx = \frac{64}{5} \qquad \int_{-2}^2 x^2 \cdot 2dx = \frac{32}{3}$$

$$A\alpha = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & \frac{16}{3} \\ 0 & \frac{16}{3} & 0 \\ \frac{16}{3} & 0 & \frac{64}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ \frac{32}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 2 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$



Ej.2.-Aproximación polinómica continua (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mínimos cuadrados

- Planteamiento
- Aprox. Discreta
- Aprox. Continua
- No lineal
- Ponderación
- Valoración

Aprox. Uniforme

Bibliografía

- Ejemplo: Obtener la mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función de Runge $f(x)=(1+x^2)^{-1}$ en el intervalo $[-2,2]$ tomando la base $\{1,x\}$. Repetir el proceso tomando $\{1,x^2\}$

$$\begin{pmatrix} \int_{-2}^2 1dx & \int_{-2}^2 xdx \\ \int_{-2}^2 xdx & \int_{-2}^2 x^2dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-2}^2 \frac{1}{1+x^2} dx \\ \int_{-2}^2 x \frac{1}{1+x^2} dx \end{pmatrix}$$

$$\int_{-2}^2 1dx = 4 \quad \int_{-2}^2 \frac{1}{1+x^2} dx = 2.2143$$

$$\int_{-2}^2 xdx = 0 \quad \int_{-2}^2 x \frac{1}{1+x^2} dx = 0$$

$$\int_{-2}^2 x^2dx = \frac{16}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5.\hat{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2143 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 0.5536 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 0x + 0.5536$$

$$\begin{pmatrix} \int_{-2}^2 1dx & \int_{-2}^2 x^2dx \\ \int_{-2}^2 x^2dx & \int_{-2}^2 x^4dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-2}^2 \frac{1}{1+x^2} dx \\ \int_{-2}^2 x^2 \frac{1}{1+x^2} dx \end{pmatrix}$$

$$\int_{-2}^2 1dx = 4 \quad \int_{-2}^2 \frac{1}{1+x^2} dx = 2.2143$$

$$\int_{-2}^2 x^2dx = \frac{16}{3} \quad \int_{-2}^2 x^2 \frac{1}{1+x^2} dx = 0$$

$$\int_{-2}^2 x^4dx = \frac{64}{5}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5.\hat{3} \\ 5.\hat{3} & 12.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2143 \\ 1.7857 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 0.8270 \\ \alpha_1 = -0.2051 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -0.2051x^2 + 0.8270$$



Ej.2.-Aproximación polinómica continua (II)

- Ejemplo: Obtener la mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función de Runge $f(x)=(1+x^2)^{-1}$ en el intervalo $[-2,2]$ tomando la base $\{1,x\}$. Repetir el proceso tomando $\{1,x^2\}$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

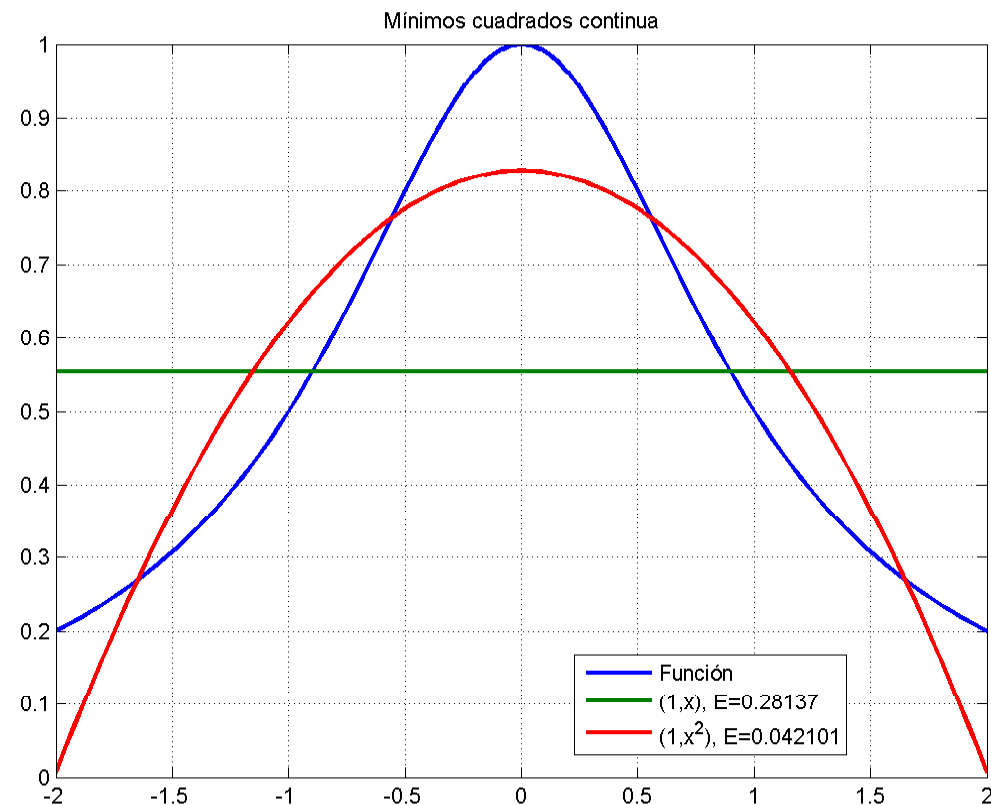
Mínimos cuadrados

- Planteamiento
- Aprox. Discreta
- Aprox. Continua
- No lineal
- Ponderación
- Valoración

Aprox. Uniforme

Bibliografía

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$y_1 = 0x + 0.5536$$
$$y_2 = -0.2051x^2 + 0.8270$$





Linealización

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mínimos cuadrados

- Planteamiento
- Aprox. Discreta
- Aprox. Continua

- No lineal

- Ponderación
- Valoración

Aprox. Uniforme

Bibliografía

- Tanto en el caso discreto como en el continuo, los cálculos se han basado en la linealidad de la función, esto es,
$$y = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_m f_m(x)$$
- Cuando la función es NO LINEAL bien se linealiza (si es posible), o bien se resuelve el sistema no lineal obtenido (ver tema de resolución de sistemas no lineales)
- Linealización de funciones habituales
 - Exponencial $y = ae^{bx} \rightarrow \ln(y) = \ln(ae^{bx}) = \ln(a) + bx \Rightarrow \hat{y} = A + bx$
 - Potencial $y = ax^b \rightarrow \ln(y) = \ln(ax^b) = \ln(a) + b \ln(x) \Rightarrow \hat{y} = A + b\hat{x}$
 - Crecimiento $y = \frac{ax}{bx+c} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{bx+c}{ax} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \frac{1}{x} \Rightarrow \hat{y} = A + B\hat{x}$



Pesos

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mínimos cuadrados

- Planteamiento
- Aprox. Discreta
- Aprox. Continua
- No lineal

Ponderación

Valoración

Aprox. Uniforme

Bibliografía

- En ocasiones interesa que el error se minore más en una parte del intervalo (continua) o para ciertos puntos (discreta), para la que se introduce una función de ponderación o unos pesos, que deben ser siempre positivos

$$\langle \phi(x), \psi(x) \rangle \begin{cases} \text{Discreta: } \{x_k, y_k\}_{k=1}^N & \sum_{k=1}^N \omega_k \phi(x_k) \psi(x_k) & \sum_{k=1}^N \omega_k = 1 \\ \text{Continua: } [a, b] & \int_a^b \omega(x) \phi(x) \psi(x) dx & \int_a^b \omega(x) dx = 1 \end{cases}$$

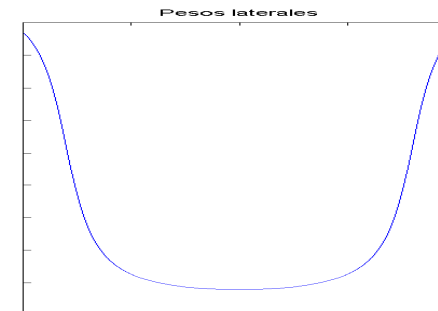
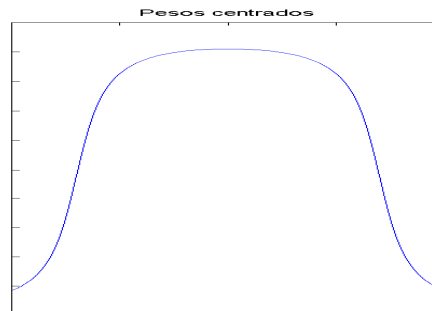
- Ejemplos de funciones de peso en un intervalo (extrapolable al valor en un punto)

- Mayor importancia en el centro:

$$w(x) = \exp(-x^2)$$

- Mayor importancia en los extremos

$$w(x) = 1 - \exp(-x^2)$$





Cuantificación del error

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mínimos cuadrados

- Planteamiento
- Aprox. Discreta
- Aprox. Continua
- Linealización
- No lineal
- Ponderación
- Valoración

Aprox. Uniforme

Bibliografía

- Dada la función conocida y la de ajuste, el error viene dado por

$$f(x), \psi(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x) \rightarrow \text{Error Cuadrático} = S_r = \langle f(x) - \psi(x), f(x) - \psi(x) \rangle \rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Discreta: } \{x_k, f(x_k)\}_{k=1}^N & S_r = \sum_{k=1}^N (f(x_k) - \psi(x_k))^2 \\ \text{Continua: } [a, b] & S_r = \int_a^b (f(x) - \psi(x))^2 dx \end{cases}$$

pero ¿es grande o pequeño?

- Es necesario un estudio estadístico que indique cuanta variación de y explica x: coeficiente de regresión

$$\text{Varianza}[f(x)] = \begin{cases} \text{Discreta: } \{x_k, y_k\}_{k=1}^N & S_y = \frac{\sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})^2}{N - m + 1} & \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N y_k}{N} \\ \text{Continua: } [a, b] & S_y = \frac{\int_a^b (f(x) - \bar{y})^2 dx}{N - m + 1} & \bar{y} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{|b - a|} \end{cases}$$

$$\text{Correlación: } r^2 = 1 - \frac{S_{y/x}}{S_y} \quad \text{con} \quad S_{y/x} = \frac{S_r}{N - m + 1}$$