Ejercicio 1.- Dada la función vectorial de variable vectorial $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donde

$$F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x^2 - y^2 \\ y - \frac{1}{4}(\sin x + \cos y) \end{pmatrix} \text{ y } D = \{-2 \le x, y \le 2\}$$

Se define el sistema no lineal $F(X) = 0$ y se pide

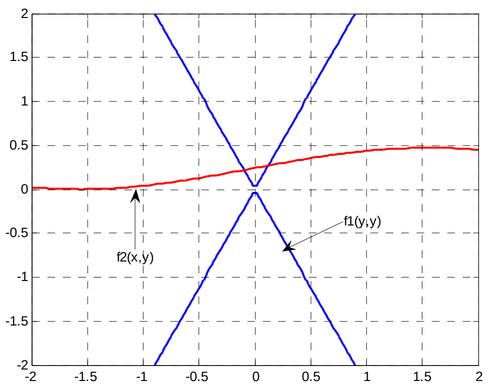
(a) Obtener una función de punto fijo y un dominio adecuado que cumpla las condiciones del teorema de punto fijo. Realizar tres iteraciones a partir del extremo inferior izquierdo del dominio. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para poder asegurar un error menor que una milésima usando la norma infinito?.

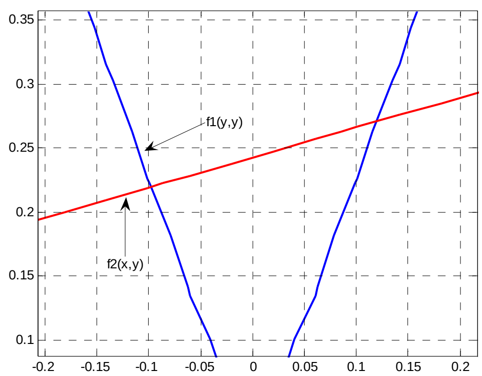
(b) Realizar tres iteraciones del método de Newton, utilizando el mismo valor inicial que en el apartado anterior.

(c) Realizar tres iteraciones del método de máximo descenso, utilizando el mismo valor inicial que en los apartados anteriores.

Apartado (a) Método de punto fijo

Representamos las funciones $f_1(x,y) = 5x^2 - y^2 = 0$ y $f_2(x,y) = y - \frac{1}{4}(\sin x + \cos y) = 0$, aunque no se pide, para verificar de forma gráfica nuestros resultados. La primera se puede descomponer como $f_1(x,y) = \left(\sqrt{5}x + y\right)\left(\sqrt{5}x - y\right) = 0$, que representa a dos rectas que se cortan en el origen, mientras que la segunda exige un análisis más complejo. Utilizando MATLAB se obtiene la siguiente representación





Se observa gráficamente que hay dos puntos de corte, cuyos valores aproximados son (0.1212, 0.2711) y (-0.0982, 0.2195).

El apartado pide encontrar una función de punto fijo que cumpla las siguientes condiciones:

Teorema I

Sea $G: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *donde* $D = \{X \mid a_i \le x_i \le b_i\}$, *si* $G \in C(D) \mid \forall X \in D : G(X) \in D$, *entonces* $G(X)$ *tiene un punto fijo* P *en* $D \subset \mathbb{R}^n$. *Si además* $G(X)$ *tiene derivadas parciales continuas y existe una constante K<1 tal que* $\left|\frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}\right| \le \frac{K}{n}, i = 1, 2, \cdots n \wedge j = 1, 2, \cdots n$ *entonces dicho punto fijo es único, y la sucesión definida por* $X^{(k)} = G\left(X^{(k-1)}\right)$ *converge a dicho punto fijo para cualquier elección inicial de* $X^{(0)} \in D$, *verificándose además que* $\left\|P - X^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{K^k}{1-K}\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_\infty$

Despejando de ambas ecuaciones, se obtiene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = G(X) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{4}(\sin x + \cos y) \end{pmatrix} \text{ con } D = \{-2 \le x, y \le 2\}$$

Se debe comprobar que esta función verifica las condiciones del teorema:

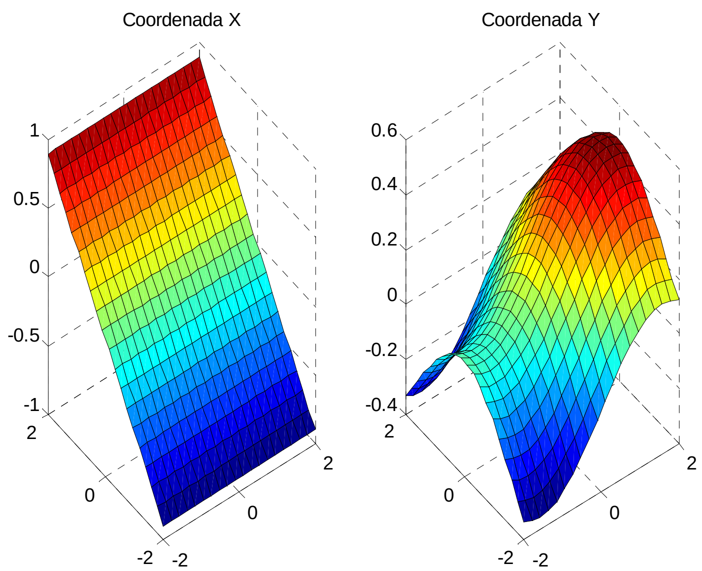
1. $G(X) \in C(D)$

   Se verifica puesto que la función nunca se anula ni tiene comportamiento asintótico

2. $\forall X \in D : G(X) \in D$

3. $\max\limits_{X \in D} |G(X)| = \max\limits_{-2 \le x, y \le 2} \begin{pmatrix} |g_1(x,y)| \\ |g_2(x,y)| \end{pmatrix} = \max\limits_{-2 \le x, y \le 2} \begin{pmatrix} \left|\frac{y}{\sqrt{5}}\right| \\ \left|\frac{1}{4}(\sin x + \cos y)\right| \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{4}(1+1) \end{pmatrix} \in D$

   O realizando su representación gráfica



De ambas formas se observa que la función es contractiva

4. $\left|\dfrac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}\right| \le \dfrac{K}{n}, i=1,2,\cdots n \wedge j=1,2,\cdots n$ con $K<1$

Calculando el jacobiano de G: $J_G(X)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{4}\cos x & -\frac{1}{4}\sin y \end{pmatrix}$

Se obtiene que

$$\max_{-2\le x,y\le 2}\left|\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x}\right| = 0 \quad \max_{-2\le x,y\le 2}\left|\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \max_{-2\le x,y\le 2}\left|\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}\right| \le \frac{1}{4} \quad \max_{-2\le x,y\le 2}\left|\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y}\right| \le \frac{1}{4}$$

Y por tanto

$$\max_{-2\le x,y\le 2}\left|\frac{\partial g_i(x,y)}{\partial x_j}\right| \le \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{K}{2}, i,j=1,2,\cdots n \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \le K < 1 \to K \approx 0.8944$$

Así pues la función anterior cumple las condiciones del teorema sin falta de disminuir el dominio inicial. Se comienzan a realizar las iteraciones tomando como punto inicial el (-2,-2)

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = G\left(X^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{4}\left(\sin(-2)+\cos(-2)\right) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.8944 \\ -0.3314 \end{pmatrix}$$

$$X^{(2)} = G\left(X^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{-0.8944}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{4}\left(\sin(-0.8944)+\cos(-0.3314)\right) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.1482 \\ 0.0414 \end{pmatrix}$$

Reiterando el proceso, se llega a (0.1211, 0.2709) en 8 iteraciones.

Utilizando la acotación del error se tendría

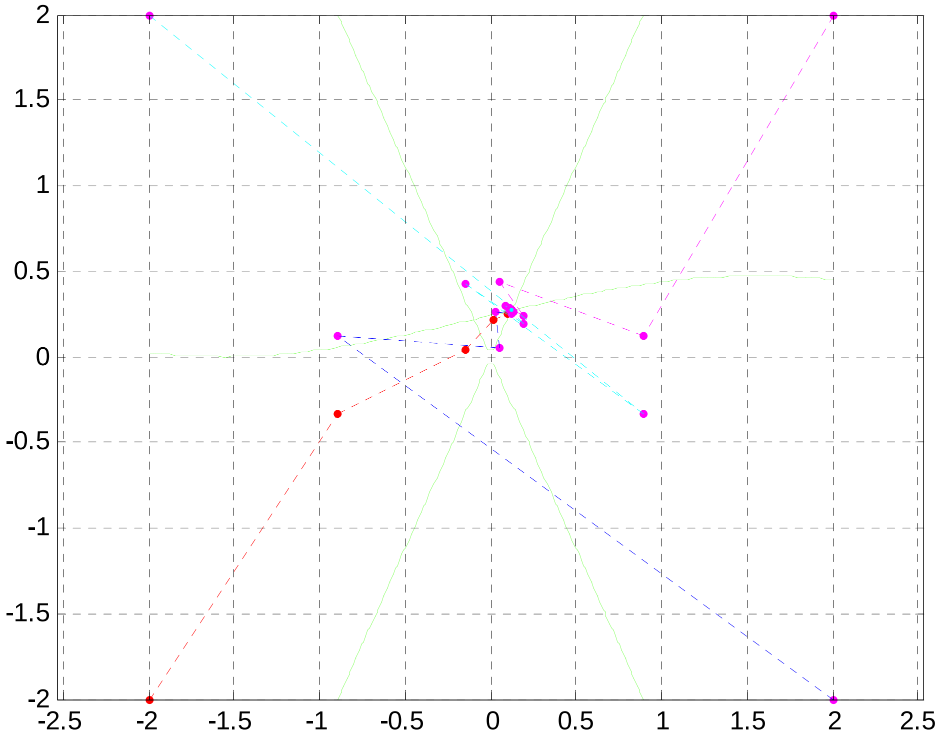
$$\left\|P-X^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{K^k}{1-K}\left\|X^{(1)}-X^{(0)}\right\|_\infty < 10^{-3} \to \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^k}{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}\left\|\begin{pmatrix} -1.1056 \\ -1.6686 \end{pmatrix}\right\| < 10^{-3} \to \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^k < 6.3269\cdot 10^{-5} \to$$

$$\to k > \frac{\log\left(6.3269\cdot 10^{-5}\right)}{\log\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)} \approx 86.5 \Rightarrow k \ge 87$$

Y se hubiera necesitado hacer 87 iteraciones.

A continuación se tabulan los resultados de 8 iteraciones para diferentes valores de partida, representándose su evolución de forma gráfica. En todos los casos las iteraciones convergen al único punto fijo de la función en el intervalo.

Iter	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$X_1^{(0)}$	-2.0000	-0.8944	-0.1482	0.0185	0.0952	0.1114	0.1190	0.1203	0.1211
	-2.0000	-0.3314	0.0414	0.2129	0.2490	0.2661	0.2690	0.2707	0.2709
$X_2^{(0)}$	2.0000	0.8944	0.0551	0.1981	0.1072	0.1306	0.1190	0.1224	0.1209
	2.0000	0.1233	0.4431	0.2396	0.2921	0.2662	0.2738	0.2704	0.2714
$X_3^{(0)}$	2.0000	-0.8944	0.0551	0.0238	0.1178	0.1106	0.1215	0.1200	0.1214
	-2.0000	0.1233	0.0531	0.2634	0.2473	0.2718	0.2684	0.2714	0.2708
$X_4^{(0)}$	-2.0000	0.8944	-0.1482	0.1929	0.0851	0.1312	0.1165	0.1227	0.1206
	2.0000	-0.3314	0.4314	0.1902	0.2934	0.2606	0.2743	0.2697	0.2715



Apartado (b) Método de Newton

En este caso, el método iterativo viene dado como $X^{(k)} = X^{(k-1)} - J_F^{-1}\left(X^{(k-1)}\right)F\left(X^{(k-1)}\right)$ donde $J\left(X^{(k-1)}\right)$ es el Jacobiano de la función que viene dado como

$$J_F(X)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10x & -2y\\ -\frac{1}{4}\cos x & 1+\frac{1}{4}\sin y\end{pmatrix}$$

Aunque en el ejemplo es posible calcular

$$J_F^{-1}(X)=\begin{pmatrix}\dfrac{4+\sin y}{2(20x+5x\sin y-y\cos x)} & \dfrac{4y}{(20x+5x\sin y-y\cos x)}\\ \dfrac{\cos y}{2(20x+5x\sin y-y\cos x)} & \dfrac{20x}{(20x+5x\sin y-y\cos x)}\end{pmatrix}$$

En la práctica se evita el cálculo de inversas, por lo que el sistema se plantea como

$$\begin{cases}J_F\left(X^{(k-1)}\right)\delta X^{(k)}=F\left(X^{(k-1)}\right)\\ X^{(k)}=X^{(k-1)}-\delta X^{(k)}\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}\begin{pmatrix}10x^{(k-1)} & 2y^{(k-1)}\\ -\frac{1}{4}\cos x^{(k-1)} & 1+\frac{1}{4}\sin y^{(k-1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x^{(k)}\\ \delta y^{(k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\left(x^{(k-1)}\right)^2-\left(y^{(k-1)}\right)^2\\ y^{(k-1)}-\frac{1}{4}\left(\sin x^{(k-1)}+\cos y^{(k-1)}\right)\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}x^{(k)}\\ y^{(k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^{(k-1)}\\ y^{(k-1)}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\delta x^{(k)}\\ \delta y^{(k)}\end{pmatrix}\end{cases}$$

Se realizan dos iteraciones partiendo del mismo valor inicial que en el apartado anterior

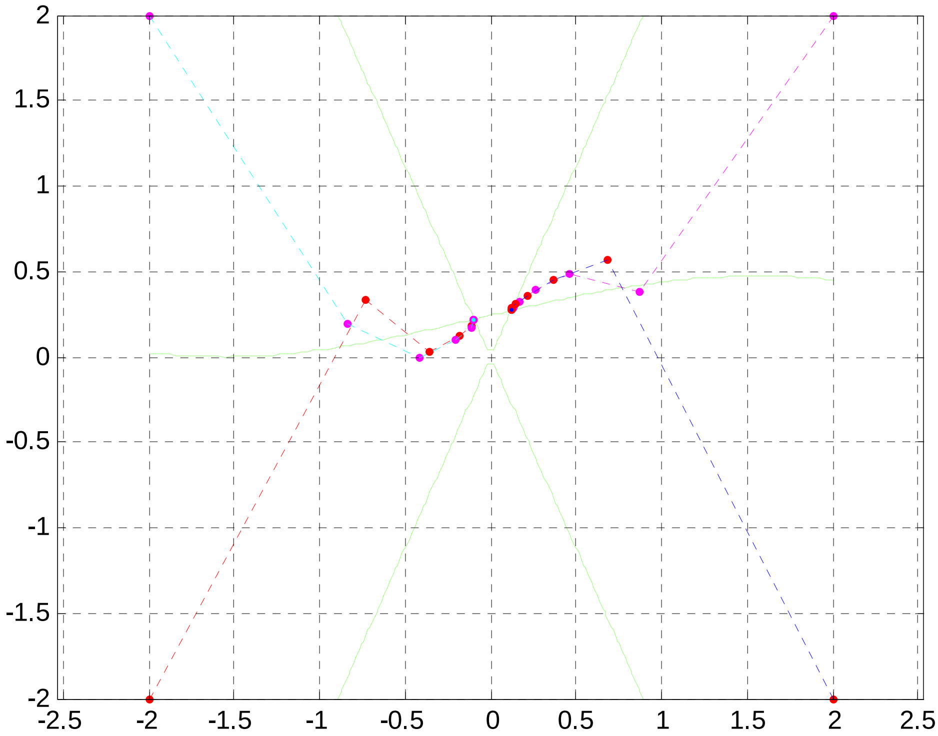
$$X^{(0)}=\begin{pmatrix}-2\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}10(-2) & 2(-2)\\ -\frac{1}{4}\cos(-2) & 1+\frac{1}{4}\sin(-2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x^{(k)}\\ \delta y^{(k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5(-2)^2-(-2)^2\\ (-2)-\frac{1}{4}(\sin(-2)+\cos(-2))\end{pmatrix}\rightarrow\\ \rightarrow\begin{pmatrix}-20 & 4\\ -0.1040 & 0.7727\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x^{(k)}\\ \delta y^{(k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\ 1.6686\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\delta x^{(1)}\\ \delta y^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.2660\\ -2.3300\end{pmatrix}\\ X^{(1)}=\begin{pmatrix}x^{(1)}\\ y^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^{(0)}\\ y^{(0)}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\delta x^{(1)}\\ \delta y^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1.2660\\ -2.3300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.7340\\ 0.3300\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}-7.3400 & -0.6600\\ 0.1856 & 1.0810\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x^{(2)}\\ \delta y^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5848\\ 0.2610\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\delta x^{(1)}\\ \delta y^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.3797\\ 0.3066\end{pmatrix}\\ X^{(2)}=\begin{pmatrix}x^{(1)}\\ y^{(1)}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\delta x^{(2)}\\ \delta y^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.7340\\ 0.3300\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-0.3797\\ 0.3066\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.3543\\ 0.0234\end{pmatrix}\end{cases}$$

A continuación se tabulan los resultados de 8 iteraciones para diferentes valores de partida, representándose su evolución de forma gráfica. Ahora, partiendo de puntos diferentes se puede llegar a raíces diferentes.

Iter	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$X_1^{(0)}$	-2.0000	-0.7340	-0.3543	-0.1786	-0.1061	-0.0958	-0.0987	-0.0980	-0.0982
	-2.0000	0.3300	0.0234	0.1214	0.1840	0.2153	0.2207	0.2192	0.2196
$X_2^{(0)}$	2.0000	0.8751	0.4627	0.2622	0.1697	0.1340	0.1239	0.1217	0.1213
	2.0000	0.3755	0.4809	0.3888	0.3246	0.2907	0.2764	0.2722	0.2713
$X_3^{(0)}$	2.0000	0.6858	0.3697	0.2180	0.1515	0.1284	0.1226	0.1215	0.1213
	-2.0000	0.5710	0.4466	0.3605	0.3088	0.2835	0.2741	0.2717	0.2712
$X_4^{(0)}$	-2.0000	-0.8398	-0.4151	-0.2074	-0.1157	-0.0950	-0.0989	-0.0980	-0.0982
	2.0000	0.1988	-0.0020	0.1017	0.1730	0.2106	0.2212	0.2191	0.2196



Apartado (c) Método de Máximo Descenso

Se define la función $\Psi(X)=\left\|F(X)\right\|_2^2=\sum_{i=1}^{n}\left(f_i(X)\right)^2$, que da lugar al método iterativo

$X^{(k)} = X^{(k-1)} - \alpha n_\Psi\left(X^{(k-1)}\right)$ donde $n_\Psi\left(X^{(k-1)}\right)$ es un vector unitario en la dirección del gradiente en el punto $X^{(k-1)}$, y su valor se obtiene mediante

$$n_\Psi\left(X^{(k-1)}\right) = \frac{\nabla\Psi\left(X^{(k-1)}\right)}{\left\|\nabla\Psi\left(X^{(k-1)}\right)\right\|} = \frac{2J^t\left(X^{(k-1)}\right)F\left(X^{(k-1)}\right)}{\left\|2J^t\left(X^{(k-1)}\right)F\left(X^{(k-1)}\right)\right\|}$$

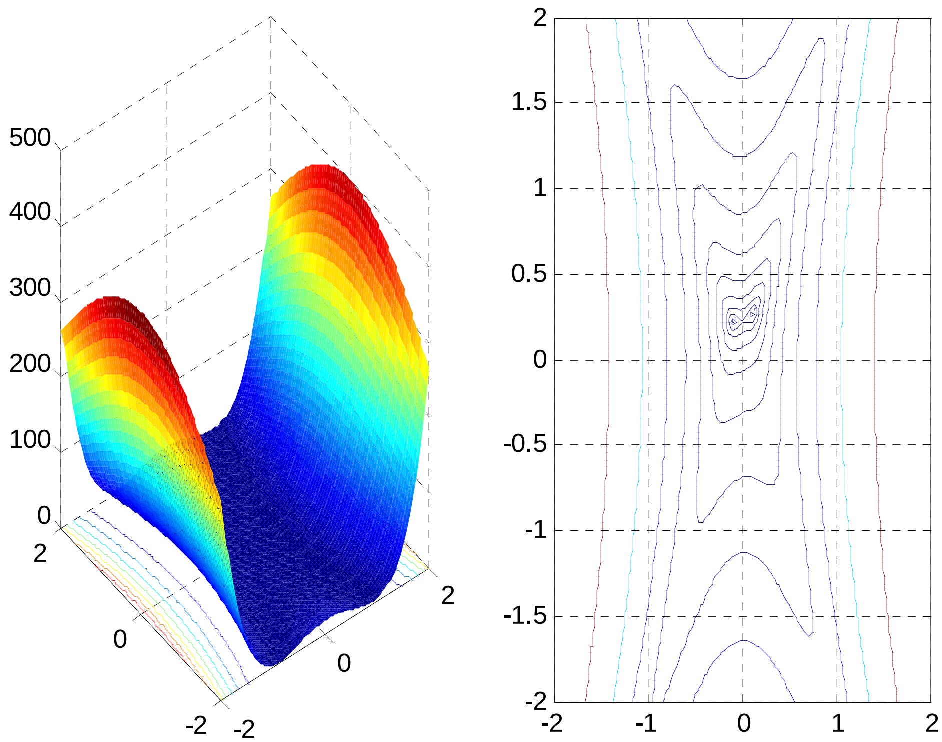
Particularizando,

$$\Psi(X) = \|F(X)\|_2^2 = \left(5x^2 - y^2\right)^2 + \left(y - \tfrac{1}{4}(\sin x + \cos y)\right)^2,$$

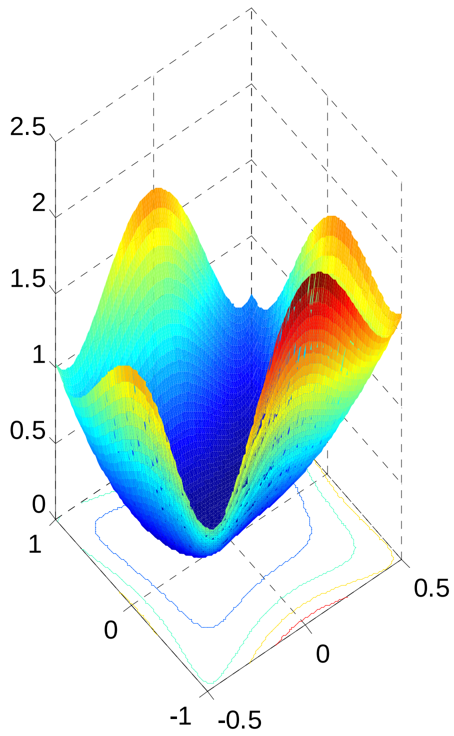
$$\nabla\Psi(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\Psi(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 10x & -\frac{1}{4}\cos x \\ 2y & 1+\frac{1}{4}\sin y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5x^2 - y^2 \\ y - \frac{1}{4}(\sin x + \cos y) \end{pmatrix}, \text{ y}$$

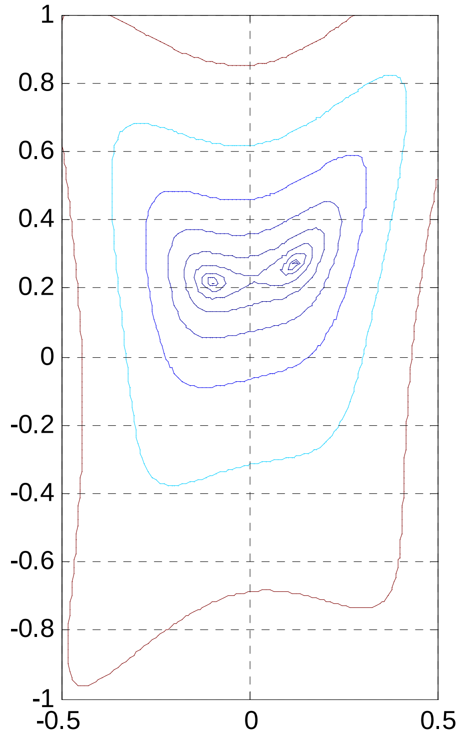
$$\varphi^{(k-1)}(\alpha) = \Psi\left(X^{(k-1)} - \alpha n_\Psi\left(X^{(k-1)}\right)\right)$$

Representando las superficies en el intervalo de estudio



Aumentando el enfoque en la zona en que están las raíces





Se realizan dos iteraciones partiendo del mismo valor inicial que en el apartado anterior

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$2J^t\left(X^{(0)}\right)F\left(X^{(0)}\right) = 2\begin{pmatrix} 10(-2) & -\tfrac{1}{4}\cos(-2) \\ 2(-2) & 1+\tfrac{1}{4}\sin(-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5(-2)^2-(-2)^2 \\ (-2)-\tfrac{1}{4}\left(\sin(-2)+\cos(-2)\right) \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} -20 & -0.1040 \\ -4 & 0.7727 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 1.6686 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -639.6528 \\ 125.4214 \end{pmatrix}$$

$$n_\Psi\left(X^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} -0.9813 \\ 0.1924 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{(0)}(\alpha) = \Psi\left(X^{(0)} - \alpha n_\Psi\left(X^{(0)}\right)\right) = \Psi\left(\begin{pmatrix} -2+0.9813\alpha \\ -2-0.1924\alpha \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(5(-2+0.9813\alpha)^2 - (-2-0.1924\alpha)^2\right)^2 +$$

$$+\left((-2-0.1924\alpha) - \tfrac{1}{4}\left(\sin(-2+0.9813\alpha) + \cos(-2-0.1924\alpha)\right)\right)^2$$

En vez de encontrar el valor de α que hace mínimo a $\varphi^{(0)}(\alpha)$, se busca el óptimo de una parábola que aproxime a $\varphi^{(0)}(\alpha)$. Para ello se eligen tres valores de la siguiente forma:

$$\alpha_0 = 0 \quad \alpha_2 : \varphi^{(0)}(\alpha_2) < \varphi^{(0)}(\alpha_0) \quad \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_2)$$

$\varphi^{(0)}(0) \approx 258.7844 \quad \varphi^{(0)}(1) \approx 3.5093 \quad \varphi^{(0)}(0.5) \approx 51.9138$

Se calcula la parábola mediante $P_2^{(0)}(\alpha) = \gamma_0 + \gamma_1\alpha + \gamma_2\alpha(\alpha - \alpha_1)$ imponiendo que $P_2^{(0)}(\alpha_k) = \varphi^{(0)}(\alpha_k), k = 0,1,2$, y se obtiene el mínimo como $\alpha_{opt} = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)$

$$P_2^{(0)}(\alpha) = 258.7844 - 413.7411\alpha + 316.9320\alpha(\alpha - 0.5)$$

$$\alpha_{opt} = \tfrac{1}{2}\left(\alpha_1 - \tfrac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{-413.7411}{316.9320}\right) = 0.9027 \quad \varphi^{(0)}(\alpha_{opt}) = 5.4623$$

Puesto que $\varphi^{(0)}(\alpha_{opt}) > \varphi^{(0)}(\alpha_2)$, se toma $\alpha_{opt} = \alpha_2$, y por tanto

$$X^{(1)} = X^{(0)} - \alpha_{opt} n_\Psi\left(X^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -0.9813 \\ 0.1924 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.0187 \\ -2.1924 \end{pmatrix}$$

Repetimos el proceso con el nuevo valor

$$2J^t\left(X^{(1)}\right)F\left(X^{(1)}\right) = 2\begin{pmatrix} 10(-1.0187) & -\frac{1}{4}\cos(-1.0187) \\ 2(-2.1924) & 1 + \frac{1}{4}\sin(-2.1924) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5(-1.0187)^2 - (-2.1924)^2 \\ (-2.1924) - \frac{1}{4}\left(\sin(-1.0187) + \cos(-2.1924)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.2623 \\ 0.4269 \end{pmatrix}$$

$$n_\Psi\left(X^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -0.9987 \\ 0.0516 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{(1)}(\alpha) = \Psi\left(X^{(1)} - \alpha n_\Psi\left(X^{(1)}\right)\right) = \Psi\left(\begin{pmatrix} -1.0187 \\ -2.1924 \end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix} -0.9987 \\ 0.0516 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(5(-1.0187 + 0.9987\alpha)^2 - (-2.1924 - 0.0516\alpha)^2\right)^2 +$$

$$+ \left((-2.1924 - 0.0516\alpha) - \tfrac{1}{4}\left(\sin(-1.0187 + 0.9987\alpha) + \cos(-2.1924 - 0.0516\alpha)\right)\right)^2$$

$\varphi^{(1)}(0) \approx 3.5093$

$\alpha_2 = 1 : \varphi^{(1)}(\alpha_2) \approx 29.6765 > \varphi^{(1)}(0) \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_2 \quad$ finalmente $\quad \alpha_2 = 0.0625 : \varphi^{(1)}(\alpha_2) \approx 3.4663 < \varphi^{(0)}$

$\varphi^{(1)}(0.03125) \approx 3.3874$

$$P_2^{(1)}(\alpha) = 3.5093 - 3.9014\alpha + 102.8245\alpha(\alpha - 0.03125)$$

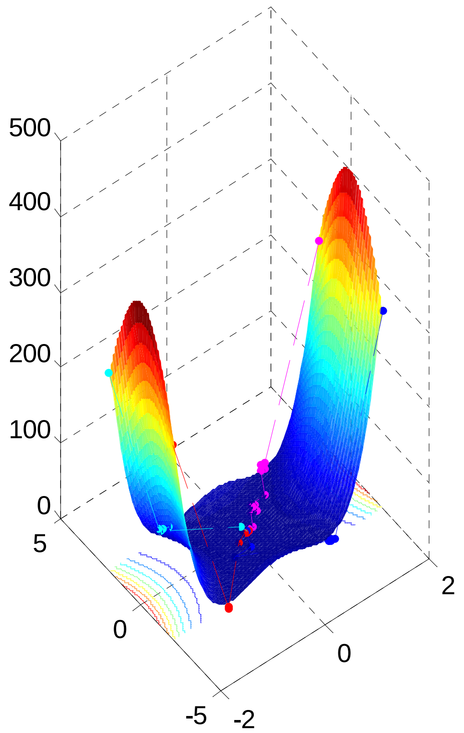
$$\alpha_{opt} = \tfrac{1}{2}\left(0.03125 - \tfrac{-3.9014}{102.8245}\right) = 0.0346 \quad \varphi^{(0)}(\alpha_{opt}) = 3.3866$$

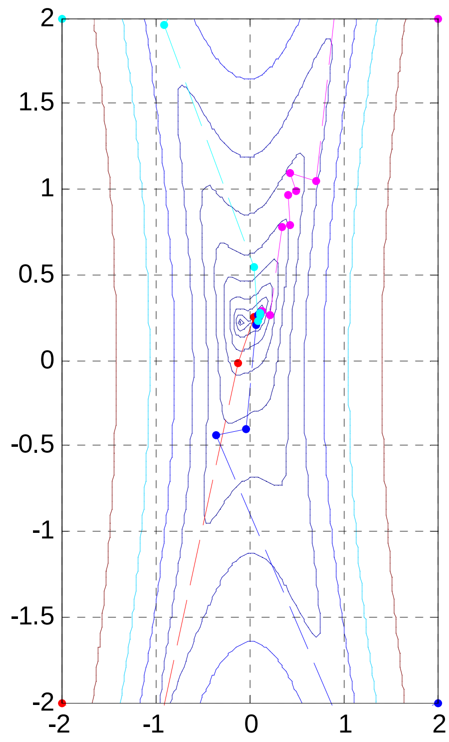
Puesto que $\varphi^{(0)}(\alpha_{opt}) < \varphi^{(0)}(\alpha_2)$, se mantiene el valor, y por tanto

$$X^{(2)} = X^{(1)} - \alpha n_\Psi\left(X^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -1.0187 \\ -2.1924 \end{pmatrix} - 0.0346\begin{pmatrix} -0.9987 \\ 0.0516 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9841 \\ -2.1942 \end{pmatrix}$$

A continuación se tabulan los resultados de 8 iteraciones para diferentes valores de partida, representándose su evolución de forma gráfica. Ahora, partiendo de puntos diferentes se puede llegar a raíces diferentes. También se observa que las iteraciones pueden salir del intervalo inicial.

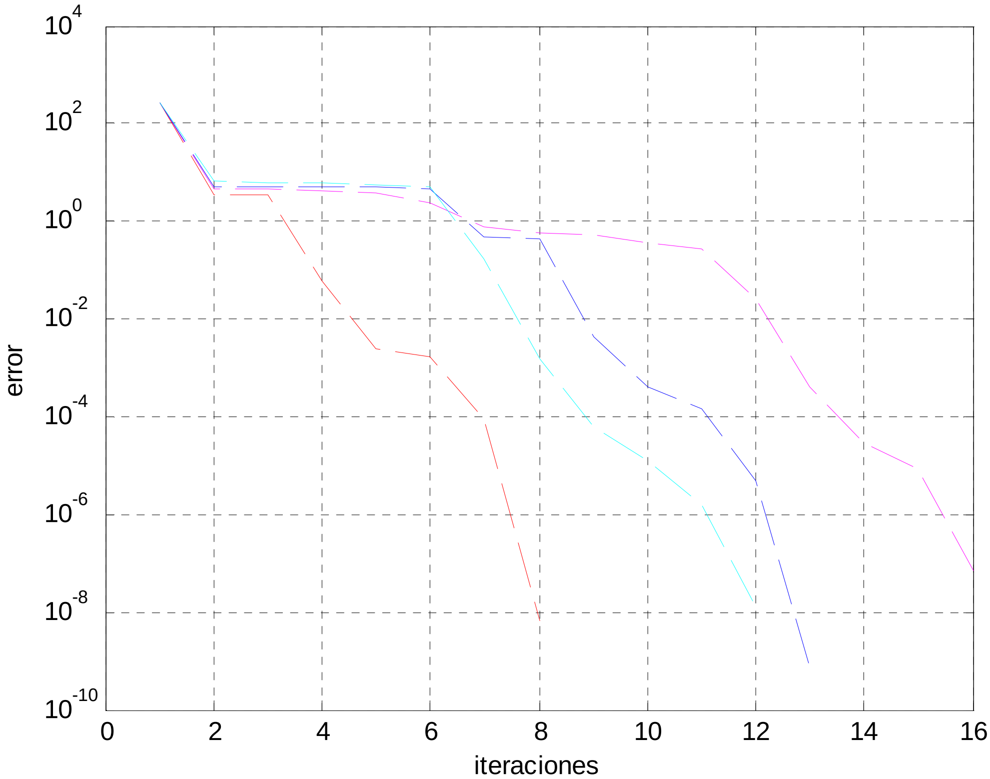
Iter	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$X_1^{(0)}$	-2.0000	-1.0187	-0.9841	-0.1225	0.0494	0.0719	0.1246	0.1212	0.1212
	-2.0000	-2.1924	-2.1942	-0.0157	0.2501	0.2324	0.2659	0.2710	0.2710
$X_2^{(0)}$	2.0000	1.0181	0.9724	0.9693	0.9058	0.7033	0.4428	0.4918	0.4192
	2.0000	2.1894	2.1803	2.0191	2.0207	1.0414	1.0934	0.9938	0.9675
$X_3^{(0)}$	2.0000	1.0184	0.9751	0.9866	0.9376	0.9566	-0.3417	-0.0271	0.0717
	-2.0000	-2.1911	-2.1898	-2.1582	-2.1342	-2.1089	-0.4420	-0.4037	0.1998
$X_4^{(0)}$	-2.0000	-1.0177	-0.9455	-0.9739	-0.8450	-0.8980	0.0559	0.0927	0.1138
	2.0000	2.1875	2.1611	2.1123	2.0159	1.9598	0.5427	0.2294	0.2698





Para cada uno de los puntos de partida anteriores, se muestra la evolución del valor de la función

Iter	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$X_1^{(0)}$	258.7844	3.5093	3.3866	0.0609	0.0026	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000
$X_2^{(0)}$	259.5220	4.6527	4.4816	4.0776	3.7357	2.4952	0.8056	0.5958	0.5274
$X_3^{(0)}$	260.5084	5.2496	5.0718	5.0085	4.8749	4.7910	0.4922	0.4183	0.0042
$X_4^{(0)}$	261.4352	6.6313	6.3053	6.0712	5.5825	5.0996	0.1768	0.0015	0.0001



10^4
10^2
10^0
10^-2
10^-4
10^-6
10^-8
10^-10
error
0
2
4
6
8
10
12
14
16
iteraciones