

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Met. Iterativos: convergencia J y GS	
	Fecha	Diciembre 2000	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Se desea resolver por un método iterativo el sistema lineal $Ax = b$ del que se conocen las siguientes características sobre sus coeficientes:

$$|a_i^i| > \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_i^j|, i = 1, \dots, n \text{ con } \alpha > 1 \qquad 0 < \gamma < |a_i^i|, i = 1, \dots, n \qquad \|b\|_\infty = \beta$$

donde las constantes α , β y γ son conocidas.

- Demostrar que el método de Jacobi es convergente.
- Obtener, dependiendo de α , β y γ , el número de iteraciones necesarias para obtener un error menor que ε partiendo de $x^{(0)} = \mathbf{0}$.
- Realizar 3 iteraciones exactas del método de Jacobi para resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/4 \\ -7/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

Acotar el error cometido utilizando la $\|\cdot\|_1$ y compararlo con el error real sabiendo que $x = (0.5, -0.25, 0.25)$.

- ¿Qué se puede decir en el sistema anterior sobre la convergencia del método de Gauss-Seidel?

Apartado (a) Convergencia del método

Dado un método iterativo de la forma $x^{(k+1)} = Kx^{(k)} + c$, se ha demostrado que el método converge cuando se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $\forall x^{(0)} : \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(k)} = x = A^{-1} \cdot b$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} K^n = \mathbf{0}$
- $\|K\| < 1$ para alguna norma matricial
- $\rho(K) < 1$

Los valores de K y c del método de Jacobi, están dados por $K = D^{-1}(L + U)$ y $c = D^{-1}b$, esto es,

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Met. Iterativos: convergencia J y GS	
	Fecha	Diciembre 2000	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -a_1^2/a_1^1 & -a_1^3/a_1^1 & \dots & -a_1^n/a_1^1 \\ -a_2^1/a_2^2 & 0 & -a_2^3/a_2^2 & \dots & -a_2^n/a_2^2 \\ -a_3^1/a_3^3 & -a_3^2/a_3^3 & 0 & \dots & -a_3^n/a_3^3 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_n^1/a_n^n & -a_n^2/a_n^n & -a_n^3/a_n^n & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ y } c = \begin{pmatrix} b_1/a_1^1 \\ b_2/a_2^2 \\ b_3/a_3^3 \\ \vdots \\ b_n/a_n^n \end{pmatrix}$$

y por tanto $\|K\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j \neq i}^n |a_i^j/a_i^i| < 1/\alpha < 1$, lo que demuestra que el método es convergente.

Apartado (b) Número de iteraciones

Dado un método iterativo para el que $\|K\| < 1$, se tiene la siguiente acotación del error cometido

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|K\|^k}{1 - \|K\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Como $x^{(0)} = \mathbf{0}$, entonces $x^{(1)} = Kx^{(0)} + c = c$ y $\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \|c\|$. Por tanto

$$\|c\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |b_i/a_i^i| \leq \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |b_i|}{\min_{1 \leq i \leq n} |a_i^i|} \leq \frac{\beta}{\gamma}$$

Para garantizar que $\|x - x^{(k)}\| < \varepsilon$ se debe verificar que $\frac{\|K\|^k}{1 - \|K\|} \|c\| < \varepsilon$, esto es

$$\frac{\|K\|^k}{1 - \|K\|} \|c\| < \frac{(\frac{1}{\alpha})^k \beta}{1 - \frac{1}{\alpha} \gamma} = \frac{\beta}{(\alpha - 1)\alpha^{k-1}\gamma} < \varepsilon \rightarrow k > 1 + \frac{\log \frac{\beta}{\varepsilon(\alpha-1)\gamma}}{\log \alpha}$$

Apartado (c) Aplicación

$$\text{Dado el sistema } \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/4 \\ -7/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} \text{ se tiene que } K = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } c = \begin{pmatrix} 9/16 \\ -7/16 \\ 5/16 \end{pmatrix}$$

El cálculo de las sucesivas iteraciones viene dado por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k)} + \begin{pmatrix} 9/16 \\ -7/16 \\ 5/16 \end{pmatrix}$$

Tomando $x^{(0)} = \mathbf{0}$ se van obteniendo

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Met. Iterativos: convergencia J y GS	
	Fecha	Diciembre 2000	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/16 \\ -7/16 \\ 5/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/16 \\ -7/16 \\ 5/16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9/16 \\ -7/16 \\ 5/16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/16 \\ -7/16 \\ 5/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/64 \\ -14/64 \\ 13/64 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29/64 \\ -14/64 \\ 13/64 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/16 \\ -7/16 \\ 5/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65/128 \\ -35/128 \\ 33/128 \end{pmatrix}$$

El error real será por tanto

$$\|x - x^{(3)}\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 65/128 \\ -35/128 \\ 33/128 \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 3/4096 \\ -2/4096 \\ 3/4096 \end{pmatrix} \right\|_1 = |3/4096| + |-2/4096| + |3/4096| = \frac{1}{512} \approx 0.0020$$

Para acotar el error se utiliza la relación $\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|K\|^k}{1 - \|K\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$ donde

$$\|K\|_1 = \|K\|_\infty = \max \{|0| + |1/4| + |0|, |1/4| + |0| + |1/4|, |0| + |1/4| + |0|\} = 1/2$$

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \|c\| = |9/16| + |-7/16| + |5/16| = 21/16$$

y la cota vendrá dada por

$$\|x - x^{(3)}\| \leq \frac{(1/2)^3}{1 - (1/2)} (21/16) = \frac{21}{256} \approx 0.0820$$

cuyo valor es muy superior al error real obtenido.

Puesto que se conoce la solución exacta, también se podría haber utilizado la expresión

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \|K\|^k \|x - x^{(0)}\| \rightarrow \|x - x^{(3)}\|_1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \|x\|_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right|\right) = \frac{1}{16} = 0.0625$$

Apartado (d) Método de Gauss-Seidel

De las condiciones iniciales se observa que la matriz es de diagonal estrictamente dominante, por lo que el método de Gauss-Seidel también será convergente. Es más, puesto que la matriz es tridiagonal, podemos comprobar que $\rho(K_J)^2 = \rho(K_{GS})$.

$$K_J = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow P_\lambda(K_J) = -\lambda^3 + 1/8\lambda \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1/\sqrt{8} \\ \lambda_3 = -1/\sqrt{8} \end{cases} \Rightarrow \rho(K_J) = 1/\sqrt{8}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 4 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Met. Iterativos: convergencia J y GS	
	Fecha	Diciembre 2000	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$K_{GS} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \rightarrow P_{\lambda}(K_{GS}) = -\lambda^3 + \frac{1}{8}\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = \frac{1}{8} \\ \rho(K_{GS}) = \frac{1}{8} \end{cases}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Convergencia GS con matrices DD	
	Fecha	Diciembre 2000	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Demostrar que el método de Gauss-Seidel es convergente cuando la matriz del sistema es de diagonal dominante y hay al menos una fila con diagonal estrictamente dominante.

Apartado (a) Convergencia del método

Se va a demostrar por inducción, suponiendo que la fila con diagonal estrictamente dominante es la primera, a partir de la expresión de la matriz de iteración $B = D^{-1}(L + U)$

$N=2$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \text{ con } \begin{cases} |a_1^1| > |a_1^2| \\ |a_2^2| \geq |a_2^1| \end{cases}$$

$$(D - L)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^1} & 0 \\ \frac{-a_2^1}{a_1^1 a_2^2} & \frac{1}{a_2^2} \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_1^2}{a_1^1} \\ 0 & \frac{-a_1^1 - a_2^1}{a_1^1 a_2^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \|B\|_{\infty} = \max \left\{ \left| \frac{a_1^2}{a_1^1} \right|, \left| \frac{a_1^2}{a_1^1} + \frac{a_2^1}{a_2^2} \right| \right\}$$

puesto que $\left| \frac{a_1^2}{a_1^1} \right| < 1$, también $\left| \frac{a_1^2}{a_1^1} + \frac{a_2^1}{a_2^2} \right| < 1$ y por tanto $\|B\|_{\infty} < 1$ y el método es convergente.

$N=3$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \text{ con } \begin{cases} |a_1^1| > |a_1^2| + |a_1^3| \\ |a_2^2| \geq |a_2^1| + |a_2^3| \\ |a_3^3| \geq |a_3^1| + |a_3^2| \end{cases}$$

$$(D - L)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^1} & 0 & 0 \\ \frac{-a_2^1}{a_1^1 a_2^2} & \frac{1}{a_2^2} & 0 \\ \frac{a_2^1 a_3^2 - a_2^2 a_3^1}{a_1^1 a_2^2 a_3^3} & \frac{-a_3^2}{a_2^2 a_3^3} & \frac{1}{a_3^3} \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_1^2}{a_1^1} & \frac{-a_1^3}{a_1^1} \\ 0 & \frac{a_1^2 a_2^1}{a_1^1 a_2^2} & \frac{a_1^3 a_2^1}{a_1^1 a_2^2} + \frac{-a_2^3}{a_2^2} \\ 0 & \frac{-a_1^2}{a_1^1} \frac{a_2^1 a_3^2 - a_2^2 a_3^1}{a_2^2 a_3^3} & \frac{-a_1^3}{a_1^1} \frac{a_2^1 a_3^2 - a_2^2 a_3^1}{a_2^2 a_3^3} + \frac{a_2^3}{a_2^2} \frac{a_3^2}{a_3^3} \end{pmatrix}$$

Calculando los máximos por filas

$$\left| \frac{-a_1^2}{a_1^1} \right| + \left| \frac{-a_1^3}{a_1^1} \right| \leq \frac{|a_1^2| + |a_1^3|}{|a_1^1|} < 1$$

$$\left| \frac{a_1^2 a_2^1}{a_1^1 a_2^2} \right| + \left| \frac{a_1^3 a_2^1}{a_1^1 a_2^2} + \frac{-a_2^3}{a_2^2} \right| \leq \left| \frac{a_1^2}{a_1^1} \right| \left| \frac{a_2^1}{a_2^2} \right| + \left| \frac{a_1^3}{a_1^1} \right| \left| \frac{a_2^1}{a_2^2} \right| + \left| \frac{a_2^3}{a_2^2} \right| = \left| \frac{a_1^2}{a_2^2} \right| \left(\frac{|a_1^2| + |a_1^3|}{|a_1^1|} \right) + \left| \frac{a_2^3}{a_2^2} \right| < \frac{|a_2^1| + |a_2^3|}{|a_2^2|} \leq 1$$

$$\left| \frac{-a_1^2}{a_1^1} \frac{a_2^1 a_3^2 - a_2^2 a_3^1}{a_2^2 a_3^3} \right| + \left| \frac{-a_1^3}{a_1^1} \frac{a_2^1 a_3^2 - a_2^2 a_3^1}{a_2^2 a_3^3} + \frac{a_2^3}{a_2^2} \frac{a_3^2}{a_3^3} \right| \leq \frac{|a_1^2| + |a_1^3|}{|a_1^1|} \left| \frac{a_2^1 a_3^2 - a_2^2 a_3^1}{a_2^2 a_3^3} \right| + \left| \frac{a_2^3}{a_2^2} \right| \left| \frac{a_3^2}{a_3^3} \right| < \left| \frac{a_2^1}{a_2^2} \right| \frac{|a_1^2| + |a_1^3|}{|a_1^1|} + \left| \frac{a_3^1}{a_3^3} \right| \leq \left| \frac{a_2^1}{a_2^2} \right| + \left| \frac{a_3^1}{a_3^3} \right| \leq 1$$

se llega a que $\|B\|_{\infty} < 1$ y el método es convergente.

$N=4$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Convergencia GS con matrices DD	
	Fecha	Diciembre 2000	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} |a_1^1| > |a_1^2| + |a_1^3| + |a_1^4| \\ |a_2^2| \geq |a_2^1| + |a_2^3| + |a_2^4| \\ |a_3^3| \geq |a_3^1| + |a_3^2| + |a_3^4| \\ |a_4^4| \geq |a_4^1| + |a_4^2| + |a_4^3| \end{cases}$$

$$(D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-a_2^1}{a_1^1 a_2^2} & \frac{1}{a_2^2} & 0 & 0 \\ \frac{a_2^1 a_3^2 - a_2^2 a_3^1}{a_1^1 a_2^2 a_3^3} & \frac{-a_3^2}{a_2^2 a_3^3} & \frac{1}{a_3^3} & 0 \\ -\frac{a_2^1 a_3^3 a_4^1 - a_2^1 a_3^3 a_4^2 - a_2^2 a_3^3 a_4^3 + a_2^2 a_3^3 a_4^4}{a_1^1 a_2^2 a_3^3 a_4^4} & \frac{a_3^2 a_4^3 - a_3^3 a_4^2}{a_2^2 a_3^3 a_4^4} & \frac{-a_4^3}{a_3^3 a_4^4} & \frac{1}{a_4^4} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_1^2}{a_1^1} & \frac{-a_1^3}{a_1^1} & \frac{-a_1^4}{a_1^1} \\ 0 & \frac{a_1^2}{a_1^1} \frac{a_2^1}{a_2^2} & \frac{a_1^3}{a_1^1} \frac{a_2^1}{a_2^2} - \frac{a_2^3}{a_2^2} & \frac{a_1^4}{a_1^1} \frac{a_2^1}{a_2^2} - \frac{a_2^4}{a_2^2} \\ 0 & \frac{-a_1^2}{a_1^1} \xi_1^3 & \frac{-a_1^3}{a_1^1} \xi_1^3 + \frac{a_2^3}{a_2^2} \frac{a_3^2}{a_3^3} & \frac{-a_1^4}{a_1^1} \xi_1^3 + \frac{a_2^4}{a_2^2} \frac{a_3^2}{a_3^3} - \frac{a_3^4}{a_3^3} \\ 0 & \frac{a_1^2}{a_1^1} \xi_1^4 & \frac{a_1^3}{a_1^1} \xi_1^4 - \frac{a_2^3}{a_2^2} \xi_2^4 & \frac{a_1^4}{a_1^1} \xi_1^4 - \frac{a_2^4}{a_2^2} \xi_2^4 + \frac{a_3^4}{a_3^3} \frac{a_4^3}{a_4^4} \end{pmatrix}$$

donde $\xi_1^3 = \frac{a_2^1}{a_2^2} \frac{a_3^2}{a_3^3} - \frac{a_3^1}{a_3^3}$, $\xi_2^4 = \frac{a_3^2}{a_3^3} \frac{a_4^3}{a_4^4} - \frac{a_4^2}{a_4^4}$ y $\xi_1^4 = \frac{a_2^1}{a_2^2} \frac{a_3^2}{a_3^3} \frac{a_4^3}{a_4^4} - \frac{a_2^1}{a_2^2} \frac{a_4^3}{a_4^4} - \frac{a_3^1}{a_3^3} \frac{a_4^3}{a_4^4} + \frac{a_4^1}{a_4^4}$

Comenzamos calculando

$$|\xi_1^3| = \left| \frac{-a_3^1}{a_3^3} + \frac{a_2^1}{a_2^2} \frac{a_3^2}{a_3^3} \right| \leq \left| \frac{a_3^1}{a_3^3} \right| + \left| \frac{a_2^1}{a_2^2} \right| \left| \frac{a_3^2}{a_3^3} \right|$$

$$|\xi_2^4| = \left| \frac{-a_4^2}{a_4^4} + \frac{a_3^2}{a_3^3} \frac{a_4^3}{a_4^4} \right| \leq \left| \frac{a_4^2}{a_4^4} \right| + \left| \frac{a_3^2}{a_3^3} \right| \left| \frac{a_4^3}{a_4^4} \right|$$

$$|\xi_1^4| = \left| \frac{a_2^1}{a_2^2} + \frac{-a_4^2}{a_4^4} \frac{a_2^1}{a_2^2} + \frac{a_3^2}{a_3^3} \left(\frac{a_2^1}{a_2^2} + \frac{-a_3^2}{a_3^3} \frac{a_2^1}{a_2^2} \right) \right| \leq \left| \frac{a_2^1}{a_2^2} \right| + \left| \frac{a_4^2}{a_4^4} \right| \left| \frac{a_2^1}{a_2^2} \right| + \left| \frac{a_3^2}{a_3^3} \right| |\xi_1^3|$$

Y usamos el resultado para obtener los máximos por filas

$$\left| \frac{-a_1^2}{a_1^1} \right| + \left| \frac{-a_1^3}{a_1^1} \right| + \left| \frac{-a_1^4}{a_1^1} \right| \leq \frac{|a_1^2| + |a_1^3| + |a_1^4|}{|a_1^1|} < 1$$

$$\left| \frac{a_1^2 a_2^1}{a_1^1 a_2^2} \right| + \left| \frac{a_1^3 a_2^1}{a_1^1 a_2^2} - \frac{a_2^3}{a_2^2} \right| + \left| \frac{a_1^4 a_2^1}{a_1^1 a_2^2} - \frac{a_2^4}{a_2^2} \right| \leq \left| \frac{a_2^1}{a_2^2} \right| \frac{|a_1^2| + |a_1^3| + |a_1^4|}{|a_1^1|} + \left| \frac{a_2^3}{a_2^2} \right| + \left| \frac{a_2^4}{a_2^2} \right| < \frac{|a_2^1| + |a_2^3| + |a_2^4|}{|a_2^2|} \leq 1$$

$$\left| \frac{-a_1^2}{a_1^1} \xi_1^3 \right| + \left| \frac{-a_1^3}{a_1^1} \xi_1^3 + \frac{a_2^3}{a_2^2} \frac{a_3^2}{a_3^3} \right| + \left| \frac{-a_1^4}{a_1^1} \xi_1^3 + \frac{a_2^4}{a_2^2} \frac{a_3^2}{a_3^3} - \frac{a_3^4}{a_3^3} \right| \leq |\xi_1^3| \frac{|a_1^2| + |a_1^3| + |a_1^4|}{|a_1^1|} + \left| \frac{a_2^3}{a_2^2} \frac{a_3^2}{a_3^3} \right| + \left| \frac{a_2^4}{a_2^2} \frac{a_3^2}{a_3^3} \right| + \left| \frac{a_3^4}{a_3^3} \right| <$$

$$< \left| \xi_1^3 \right| + \left| \frac{a_2^3}{a_2^2} \frac{a_3^2}{a_3^3} \right| + \left| \frac{a_2^4}{a_2^2} \frac{a_3^2}{a_3^3} \right| + \left| \frac{a_3^4}{a_3^3} \right| \leq \left| \frac{a_1^1}{a_3^3} \right| + \left| \frac{a_2^2}{a_3^3} \right| \frac{|a_2^1| + |a_2^3| + |a_2^4|}{|a_2^2|} + \left| \frac{a_3^4}{a_3^3} \right| \leq \frac{|a_2^1| + |a_2^3| + |a_2^4|}{|a_3^3|} \leq 1$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Convergencia GS con matrices DD	
	Fecha	Diciembre 2000	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{a_1^2}{a_1^1} \xi_1^4 \right| + \left| \frac{a_1^3}{a_1^1} \xi_1^4 - \frac{a_2^3}{a_2^2} \xi_2^4 \right| + \left| \frac{a_1^4}{a_1^1} \xi_1^4 - \frac{a_2^4}{a_2^2} \xi_2^4 + \frac{a_3^4}{a_3^3} \frac{a_4^3}{a_4^4} \right| \leq \left| \xi_1^4 \right| \frac{|a_1^2| + |a_1^3| + |a_1^4|}{|a_1^1|} + \left| \xi_2^4 \right| \frac{|a_2^3| + |a_2^4|}{|a_2^2|} + \left| \frac{a_3^4}{a_3^3} \frac{a_4^3}{a_4^4} \right| < \\
& < \left| \xi_1^4 \right| + \left| \xi_2^4 \right| \frac{|a_2^3| + |a_2^4|}{|a_2^2|} + \left| \frac{a_3^4}{a_3^3} \frac{a_4^3}{a_4^4} \right| \leq \left| \frac{a_1^1}{a_4^4} \right| + \left| \frac{a_2^2}{a_4^4} \right| \left| \frac{a_2^1}{a_2^2} \right| + \left| \frac{a_4^3}{a_4^4} \right| \left(\left| \frac{a_3^1}{a_3^3} \right| + \left| \frac{a_3^2}{a_3^3} \right| \left| \frac{a_2^1}{a_2^2} \right| \right) + \left(\left| \frac{a_4^2}{a_4^4} \right| + \left| \frac{a_4^3}{a_4^4} \right| \left| \frac{a_3^2}{a_3^3} \right| \right) \frac{|a_2^3| + |a_2^4|}{|a_2^2|} + \left| \frac{a_3^4}{a_3^3} \frac{a_4^3}{a_4^4} \right| \leq \\
& \leq \left| \frac{a_1^1}{a_4^4} \right| + \left| \frac{a_2^2}{a_4^4} \right| \frac{|a_2^1| + |a_2^3| + |a_2^4|}{|a_2^2|} + \left| \frac{a_4^3}{a_4^4} \right| \left(\left| \frac{a_3^1}{a_3^3} \right| + \left| \frac{a_3^2}{a_3^3} \right| \frac{|a_2^1| + |a_2^3| + |a_2^4|}{|a_2^2|} + \left| \frac{a_3^4}{a_3^3} \right| \right) \leq \left| \frac{a_1^1}{a_4^4} \right| + \left| \frac{a_2^2}{a_4^4} \right| + \left| \frac{a_4^3}{a_4^4} \right| \frac{|a_3^1| + |a_3^2| + |a_3^4|}{|a_3^3|} \leq \frac{|a_1^1| + |a_2^2| + |a_4^3|}{|a_4^4|} \leq 1
\end{aligned}$$

se llega a que $\|B\|_\infty < 1$ y el método es convergente.

Falta demostrar la inducción (supuesto n verificar para n+1)

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Ejemplo 3x3 Jacobi y Gauss Seidel	
	Fecha	Febrero 2002	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Dado el sistema lineal $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = b$

- Calcular la matriz de iteración de Jacobi y su radio espectral. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0.001 utilizando la norma 1 o infinito?
- Calcular la matriz de iteración de Gauss y su radio espectral. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0.001 utilizando la norma 1 o infinito?
- Seleccionar justificadamente el método iterativo más adecuado. Obtener el vector c del método iterativo seleccionado de forma que la solución sea el vector $(1,1,1)^T$.
- Definir el condicionamiento de un sistema lineal y su interpretación.

Apartado (a) Método de Jacobi

A partir de la descomposición $A = D - L - U$, donde

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, L = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } U = -\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene la matriz de iteración de Jacobi como

$$K_J = D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico se obtiene haciendo

$$P_J(x) = |K_J - xI| = x^3$$

Por tanto tiene un valor propio nulo único de multiplicidad tres y su radio espectral es menor que 1, lo que implica que el método de Jacobi es convergente.

Calculando las normas de la matriz de iteración,

$$\|K_J\|_1 = \max\{|0| + |-1| + |-2|, |-2| + |0| + |-2|, |2| + |-1| + |0|\} = 4$$

$$\|K_J\|_\infty = \max\{|0| + |-2| + |2|, |-1| + |0| + |-1|, |-2| + |-2| + |0|\} = 4$$

Puesto que ambas son mayores que la unidad, no es posible aplicar la relación

$$\|x - x^{(n)}\| \leq \frac{\|K\|^n}{1 - \|K\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| < \varepsilon$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Ejemplo 3x3 Jacobi y Gauss Seidel	
	Fecha	Febrero 2002	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Sin embargo, aplicando el teorema de Cayley-Hamilton, se llega a que $P_J(K_J) = (K_J)^3 = 0$. Utilizando entonces la relación $\|x - x^{(n)}\| \leq \|K^n\| \|x - x^{(0)}\|$ se observa que la solución exacta se obtiene en tres iteraciones.

Apartado (b) Método de Gauss-Seidel

La matriz de iteración de Gauss-Seidel se obtiene como

$$K_G = (D - L)^{-1}U = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico se obtiene haciendo

$$P_G(x) = |K_G - xI| = x(x-2)^2$$

Por tanto sus valores propios son 0 y 2, con multiplicidades respectivas de 1 y 2. El radio espectral de la matriz es 2 y el método de Gauss-Seidel es divergente. No tiene sentido hablar de número de iteraciones.

Apartado (c) Selección del método

A la vista de los radios espectrales, se selecciona el método de Jacobi, que converge y da la solución exacta en tres iteraciones. El de Gauss Seidel queda descartado al no ser convergente.

Para obtener el vector c tenemos dos alternativas

1. Obtención de c mediante el cálculo previo del vector b

$$b = Ax = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow c = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Obtención directa de c mediante la fórmula del método iterativo

$$x = K_J x + c \rightarrow c = (I - K_J)x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Apartado (d) Condicionamiento

Dado un sistema $Ax = b$ se define el condicionamiento de la matriz del sistema, según la norma p , al valor $cond(A, p) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$. El condicionamiento de un sistema mide la sensibilidad de la solución del sistema a las variaciones de los coeficientes del sistema o del segundo miembro. Así, cuando el condicionamiento es “bajo”, pequeñas variaciones de los coeficientes pueden producir pequeñas modificaciones de la solución. Por el contrario, pequeñas variaciones de los coeficientes pueden originar cambios muy importantes de la solución cuando el

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Ejemplo 3x3 Jacobi y Gauss Seidel	
	Fecha	Febrero 2002	
	Autor	César Menéndez Fernández	

condicionamiento es “alto”. En los sistemas con éste tipo de condicionamiento, el residual, definido como $r = b - Ax$ no es un buen indicador de la calidad de la raíz.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Tridiagonal con Factorización y Jacobi	
	Fecha	Junio 2002	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & 1 & & \\ & 1 & a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & a & 1 \\ & & & & 1 & a \end{pmatrix}$

- Demostrar por inducción que todos los determinantes principales son positivos cuando $a > 2$, y por tanto, aplicando criterio de Sylvester, la matriz es definida positiva.
- Dadas las características de la matriz, seleccionar justificadamente el método de factorización más adecuado. Aplicarlo cuando $\mathbf{A} \in M_{3 \times 3}$.
- Obtener la matriz de iteración de Jacobi. Demostrar que el método converge cuando $a > 2$, ¿Cómo sería el método cuando $a = 7/4$ y $\mathbf{A} \in M_{3 \times 3}$?

Apartado (a) Matriz definida positiva

El menor principal de orden n de la matriz $\mathbf{A}$ viene dado por

$$\mathbf{A}_n = \begin{vmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & 1 & & \\ & 1 & a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & a & 1 \\ & & & & 1 & a \end{vmatrix} = a\mathbf{A}_{n-1} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & a & 1 & & \\ & 1 & a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & a & 1 \\ & & & & 1 & a \end{vmatrix} = a\mathbf{A}_{n-1} - \mathbf{A}_{n-2}$$

Vamos a demostrar por inducción que $\mathbf{A}_{j+1} > \mathbf{A}_j > 0 \forall a > 2$

$$\mathbf{A}_1 = |a| = a > 2$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a\mathbf{A}_1 - 1 = a^2 - 1 > 3 \text{ y } \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 = a(a-1) - 1 > a-1 > 1$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & \\ 1 & a & 1 \\ & 1 & a \end{vmatrix} = a\mathbf{A}_2 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 = a(a^2 - 2) > 4 \text{ y } \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2(a-1) - a > 1$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{vmatrix} a & 1 & & \\ 1 & a & 1 & \\ & 1 & a & 1 \\ & & 1 & a \end{vmatrix} = a\mathbf{A}_3 - \begin{vmatrix} 1 & & \\ 1 & a & 1 \\ & 1 & a \end{vmatrix} = a\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_2 > 5 \text{ y } \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_3(a-1) - \mathbf{A}_2 > 1$$

	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Tridiagonal con Factorización y Jacobi	
	Fecha	Junio 2002	
	Autor	César Menéndez Fernández	

y en general

$$\mathbf{A}_n = a\mathbf{A}_{n-1} - \mathbf{A}_{n-2} > 2\mathbf{A}_{n-1} - \mathbf{A}_{n-2} = \mathbf{A}_{n-1} + (\mathbf{A}_{n-1} - \mathbf{A}_{n-2}) > \mathbf{A}_{n-1} > 0$$

Apartado (b) Selección del método de factorización

Puesto que la matriz es definida positiva, el método de factorización más adecuado es el de Choleski. Aplicamos este método a una matriz de orden 3.

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & \\ 1 & a & 1 \\ & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^1 & & \\ l_2^1 & l_2^2 & \\ l_3^1 & l_3^2 & l_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1^1 & l_2^1 & l_3^1 \\ l_2^2 & l_3^2 & \\ l_3^3 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (l_1^1)^2 & l_1^1 l_2^1 & l_1^1 l_3^1 \\ l_1^1 l_2^1 & (l_2^1)^2 + (l_2^2)^2 & l_2^1 l_3^1 + l_2^2 l_3^2 \\ l_1^1 l_3^1 & l_2^1 l_3^1 + l_2^2 l_3^2 & (l_3^1)^2 + (l_3^2)^2 + (l_3^3)^2 \end{pmatrix}$$

Planteando el sistema y despejando

$$\begin{cases} a = (l_1^1)^2 & l_1^1 = \sqrt{a} \\ 1 = l_1^1 l_2^1 & l_2^1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \\ 0 = l_1^1 l_3^1 & l_3^1 = 0 \\ a = (l_2^1)^2 + (l_2^2)^2 & l_2^2 = \sqrt{a - \frac{1}{a}} \\ 1 = l_2^1 l_3^1 + l_2^2 l_3^2 & l_3^2 = \frac{1}{\sqrt{a - \frac{1}{a}}} \\ a = (l_3^1)^2 + (l_3^2)^2 + (l_3^3)^2 & l_3^3 = \sqrt{a - \frac{1}{a - \frac{1}{a}}} \end{cases} \rightarrow \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & & \\ \frac{1}{\sqrt{a}} & \sqrt{a - \frac{1}{a}} & \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a - \frac{1}{a}}} & \sqrt{a - \frac{1}{a - \frac{1}{a}}} \end{pmatrix}$$

Apartado (c) Matriz de iteración de Jacobi

Dado un método iterativo de la forma $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{K}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$, se ha demostrado que el método converge cuando se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $\forall \mathbf{x}^{(0)} : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}^n = \mathbf{0}$
- $\|\mathbf{K}\| < 1$ para alguna norma matricial
- $\rho(\mathbf{K}) < 1$

El valor de la matriz $\mathbf{K}$ de iteración del método de Jacobi se expresa como $\mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} & & & \\ -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} & & \\ & -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ & & & & -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \text{ y por tanto } \|\mathbf{K}\|_{\infty} = \frac{1}{a} < 1 \text{ y el método converge para } a > 2.$$

Cuando $a = 7/4$, se tiene que $\|\mathbf{K}\|_{\infty} = 4/7 > 1$, lo que NO permite asegurar su convergencia, pero

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Tridiagonal con Factorización y Jacobi	
	Fecha	Junio 2002	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{7} & \\ -\frac{4}{7} & 0 & -\frac{4}{7} \\ & -\frac{4}{7} & 0 \end{pmatrix} \text{ y } P_K(x) = \begin{vmatrix} -x & -\frac{4}{7} \\ -\frac{4}{7} & -x & -\frac{4}{7} \\ & -\frac{4}{7} & -x \end{vmatrix} = -x^3 + x\frac{32}{49}. \text{ Por tanto } \sigma(K) = \left\{0, \pm\sqrt{\frac{32}{49}}\right\} \text{ y } \rho(K) = \sqrt{\frac{32}{49}} < 1, \text{ así pues el método es convergente.}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Ejemplo 3x3 Jacobi y Gauss Seidel	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1. Dado el sistema lineal $\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ b & b & a \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(b-a) \\ a-b \end{pmatrix}$

- ¿Qué relación debe haber entre a y b para que el sistema admita solución única?
- Calcular las matrices de iteración de Jacobi y de Gauss Seidel.
- Determinar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel cuando se toma $a = \frac{1}{2}$ y $b = -1$. Obtener asimismo su radio espectral.
- En caso de converger el método de Jacobi con $a = \frac{1}{2}$ y $b = -1$, ¿cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0.001 utilizando la norma 1? ¿y la infinito?
- En caso de converger el método de Gauss-Seidel con $a = \frac{1}{2}$ y $b = -1$, ¿cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0.001 utilizando la norma 1? ¿y la infinito?

Apartado (a) Relación entre a y b

Para que la solución sea única, el sistema debe ser regular, esto es, $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a-b & a-b \\ b & 0 & a-b \end{vmatrix} = a(a-b)^2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq b \end{cases}$$

Apartado (b) Matrices de iteración de Jacobi y Gauss-Seidel

A partir de la descomposición $A = D - L - U$, donde

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ -b & -b & 0 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene la matriz de iteración de Jacobi como

$$K_J = D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -\frac{b}{a} & 0 & -1 \\ -\frac{b}{a} & -\frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Ejemplo 3x3 Jacobi y Gauss Seidel	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

De forma análoga, la matriz de iteración de Gauss-Seidel viene dada por

$$\mathbf{K}_G = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ b & b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -b/a^2 & 1/a & 0 \\ b(b-a)/a^3 & -b/a^2 & 1/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & b/a & (b-a)/a \\ 0 & -b(b-a)/a^2 & -b(b-2a)/a^2 \end{pmatrix}$$

Apartado (c) Convergencia de Jacobi y Gauss-Seidel con $a = \frac{1}{2}$ y $b = -1$

Sustituyendo por los valores dados, se tiene

$$\mathbf{K}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -\frac{b}{a} & 0 & -1 \\ -\frac{b}{a} & -\frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix} \underset{a=\frac{1}{2}, b=-1}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & b/a & (b-a)/a \\ 0 & -b(b-a)/a^2 & -b(b-2a)/a^2 \end{pmatrix} \underset{a=\frac{1}{2}, b=-1}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Comenzamos comprobando si las normas más sencillas de las matrices de iteración son inferiores a uno. Empezamos con la norma 1:

$$|\mathbf{K}_J|_1 = \{|0| + |2| + |2|, |-1| + |0| + |2|, |-1| + |-1| + |0|\} = \max\{4, 3, 2\} = 4$$

$$|\mathbf{K}_G|_1 = \{|0| + |0| + |0|, |-1| + |-2| + |-6|, |-1| + |-3| + |-8|\} = \max\{0, 9, 12\} = 12$$

Como se puede ver la norma 1 es mayor que la unidad en ambos casos. Probamos con la norma infinito

$$|\mathbf{K}_J|_\infty = \{|0| + |-1| + |-1|, |2| + |0| + |-1|, |2| + |2| + |0|\} = \max\{2, 3, 4\} = 4$$

$$|\mathbf{K}_G|_\infty = \{|0| + |-1| + |-1|, |0| + |-2| + |-3|, |0| + |-6| + |-8|\} = \max\{2, 5, 14\} = 14$$

Puesto que ninguna permite asegurar la convergencia, necesitamos calcular el radio espectral, para lo cual comenzamos obteniendo el polinomio característico:

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Ejemplo 3x3 Jacobi y Gauss Seidel	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$P_J(x) = |K_J - xI| = x^3 + 6x + 2 \quad \rightarrow \sigma_J = \left\{ \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}, \frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) \mp i \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}) \right\} \approx \\ = \{-0.3275, 0.1637 \mp i2.4659\}$$

$$P_G(x) = |K_G - xI| = x^3 + 10x^2 - 2x \quad \rightarrow \sigma_J = \{0, 5 \pm 3\sqrt{3}\} \approx \{0, 0.1962, -10.1962\}$$

Se puede observar que en ambos casos el radio espectral es mayor que uno, y por tanto los métodos no convergen.

Apartado (d) Número de iteraciones de Jacobi

El método de Jacobi es divergente. No tiene sentido hablar de número de iteraciones.

Apartado (e) Número de iteraciones de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel es divergente. No tiene sentido hablar de número de iteraciones.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Ejemplo 2x2 Comparación Iterativos	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Dado el sistema lineal $Ax=b$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- (a) Seleccionar el método iterativo más adecuado
- (b) Calcular el número de iteraciones para lograr un error (respecto a $\|\cdot\|_\infty$) menor que 10^{-5} , partiendo del vector nulo.

Apartado (a) Caracterización de A:

La matriz del sistema es simétrica y definida positiva. Esto se puede ver mediante su polinomio característico:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^2 - 6\lambda + 8; \sigma(A) = \{2, 4\}$$

o bien considerando que es de diagonal dominante. Puesto que la matriz es simétrica, definida positiva y de diagonal dominante, todos los métodos iterativos estudiados van a converger.

Consideremos cada uno de ellos:

JACOBI

$$K_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}; \sigma(K_J) = \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}; \|K_J\|_\infty = \frac{1}{3}$$

GAUSS-SEIDEL

$$K_G = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}; \sigma(K_G) = \{0, \frac{1}{9}\}; \|K_G\|_\infty = \frac{1}{3}$$

Nota: este cálculo es innecesario, pues al ser la matriz tridiagonal y definida positiva, sabemos que $\rho(K_J)^2 = \rho(K_G)$

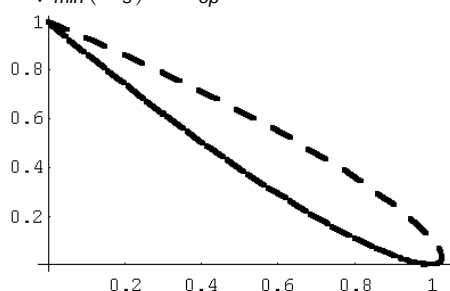
S.O.R.

$$K_S = \left(\frac{D}{\omega} - L\right)^{-1} \left(\frac{(1-\omega)}{\omega} D + U\right) = (D + \omega L)^{-1} ((1-\omega)D + \omega U) = \begin{pmatrix} 1-\omega & -\omega/3 \\ -(1-\omega)\omega/3 & 1-\omega + \omega^2/9 \end{pmatrix}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Ejemplo 2x2 Comparación Iterativos	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Puesto que la matriz es tridiagonal y definida positiva, se tiene que el valor óptimo del parámetro de relajación viene dado por $\omega_{op} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(K_j)^2}} = 18 - 12\sqrt{2}$, y el radio espectral por

$\rho_{min}(K_s) = \omega_{op} - 1$. O bien, se calculan los valores propios de la matriz y se busca el valor para el cual el radio espectral es mínimo.



$$\sigma(K_s) = \left\{ 1 - x + \frac{x^2}{18} \pm \frac{\sqrt{x^2(x^2 - 36x + 36)}}{18} \right\}$$

Sustituyendo este valor, se llega a

$$K_s = \begin{pmatrix} 17 - 12\sqrt{2} & -6 + 4\sqrt{2} \\ 198 - 140\sqrt{2} & 51 - 36\sqrt{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,02943 & -0,34314 \\ 0,01010 & 0,08831 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(K_s) = \{17 - 12\sqrt{2}, 17 - 12\sqrt{2}\} \approx \{0,02944, 0,02944\}; \|K_s\|_1 = 0,372583$$

El método más adecuado será pues el de relajación para el valor dado de ρ o, en su defecto, el de Gauss-Seidel. Realizamos algunas iteraciones con los tres métodos.

Iteración	Jacobi	Gauss-Seidel	S.O.R. óptimo
0	(0; 0)	(0; 0)	(0; 0)
1	(0,666667; -0,666667)	(0,666667; -0,888889)	(0,686292; -0,92179)
2	(0,888889; -0,888889)	(0,962963; -0,987654)	(0,982397; -0,996262)
3	(0,962963; -0,962963)	(0,995885; -0,998628)	(0,999235; -0,999848)
4	(0,987654; -0,987654)	(0,999543; -0,999848)	(0,99997; -0,999994)
5	(0,995885; -0,995885)	(0,999949; -0,999983)	(0,999999; -1,00000)
6	(0,998628; -0,998628)	(0,999994; -0,999998)	
7	(0,999543; -0,999543)		
8	(0,999848; -0,999848)		
9	(0,999949; -0,999949)		
10	(0,999983; -0,999983)		
11	(0,999994; -0,999994)		

Apartado (b) Número de Iteraciones:

El número máximo de iteraciones necesarias para que el error sea menor que un ε dado se calcula como:

$$\|x - x^n\| \leq \frac{\|K\|^n}{1 - \|K\|} \|x^1 - x^0\| \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{L \frac{(1 - \|K\|)\varepsilon}{\|x^1 - x^0\|}}{L\|K\|}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 3
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Ejemplo 2x2 Comparación Iterativos	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

de donde, $n_j \geq \frac{L \frac{(1 - \frac{1}{3})10^{-5}}{\frac{2}{3}}}{L(\frac{1}{3})} = 10,4,$ $n_G \geq \frac{L \frac{(1 - \frac{1}{3})10^{-5}}{\frac{8}{9}}}{L(\frac{1}{3})} = 10,7$ y

$$n_G \geq \frac{L \frac{(1 - 0,3725)10^{-5}}{0,9217}}{L(0,3725)} = 12,05.$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 5
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Iterativo 3x3 parametros J y GS	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Dado el sistema lineal $Ax=b$,

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 0 \\ -a+b \end{pmatrix}$$

- (a) Calcular la matriz de iteración del método de Jacobi y determinar su polinomio característico, determinando a partir de él los valores propios. ¿Qué relación debe existir entre los coeficientes a y b para que el método iterativo de Jacobi sea convergente?.
- (b) Tomando $a=3$, $b=1$, calcular las matrices de iteración de Jacobi y Gauss Seidel. ¿Cuál de los dos métodos converge más rápido? Determinar una cota del número de iteraciones necesarias en cada método para que, partiendo del vector nulo, se asegure que el error es menor que una milésima medido con la $\|\cdot\|_\infty$.
- (c) Tomando $a=3$, $b=2$, calcular las matrices de iteración de Jacobi y Gauss Seidel. ¿cuál de los dos métodos converge más rápido?. Determinar una cota del número de iteraciones necesarias en cada método para que, partiendo del vector nulo, se asegure que el error es menor que una milésima medido con la $\|\cdot\|_\infty$.

Apartado (a) Matriz de Jacobi

La matriz de iteración del método de Jacobi viene dada por

$$K_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -b/a & -b/a \\ -b/a & 0 & -b/a \\ -b/a & -b/a & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando su polinomio característico se tiene $P_J(x) = |K_J - xI| = -x^3 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^2 x - 2\left(\frac{b}{a}\right)^3$.

Aplicando rufini, se tiene

	-1	0	$3\left(\frac{b}{a}\right)^2$	$-2\left(\frac{b}{a}\right)^3$
$\frac{b}{a}$		$-\frac{b}{a}$	$-\left(\frac{b}{a}\right)^2$	$2\left(\frac{b}{a}\right)^3$
	-1	$-\frac{b}{a}$	$2\left(\frac{b}{a}\right)^2$	0

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 5
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Iterativo 3x3 parametros J y GS	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

b/a	$-b/a$	$-2(b/a)^2$
	-1	$-2b/a$
$-2b/a$	$2b/a$	
	-1	0

Los valores propios son b/a doble y $-2b/a$ simple., y el radio espectral ρ es por tanto $| -2b/a |$. Para que el método sea convergente es necesario que $\rho < 1$, y por tanto es preciso que $2|b| < |a|$.

Apartado (b) Caso $a=3, b=1$

La matriz de iteración del método de Jacobi viene dada por

$$K_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es $P_J(x) = |K_J - xI| = -x^3 + (1/3)x - 2(1/3)^3$. Aplicando rufini, se tiene

	-1	0	$1/3$	$-2(1/3)^3$
$1/3$	$-1/3$	$-1/9$	$2(1/3)^3$	
	-1	$-1/3$	$2/9$	0
$1/3$	$-1/3$	$-2/9$		
	-1	$-2/3$	0	
$-2/3$	$2/3$			
	-1	0		

Los valores propios son $1/3$ doble y $-2/3$ simple., y el radio espectral ρ es por tanto $2/3$.

Repitiendo el proceso para Gauss-Seidel, se tiene que

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 5
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Iterativo 3x3 parametros J y GS	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$K_G = (D - L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & \frac{2}{27} & \frac{5}{27} \end{pmatrix}$$

El polinomio característico viene dado por $P_J(x) = |\mathbf{K}_G - x\mathbf{I}| = -x^3 + \left(\frac{8}{27}\right)x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 x$., cuyas raíces son 0 y $\left(\frac{1}{3}\right)^3 (4 \pm i\sqrt{11})$. Calculando el radio espectral se obtiene el valor $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

El método que converge más rápido es aquel con menor radio espectral, lo que conduce al método de Gauss-Seidel. Para calcular el número de iteraciones de cada método, utilizamos la acotación vista en la teoría:

$$\|x - x^n\| \leq \frac{\|K\|^n}{1 - \|K\|} \|x^1 - x^0\| \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{L \frac{(1 - \|K\|)\varepsilon}{\|x^1 - x^0\|}}{L\|K\|}$$

Para poder aplicar la fórmula es necesario calcular la primera iteración del método. En ambos casos se tiene que $\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{c}$ Puesto que $\mathbf{x}^{(0)}$ es el vector nulo, se tiene que $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{c}$. Calculemos pues los valores de $\mathbf{c}$ y la norma para ambos métodos:

Jacobi: $c_J = D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \|c_J\|_\infty = \frac{2}{3}, \quad \text{y como } \|K_J\|_\infty = \frac{2}{3} \quad \text{se tiene que}$

$$n_J \geq \frac{L \frac{(1 - \frac{2}{3})10^{-3}}{\frac{2}{3}}}{L(\frac{2}{3})} \geq 18.7 = 19$$

G.-Seidel: $c_G = (D - L)^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} \\ -\frac{22}{27} \end{pmatrix} \rightarrow \|c_G\|_\infty = \frac{22}{27}, \quad \text{y como } \|K_G\|_\infty = \frac{20}{27} \quad \text{se tiene que}$

$$n_J \geq \frac{L \frac{(1 - \frac{20}{27})10^{-3}}{\frac{22}{27}}}{L(\frac{20}{27})} \geq 26.8 = 27$$

Si se realizan los cálculos, se observa que las cotas anteriores son muy groseras, pues la convergencia pedida se alcanza con Jacobi en siete iteraciones, y en seis con Gauss-Seidel.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 4 de 5
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Iterativo 3x3 parametros J y GS	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Apartado (c) Caso $a=3, b=2$

La matriz de iteración del método de Jacobi viene dada por

$$K_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{cuyo polinomio característico}$$

es $P_J(x) = |K_J - xI| = -x^3 + \frac{4}{3}x - \frac{16}{27}$. Aplicando rufini, se tiene

	-1	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{16}{27}$
$\frac{2}{3}$		$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{9}$	$\frac{16}{27}$
	-1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	0
$\frac{2}{3}$		$-\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{9}$	
	-1	$-\frac{4}{3}$	0	
$-\frac{4}{3}$		$\frac{4}{3}$		
	-1	0		

Los valores propios son $\frac{2}{3}$ doble y $-\frac{4}{3}$ simple., y el radio espectral ρ es por tanto $\frac{4}{3}$. Al ser superior a uno, el método no convergerá a la solución del sistema,

Repitiendo el proceso para Gauss-Seidel, se tiene que

$$K_G = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{27} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & \frac{4}{27} & \frac{16}{27} \end{pmatrix}$$

El polinomio característico viene dado por $P_J(x) = |K_G - xI| = -x^3 + \frac{28}{27}x^2 - \frac{8}{27}x$., cuyas raíces son 0 y $\left(\frac{1}{3}\right)^3 (14 \pm 2i\sqrt{5})$. Calculando el radio espectral se obtiene el valor $\sqrt{\frac{8}{27}}$.

Para calcular el número de iteraciones de cada método, utilizamos la acotación vista en la teoría:

$$\|x - x^n\| \leq \frac{\|K\|^n}{1 - \|K\|} \|x^1 - x^0\| \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{L \frac{(1 - \|K\|)\varepsilon}{\|x^1 - x^0\|}}{L\|K\|}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 5 de 5
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Iterativo 3x3 parametros J y GS	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Para poder aplicar la fórmula es necesario calcular la primera iteración del método. En ambos casos se tiene que $x^{(n+1)} = K \cdot x^{(n)} + c$. Puesto que $x^{(0)}$ es el vector nulo, se tiene que $x^{(1)} = c$. Calculemos pues los valores de c y la norma para ambos métodos:

Jacobi: $c_J = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix} \rightarrow \|c_J\|_{\infty} = 1/3$, y como $\|K_J\|_{\infty} = 4/3 > 1$ no se puede aplicar la fórmula.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Iterativo tria. parametros J y GS	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Dado el sistema triangular

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ 0 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ 0 & 0 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^n \end{bmatrix} X = b$$

- (a) Demostrar que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel obtienen la solución exacta en a lo sumo n pasos para cualquier de orden n . ¿Qué condiciones debe cumplir el sistema para que el método de relajación converja para cualquier valor del parámetro de relajación ω ?
- (b) Calcular el número de pasos requeridos por Jacobi y Gauss-Seidel para aproximar la solución del siguiente sistema con un error menor que 10^{-3} , partiendo del vector nulo.

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- (c) ¿Qué método de factorización sería el más adecuado para este tipo de sistemas?

Apartado (a) Demostración de convergencia

Dada una matriz regular cualquiera, con términos no nulos en la diagonal, los métodos iterativos estudiados la descomponen como

$A = D - L - U$ siendo:

$$(D)_i^j = \begin{cases} a_i^j & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (L)_i^j = \begin{cases} -a_i^j & i > j \\ 0 & i \leq j \end{cases} \quad (U)_i^j = \begin{cases} -a_i^j & i < j \\ 0 & i \geq j \end{cases}$$

Y transforman el sistema inicial en un sistema de punto fijo

$$Ax = b \Leftrightarrow (D - L - U)x = b \Leftrightarrow x = Kx + c$$

Al ser la matriz del sistema triangular superior, se tiene que $L=0$, por tanto la matriz y el vector de iteración se reducen en ambos casos a:

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Iterativo tria. parametros J y GS	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

JACOBI

$$\begin{cases} K = D^{-1}(L + U) = D^{-1}U \\ c = D^{-1}b \end{cases}$$

GAUSS-SEIDEL

$$\begin{cases} K = (D - L)^{-1}U = D^{-1}U \\ c = (D - L)^{-1}b = D^{-1}b \end{cases}$$

Los sucesivos términos de los métodos iterativos de resolución de sistemas vienen definidos por

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = Kx_n + c \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Generando la sucesión de vectores

$$x_1 = Kx_0 + c$$

$$x_2 = Kx_1 + c = K(Kx_0 + c) + c = K^2x_0 + (K + I)c$$

$$x_3 = Kx_2 + c = K(K^2x_0 + (K + I)c) + c = K^3x_0 + (K^2 + K + I)c$$

$$x_4 = Kx_3 + c = K(K^3x_0 + (K^2 + K + I)c) + c = K^4x_0 + (K^3 + K^2 + K + I)c$$

⋮

$$x_n = Kx_{n-1} + c = \dots = K^n x_0 + (K^{n-1} + K^{n-2} + \dots + K^3 + K^2 + K + I)c$$

$$x_{n+1} = Kx_n + c = \dots = K^{n+1} x_0 + (K^n + K^{n-1} + K^{n-2} + \dots + K^3 + K^2 + K + I)c$$

⋮

En ambos métodos se tiene que:

$$K = D^{-1}U = \begin{pmatrix} \cancel{1/a_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cancel{1/a_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{1/a_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \cancel{1/a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_1^2 & -a_1^3 & \dots & -a_1^n \\ 0 & 0 & -a_2^3 & \dots & -a_2^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a_1^2/\cancel{a_1} & -a_1^3/\cancel{a_1} & \dots & -a_1^n/\cancel{a_1} \\ 0 & 0 & -a_2^3/\cancel{a_2} & \dots & -a_2^n/\cancel{a_2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_3^n/\cancel{a_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta el teorema de Cayley-Hamilton por el que toda matriz verifica su ecuación característica:

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Iterativo tria. parametros J y GS	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$|K - \lambda \cdot I| = 0 \Rightarrow (-\lambda)^n = 0 \Rightarrow K^n = 0$$

Sustituyendo en las relaciones anteriores:

$$x_n = K^n x_0 + (K^{n-1} + K^{n-2} + \dots + K^3 + K^2 + K + I) c = \left(\sum_{i=0}^n K^i \right) c$$

$$x_{n+1} = K^{n+1} x_0 + (K^n + K^{n-1} + K^{n-2} + \dots + K^3 + K^2 + K + I) c = \left(\sum_{i=0}^n K^i \right) c = x_n$$

Queda así demostrado que en a lo sumo n pasos se obtiene la solución exacta.

En el método de relajación se tiene:

$$\begin{cases} K = (D - \omega L)^{-1} \{ (1 - \omega) D + \omega U \} = (1 - \omega) I + \omega D^{-1} U \\ c = (D - \omega L)^{-1} \omega b = D^{-1} \omega b \end{cases}$$

Así pues $\rho(K) = |1 - \omega|$. El método será convergente si $\rho(K) < 1$, por tanto $0 < \omega < 2$.

Apartado (b) Número de iteraciones

Del apartado anterior, ya que la matriz del sistema es triangular superior, se tiene que en ambos métodos:

$$x_{n+1} = Kx_n + c = D^{-1}Ux_n + D^{-1}b$$

luego conseguirán aproximar la solución del sistema con un error menor de 10^{-3} en el mismo número de pasos. Comenzamos calculando las matrices del método:

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = D^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c = D^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{2} \\ -4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Pero las normas sencillas habituales ($\|K\|_1 = \|K\|_\infty = 6$), son mayores que uno, y por tanto no es posible realizar la acotación del número de iteraciones. El calcular la otra norma habitual ($\|K\|_2 = \sqrt{\rho(KK^T)} = \frac{1735}{284} > 1$) tampoco permitiría utilizar la cota. Por tanto no podemos acotar el número de iteraciones, si bien sabemos que la aplicación del teorema de Cayley-Hamilton nos indica que la solución exacta se alcanza en 4 iteraciones. Realizando las iteraciones partiendo del vector nulo

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 4 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Iterativo tria. parametros J y GS	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$x_1 = Kx_0 + c = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{2} \\ -4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{2} \\ -4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x_2 = Kx_1 + c = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{2} \\ -4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{2} \\ -4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -4 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x_3 = Kx_2 + c = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -4 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{2} \\ -4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x_4 = Kx_3 + c = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{2} \\ -4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Y como cabía esperar

$$x_5 = Kx_4 + c = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{2} \\ -4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = x_4$$

Las diferencias entre las sucesivas iteraciones nos muestran

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{2} \\ -4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \Delta x_2 = x_2 - x_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{13}{2} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \Delta x_3 = x_3 - x_2 = \begin{pmatrix} -\frac{19}{12} \\ \frac{9}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Delta x_4 = x_4 - x_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que era necesario hacer cuatro iteraciones para que el error, con cualesquiera de las tres normas habituales, fuera inferior a la milésima.

Apartado (c) Selección del método de factorización

El método de factorización más adecuado para este tipo de sistemas es el de Doolittle:

$A \cdot x = b \rightarrow L \cdot U \cdot x = b$ donde L es triangular inferior de diagonal unidad y U es triangular superior, obviamente en nuestro caso la factorización ya está hecha, siendo L la matriz identidad y U la matriz A del sistema.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Trid+DP3x3: Inversa e iterativos J y SOR	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Dado el sistema lineal $Ax=b$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

- Obtener el condicionamiento del sistema utilizando $\|\cdot\|_\infty$ (El cálculo de la inversa se debe realizar utilizando el método de Gauss-Jordan)
- Obtener la matriz de iteración del método de Jacobi y analizar su convergencia. Realizar dos iteraciones partiendo del vector nulo. A la vista de los resultados, ¿cuál será el comportamiento del método de Gauss-Seidel?
- Calcular, utilizando el método de Jacobi, el número de iteraciones para lograr un error (respecto a $\|\cdot\|_1$) menor que 10^{-5} , partiendo del vector nulo.
- ¿Existe algún valor para el cual el método de relajación es convergente?. En caso afirmativo, obtener el valor óptimo y calcular el radio espectral correspondiente.

a) Inversa y condicionamiento del sistema

La matriz del sistema es tridiagonal, simétrica y de diagonal estrictamente dominante, y por tanto, definida positiva. Esto también se puede ver mediante su polinomio característico:

$$P_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 \\ 1 & 3-x & 1 \\ 0 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = (3-x)^3 - 2(3-x) = (3-x)(x^2 - 6x + 7) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma(A) = \{1.5858, 3.0000, 4.4142\}$$

Por tanto todos los métodos iterativos estudiados van a converger.

Comenzamos calculando la inversa mediante Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \leftarrow \frac{1}{3} F_1 \\ F_2 \leftarrow F_2 - \frac{1}{3} F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - \frac{0}{3} F_1 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \leftarrow F_1 - \frac{1}{8} F_2 \\ F_2 \leftarrow \frac{3}{8} F_2 \\ F_3 \leftarrow F_3 - \frac{3}{8} F_2 \end{array} \right\} \rightarrow$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Trid+DP3x3: Inversa e iterativos J y SOR	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \leftarrow F_1 - \frac{1}{21} F_3 \\ F_3 \leftarrow F_3 - \frac{1}{7} F_3 \\ F_3 \leftarrow \frac{8}{21} F_3 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{21} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{8}{21} \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{21} & -\frac{3}{21} & \frac{1}{21} \\ -\frac{3}{21} & \frac{9}{21} & -\frac{3}{21} \\ \frac{1}{21} & -\frac{3}{21} & \frac{8}{21} \end{pmatrix}$$

Puesto que

$$\|A\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_i^j| = \max \{4, 5, 4\} = 5 \quad \|A^{-1}\|_{\infty} = \max \left\{ \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7} \right\} = \frac{5}{7}$$

se tiene que

$$\kappa(A, \infty) = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = 5 \frac{5}{7} = \frac{25}{7}$$

b) Matrices de Jacobi y convergencia

A partir de la descomposición $A = D - L - U$, donde

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad L = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene la matriz de iteración de Jacobi y el vector independiente

$$K_J = D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad c_J = D^{-1}b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Al ser la matriz de diagonal estrictamente dominante, tanto el método de Jacobi como el de Gauss-Seidel son convergentes. Esto se comprueba fácilmente observando que

$$\|K_J\|_{\infty} = \max \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\} = \frac{2}{3} < 1.$$

Realizamos las iteraciones pedidas

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Trid+DP3x3: Inversa e iterativos J y SOR	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$x^{(1)} = \mathbf{K}_J x^{(0)} + c_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \mathbf{K}_J x^{(1)} + c_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} \\ \frac{14}{9} \\ -\frac{23}{9} \end{pmatrix}$$

⋮

$$x^{(13)} = \begin{pmatrix} -0.9998 \\ 1.9998 \\ -2.9998 \end{pmatrix}$$

Al ser la matriz tridiagonal y definida positiva (ver los autovalores calculados), sabemos que $\rho(\mathbf{K}_G) = \rho(\mathbf{K}_J)^2 < (\|\mathbf{K}_J\|_\infty)^2 < 1$, por lo que confirmamos de nuevo que Gauss-Seidel también es convergente.

c) Método de relajación

Al ser la matriz definida positiva, el método converge para $\omega \in (0, 2)$. Puesto que también es tridiagonal, se tiene que el valor óptimo del parámetro de relajación viene dado por

$$\omega_{\text{optimo}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(\mathbf{K}_J)^2}}$$

Lo que exige calcular el radio espectral de la matriz de Jacobi

$$P_{\mathbf{K}_J}(x) = |\mathbf{K}_J - x\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -x & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -x & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -x \end{vmatrix} = (-x)^3 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} (-x) = -x(x^2 - \frac{2}{9}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma(\mathbf{K}_J) = \{0, \pm \sqrt{\frac{2}{9}}\} \Rightarrow \rho(\mathbf{K}_J) = \sqrt{\frac{2}{9}} \approx 0.4714$$

$$\omega_{\text{optimo}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{9}}} \approx 1.0627, \text{ y el radio será } \rho_{\text{optimo}} = |\omega_{\text{optimo}} - 1| \approx 0.0627$$

d) Numero de iteraciones

El número máximo de iteraciones necesarias para que el error sea menor que un ε dado se calcula como:

$$\|x - x^{(n)}\| \leq \frac{\|\mathbf{K}\|^n}{1 - \|\mathbf{K}\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| < \varepsilon \rightarrow n \geq \frac{\ln \frac{(1 - \|\mathbf{K}\|)\varepsilon}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|}}{\ln \|\mathbf{K}\|}$$

Obtenemos los valores necesarios

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 4 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Trid+DP3x3: Inversa e iterativos J y SOR	
	Fecha	Junio 2007	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\|\mathbf{K}_J\|_1 = \max\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\} = \frac{2}{3}$$

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_1 = \|c\|_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{10}{3}$$

$$n \geq \frac{\ln \frac{(1 - \frac{2}{3})10^{-5}}{\frac{10}{3}}}{\ln \frac{2}{3}} = \frac{\ln 10^{-6}}{\ln \frac{2}{3}} \approx 34.0732$$

Se necesitan al menos 35 iteraciones

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 3
	Tema	Sistemas Lineales (Iterativos 3x3 J y GS)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Dado el sistema lineal $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = b$

- Calcular las matriz de iteración de Jacobi y su radio espectral. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0.001 utilizando la norma 1 o infinito?
- Calcular las matriz de iteración de Gauss y su radio espectral. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0.001 utilizando la norma 1 o infinito?
- Seleccionar justificadamente el método iterativo más adecuado. Obtener el vector c del método iterativo seleccionado de forma que la solución sea el vector $(1,1,1)^T$.
- Definir el condicionamiento de un sistema lineal y su interpretación.

Apartado (a) Método de Jacobi

A partir de la descomposición $A = D - L - U$, donde

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, L = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } U = -\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene la matriz de iteración de Jacobi como

$$K_J = D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico se obtiene haciendo

$$P_J(x) = |K_J - xI| = x^3$$

Por tanto tiene un valor propio nulo único de multiplicidad tres y su radio espectral en menor que 1, lo que implica que el método de Jacobi es convergente.

Calculando las normas de la matriz de iteración,

$$\|K_J\|_1 = \max\{|0| + |-1| + |-2|, |-2| + |0| + |-2|, |2| + |-1| + |0|\} = 4$$

$$\|K_J\|_\infty = \max\{|0| + |-2| + |2|, |-1| + |0| + |-1|, |-2| + |-2| + |0|\} = 4$$

Puesto que ambas son mayores que la unidad, no es posible aplicar la relación

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 3
	Tema	Sistemas Lineales (Iterativos 3x3 J y GS)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\|x - x^{(n)}\| \leq \frac{\|K\|^n}{1 - \|K\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| < \varepsilon$$

Sin embargo, aplicando el teorema de Cayley-Hamilton, se llega a que $P_J(K_J) = (K_J)^3 = 0$. Utilizando entonces la relación $\|x - x^{(n)}\| \leq \|K\|^n \|x - x^{(0)}\|$ se observa que la solución exacta se obtiene en tres iteraciones.

Apartado (b) Método de Gauss-Seidel

La matriz de iteración de Gauss-Seidel se obtiene como

$$K_G = (D - L)^{-1} U = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico se obtiene haciendo

$$P_G(x) = |K_G - xI| = x(x - 2)^2$$

Por tanto sus valores propios son 0 y 2, con multiplicidades respectivas de 1 y 2. El radio espectral de la matriz es 2 y el método de Gauss-Seidel es divergente. No tiene sentido hablar de número de iteraciones.

Apartado (c) Selección del método

A la vista de los radios espectrales, se selecciona el método de Jacobi, que converge y da la solución exacta en tres iteraciones. El de Gauss Seidel queda descartado al no ser convergente.

Para obtener el vector c tenemos dos alternativas

1. Obtención de c mediante el cálculo previo del vector b

$$b = Ax = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow c = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Obtención directa de c mediante la fórmula del método iterativo

$$x = K_J x + c \rightarrow c = (I - K_J)x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Apartado (d) Condicionamiento

Dado un sistema $Ax = b$ se define el condicionamiento de la matriz del sistema, según la norma p , al valor $cond(A, p) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$. El condicionamiento de un sistema mide la sensibilidad de la solución del sistema a las variaciones de los coeficientes del

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 3
	Tema	Sistemas Lineales (Iterativos 3x3 J y GS)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

sistema o del segundo miembro. Así, cuando el condicionamiento es “bajo”, pequeñas variaciones de los coeficientes pueden producir pequeñas modificaciones de la solución. Por el contrario, pequeñas variaciones de los coeficientes pueden originar cambios muy importantes de la solución cuando el condicionamiento es “alto”. En los sistemas con éste tipo de condicionamiento, el residual, definido como $r = b - Ax$ no es un buen indicador de la calidad de la raíz.