

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Métodos Iterativos	
	Fecha	Curso 2010/2011	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Se desea resolver por un método iterativo el sistema lineal $Ax = b$ del que se conocen las siguientes características sobre sus coeficientes:

$$|a_i^i| > \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_i^j|, i = 1, \dots, n \text{ con } \alpha > 1 \qquad 0 < \gamma < |a_i^i|, i = 1, \dots, n \qquad \|b\|_\infty = \beta$$

donde las constantes α , β y γ son conocidas.

- Demostrar que el método de Jacobi es convergente.
- Obtener, dependiendo de α , β y γ , el número de iteraciones necesarias para obtener un error menor que ε partiendo de $x^{(0)} = \mathbf{0}$.
- Realizar 3 iteraciones exactas del método de Jacobi para resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/4 \\ -7/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

Acotar el error cometido utilizando la $\|\cdot\|_1$ y compararlo con el error real sabiendo que $x = (0.5, -0.25, 0.25)$.

- ¿Qué se puede decir en el sistema anterior sobre la convergencia del método de Gauss-Seidel?

Ejercicio 2.- Demostrar que el método de Gauss-Seidel es convergente cuando la matriz del sistema es de diagonal dominante y hay al menos una fila con diagonal estrictamente dominante.

Ejercicio 3.- Dado el sistema lineal $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = b$

- Calcular la matriz de iteración de Jacobi y su radio espectral. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0.001 utilizando la norma 1 o infinito?
- Calcular la matriz de iteración de Gauss y su radio espectral. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0.001 utilizando la norma 1 o infinito?
- Seleccionar justificadamente el método iterativo más adecuado. Obtener el vector c del método iterativo seleccionado de forma que la solución sea el vector $(1, 1, 1)^T$.
- Definir el condicionamiento de un sistema lineal y su interpretación.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Métodos Iterativos	
	Fecha	Curso 2010/2011	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 4.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & 1 & & \\ & 1 & a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & a & 1 \\ & & & & 1 & a \end{pmatrix}$

- Demostrar por inducción que todos los determinantes principales son positivos cuando $a > 2$, y por tanto, aplicando criterio de Sylvester, la matriz es definida positiva.
- Dadas las características de la matriz, seleccionar justificadamente el método de factorización más adecuado. Aplicarlo cuando $A \in M_{3 \times 3}$.
- Obtener la matriz de iteración de Jacobi. Demostrar que el método converge cuando $a > 2$, ¿Cómo sería el método cuando $a = 7/4$ y $A \in M_{3 \times 3}$?

Ejercicio 5.- Dado el sistema lineal $\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ b & b & a \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(b-a) \\ a-b \end{pmatrix}$

- ¿Qué relación debe haber entre a y b para que el sistema admita solución única?
- Calcular las matrices de iteración de Jacobi y de Gauss Seidel.
- Determinar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel cuando se toma $a = \frac{1}{2}$ y $b = -1$. Obtener asimismo su radio espectral.
- En caso de converger el método de Jacobi con $a = \frac{1}{2}$ y $b = -1$, ¿cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0.001 utilizando la norma 1? ¿y la infinito?
- En caso de converger el método de Gauss-Seidel con $a = \frac{1}{2}$ y $b = -1$, ¿cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0.001 utilizando la norma 1? ¿y la infinito?

Ejercicio 6.- Dado el sistema lineal $Ax=b$, dado por $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Seleccionar el método iterativo más adecuado

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Métodos Iterativos	
	Fecha	Curso 2010/2011	
	Autor	César Menéndez Fernández	

- (b) Calcular el número de iteraciones para lograr un error (respecto a $\|o\|_\infty$) menor que 10^{-5} , partiendo del vector nulo.

Ejercicio 7.- Dado el sistema lineal $Ax=b$, dado por

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 0 \\ -a+b \end{pmatrix}$$

- (a) Calcular la matriz de iteración del método de Jacobi y determinar su polinomio característico, determinando a partir de él los valores propios. ¿Qué relación debe existir entre los coeficientes a y b para que el método iterativo de Jacobi sea convergente?.
- (b) Tomando $a=3$, $b=1$, calcular las matrices de iteración de Jacobi y Gauss Seidel. ¿Cuál de los dos métodos converge más rápido? Determinar una cota del número de iteraciones necesarias en cada método para que, partiendo del vector nulo, se asegure que el error es menor que una milésima medido con la $\|o\|_\infty$.
- (c) Tomando $a=3$, $b=2$, calcular las matrices de iteración de Jacobi y Gauss Seidel. ¿cuál de los dos métodos converge más rápido?. Determinar una cota del número de iteraciones necesarias en cada método para que, partiendo del vector nulo, se asegure que el error es menor que una milésima medido con la $\|o\|_\infty$.

Ejercicio 8.- Dado el sistema triangular

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & & a_1^n \\ 0 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ 0 & 0 & a_3^3 & & a_3^n \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & a_n^n \end{bmatrix} X = b$$

- (a) Demostrar que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel obtienen la solución exacta en a lo sumo n pasos para cualquier de orden n. ¿Qué condiciones debe cumplir el sistema para que el método de relajación converja para cualquier valor del parámetro de relajación ω ?
- (b) Calcular el número de pasos requeridos por Jacobi y Gauss-Seidel para aproximar la solución del siguiente sistema con un error menor que 10^{-3} , partiendo del vector nulo.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 4 de 4
	Tema	Sistemas Lineales	
	Materia	Métodos Iterativos	
	Fecha	Curso 2010/2011	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) ¿Qué método de factorización sería el más adecuado para este tipo de sistemas?.

Ejercicio 9.- Dado el sistema lineal $Ax=b$, dado por $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

- Obtener el condicionamiento del sistema utilizando $\|\cdot\|_\infty$ (El cálculo de la inversa se debe realizar utilizando el método de Gauss-Jordan)
- Obtener la matriz de iteración del método de Jacobi y analizar su convergencia. Realizar dos iteraciones partiendo del vector nulo. A la vista de los resultados, ¿cuál será el comportamiento del método de Gauss-Seidel?.
- Calcular, utilizando el método de Jacobi, el número de iteraciones para lograr un error (respecto a $\|\cdot\|_1$) menor que 10^{-5} , partiendo del vector nulo.
- ¿Existe algún valor para el cual el método de relajación es convergente?. En caso afirmativo, obtener el valor óptimo y calcular el radio espectral correspondiente.

Ejercicio 10.- Dado el sistema lineal $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = b$

- Calcular las matriz de iteración de Jacobi y su radio espectral. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0.001 utilizando la norma 1 o infinito?
- Calcular las matriz de iteración de Gauss y su radio espectral. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para obtener un error menor que 0.001 utilizando la norma 1 o infinito?
- Seleccionar justificadamente el método iterativo más adecuado. Obtener el vector c del método iterativo seleccionado de forma que la solución sea el vector $(1,1,1)^T$.
- Definir el condicionamiento de un sistema lineal y su interpretación.