



Titulación: Ingeniero Geólogo
Asignatura: Análisis Numérico
Autor: César Menéndez

Última actualización: 21/11/2007

Sist. Lineales de Ecuaciones

Planificación:

6 Teoría+4 Prácticas+2 Laboratorio

Materiales:

MATLAB

Conocimientos previos:

Conocimientos de Álgebra: valores y vectores propios, normas, sistemas lineales, determinantes, ...



Descripción

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía

Dado un sistema lineal $Ax=b$ buscamos una matriz K y un vector c tal que la solución única del sistema $y=Ky+c$ sea igualmente solución del sistema inicial.

$$Ax = b \Rightarrow y = Ky + c$$

La forma del sistema sugiere un método de resolución iterativa

$$x_0 \quad x_{n+1} = Kx_n + c$$

Dado el método iterativo se debe asegurar su:

- Convergencia $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$

- Consistencia $y = Ky + c = A^{-1}b$

Ejemplo	Consistencia	Convergencia
$x_{n+1} = 2x_n - A^{-1}b$	Si	No
$x_{n+1} = x_n/2 - A^{-1}b$	No	Si

[Demo](#)



Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía

Definiciones y teoremas (I)

T^{ma}: Un método iterativo es consistente si y solamente si:

- $(I-K)$ es inversible
- $c=(I-K)A^{-1}b$

[Demo](#)

Definición: convergencia de una sucesión vectorial

$$\{x_n\} \rightarrow y \text{ si } \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{Z} / \forall k > N(\varepsilon) : \|y - x_k\| < \varepsilon$$

T^{ma}: Dada una matriz cuadrada cualquiera y una norma matricial, se tiene que

- $\rho(A) \leq \|A\|$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \|A\|_\varepsilon / \|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$

[Demo](#)

T^{ma}: Dado un método iterativo consistente $x_n = Kx_{n-1} + c$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- El método es convergente
- Para alguna norma matricial $\|K\| < 1$
- $\rho(K) < 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} K^n = [0]$

[Demo](#)



Definiciones y teoremas (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía

T^{ma}: Si alguna norma matricial de la matriz de iteración es menor que la unidad, entonces el método es convergente y se verifican las siguientes cotas de error:

$$\triangleright \|y - x_n\| \leq \|K\|^n \|y - x_0\|$$

$$\triangleright \|y - x_n\| \leq \frac{\|K\|^n}{1 - \|K\|} \|x_1 - x_0\|$$

[Demo](#)

T^{ma}: Dada una matriz regular A, la matriz (A'A) es definida positiva.

[Demo](#)

Esto permite cambiar el sistema $Ax=b$ a otro equivalente $(A'A)x=(A'b)$ cuya matriz sea definida positiva.

T^{ma}: Si A, C, (A+C) y (A+BCD) son matrices cuadradas no singulares se verifica la siguiente identidad matricial

$$(A+BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1}$$

[Demo](#)



Descomposición y Métodos

Sea A una matriz regular con elementos no nulos en la diagonal, entonces admite la siguiente descomposición:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = D - L - U; \begin{cases} (D)_i^j = a_i^j \delta_i^j \\ (L)_i^j = -a_i^j \text{ si } i > j, 0 \text{ resto} \\ (U)_i^j = -a_i^j \text{ si } i < j, 0 \text{ resto} \end{cases}$$

$$Ax = b \leftrightarrow (D - L - U)x = b \rightarrow x = Kx + c$$

Jacobi:

$$(D - L - U)x = b \rightarrow Dx = (L + U)x + b \rightarrow x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

Gauss Seidel

$$(D - L - U)x = b \rightarrow (D - L)x = Ux + b \rightarrow x = (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}b$$

Relajación (SOR)

$$\left(\left(\frac{D}{\omega} - L \right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + U \right) \right) x = b \rightarrow \left(\frac{D}{\omega} - L \right) x = \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + U \right) x + b \rightarrow$$

$$\rightarrow x = (D - \omega L)^{-1} \left((1-\omega) D + \omega U \right) x + (D - \omega L)^{-1} \omega b$$

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía



Jacobi

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía

$$x_k = D^{-1}(L + U)x_{k-1} + D^{-1}b \Leftrightarrow Dx_k = b + (L + U)x_{k-1}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & 0 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & 0 & \dots & a_3^n \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_{k-1}$$

Algoritmo

Bucle para k desde 1 hasta el número de iteraciones

Bucle para i desde 1 hasta n (orden del sistema)

$$x_k^i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_i^j x_{k-1}^j - \sum_{j=i+1}^n a_i^j x_{k-1}^j}{a_i^i}$$

Fin bucle i

Fin bucle k

NOTA: La matriz de iteración de Jacobi tiene la diagonal nula



Gauss-Seidel

$$x_k = (D - L)^{-1} Ux_{k-1} + (D - L)^{-1} b \leftrightarrow Dx_k = b + Ux_{k-1} + Lx_k$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 x^1 \\ a_2^2 x^2 \\ a_3^3 x^3 \\ \vdots \\ a_n^n x^n \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ 0 & 0 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ 0 & 0 & 0 & & a_3^n \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_{k-1} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_k$$

Algoritmo

Bucle para k desde 1 hasta el número de iteraciones

Bucle para i desde 1 hasta n (orden del sistema)

$$x_k^i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_i^j x_k^j - \sum_{j=i+1}^n a_i^j x_{k-1}^j}{a_i^i}$$

Fin bucle i

Fin bucle k

NOTA: La matriz de iteración de Gauss Seidel tiene la primera columna nula

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía



Relajación

$$x_k = (D - \omega L)^{-1} ((1 - \omega)D + \omega U)x_{k-1} + (D - \omega L)^{-1} \omega b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Dx_k = (1 - \omega)Dx_{k-1} + \omega(b + Ux_{k-1} + Lx_k)$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 x^1 \\ a_2^2 x^2 \\ a_3^3 x^3 \\ \vdots \\ a_n^n x^n \end{pmatrix}_k = (1 - \omega) \begin{pmatrix} a_1^1 x^1 \\ a_2^2 x^2 \\ a_3^3 x^3 \\ \vdots \\ a_n^n x^n \end{pmatrix}_{k-1} + \omega \left\{ \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ 0 & 0 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_3^n \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_{k-1} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_k \right\}$$

Algoritmo

Bucle para k desde 1 hasta el número de iteraciones

Bucle para i desde 1 hasta n (orden del sistema)

$$x_k^i = (1 - \omega) x_{k-1}^i + \omega \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_i^j x_k^j - \sum_{j=i+1}^n a_i^j x_{k-1}^j}{a_i^i}$$

Fin bucle i

Fin bucle k

NOTA: Gauss Seidel es un caso particular de relajación para $\omega=1$

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía



SOR y Matrices definidas positivas

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

 Bibliografía

Tma: Si $a_i^i \neq 0 \forall i$ entonces $\rho(K_{SOR}) \geq |\omega - 1|$ y por tanto el método SOR sólo puede converger cuando $0 < \omega < 2$ (Kahan).

[Demo](#)

Todos los métodos vistos se basan en descomponer $A = M - N$, con M inversible, para generar el método $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

Tma: Si A es una matriz definida positiva, descompuesta en la forma $A = M - N$, con M inversible, y la matriz $(M^{-1} + N)$ también es definida positiva, entonces $\rho(M^{-1}N) < 1$ y el método es convergente.

Corolario I: Si A es definida positiva, el método de Jacobi converge para cualesquiera elección del vector inicial.

Corolario II: Si A es definida positiva, el método de relajación converge para cualesquiera elección del vector inicial siempre que $0 < \omega < 2$. (Ostrowski-Reich)

[Demo](#)



Matrices tridiagonales y especiales

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía

Tma: Si la matriz A del sistema verifica que $a_i^i > 0 \wedge \forall i \neq j : a_i^j \leq 0$ entonces será válida una y sólo una de las afirmaciones siguientes (Stein-Rosenberg):

- $\rho(K_{GS}) = \rho(K_J) = 0$
- $0 \leq \rho(K_{GS}) < \rho(K_J) < 1$
- $\rho(K_{GS}) = \rho(K_J) = 1$
- $1 \leq \rho(K_J) < \rho(K_{GS})$

[Demo](#)

Tma: Si la matriz A del sistema es tridiagonal, los radios espectrales de Jacobi y Gauss-Seidel están relacionados mediante.

$$\rho(K_{GS}) = \rho(K_J)^2$$

[Demo](#)

Tma: Si la matriz A del sistema es definida positiva y tridiagonal, el valor óptimo del parámetro de relajación y el radio espectral vienen dados por

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}} \quad \rho_{\text{opt}}(K_{\text{SOR}}) = |\omega_{\text{opt}} - 1|$$

[Demo](#)



Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía

Matrices diagonales dominantes

Def: Una matriz se denomina estrictamente diagonal dominante cuando para cada fila, la suma en valor absoluto de sus elementos es menor que el valor absoluto del elemento de la diagonal.

Si la relación se verifica con menor o igual, entonces es diagonal dominante,

T_{ma}: Si la matriz A del sistema es de diagonal estrictamente dominante, el método de Jacobi converge para cualesquiera elección del vector inicial.

[Demo](#)

T_{ma}: Si la matriz A del sistema es de diagonal dominante y alguna fila es estrictamente dominante, el método de Gauss-Seidel converge para cualesquiera elección del vector inicial.

[Demo](#)

NOTA: Aunque en algunos casos hay relaciones entre el comportamiento de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, no siempre la convergencia (o divergencia) de uno de ellos asegura la del otro.



Convergencia de Jacobi y no GS (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

 Bibliografía

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_J(x) = x^3 \rightarrow \sigma(\mathbf{K}_J) = \{0\} \Rightarrow \rho(\mathbf{K}_J) = 0 < 1$$

$$\mathbf{K}_G = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

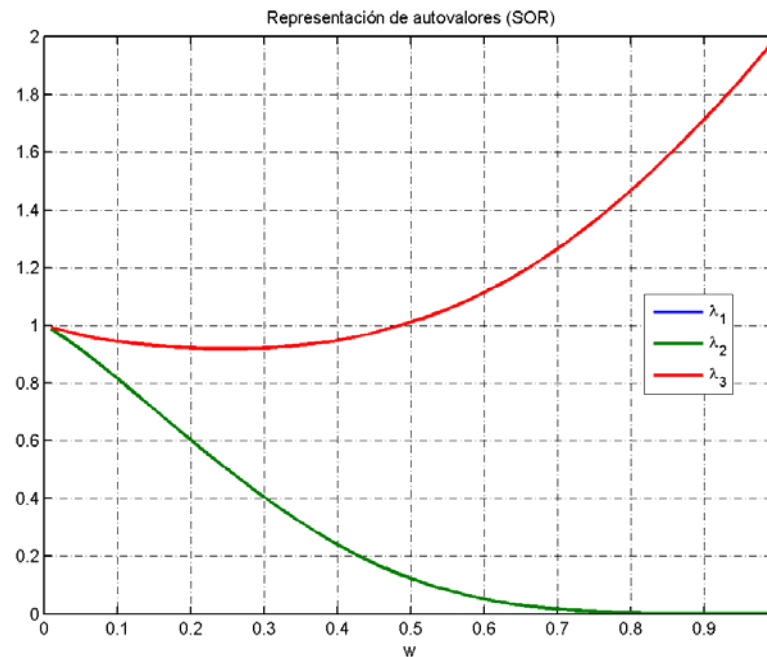
$$P_G(x) = (x - 2)^3 \rightarrow \sigma(\mathbf{K}_G) = \{0, 2, 2\} \Rightarrow \rho(\mathbf{K}_G) = 2 > 1$$



Convergencia de Jacobi y no GS (II)

$$\mathbf{K}_S = (\mathbf{D} - \omega \mathbf{L})^{-1} \{ (1 - \omega) \mathbf{D} + \omega \mathbf{U} \} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \omega & -2\omega & 2\omega \\ -\omega(1 - \omega) & 2\omega^2 - \omega + 1 & -2\omega^2 - \omega \\ -2\omega(1 - \omega)^2 & -4\omega^3 + 6\omega^2 - 2\omega & 4\omega^3 - 2\omega^2 - \omega + 1 \end{pmatrix}$$



$$\omega = 0.2$$

$$\mathbf{K}_S = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 & 0.4 \\ -0.16 & 0.88 & -0.28 \\ -0.256 & -0.192 & 0.752 \end{pmatrix}$$

$$\rho(\mathbf{K}_S) = 0.9216 < 1$$

Convergente

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía



Convergencia de GS y no Jacobi

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_J(x) = x^3 + 3/4x + 1/2 \rightarrow \rho(\mathbf{K}_J) = 1$$

$$\mathbf{K}_G = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$P_G(x) = x^3 + x^2 + 1/4x \rightarrow \rho(\mathbf{K}_G) = 0.5 < 1$$



Convergencia de GS y no Jacobi (II)

$$\mathbf{K}_S = (\mathbf{D} - \omega \mathbf{L})^{-1} \{ (1 - \omega) \mathbf{D} + \omega \mathbf{U} \} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \omega & \frac{1}{2} \omega & \frac{1}{2} \omega \\ -\omega(1 - \omega) & -\frac{1}{2} \omega^2 - \omega + 1 & -\frac{1}{2} \omega(\omega + 2) \\ \frac{1}{2} \omega(1 - \omega)^2 & \frac{1}{4} \omega(\omega + 2)(1 - \omega) & -\frac{1}{4} \omega^3 - \frac{1}{4} \omega^2 - \omega + 1 \end{pmatrix}$$

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

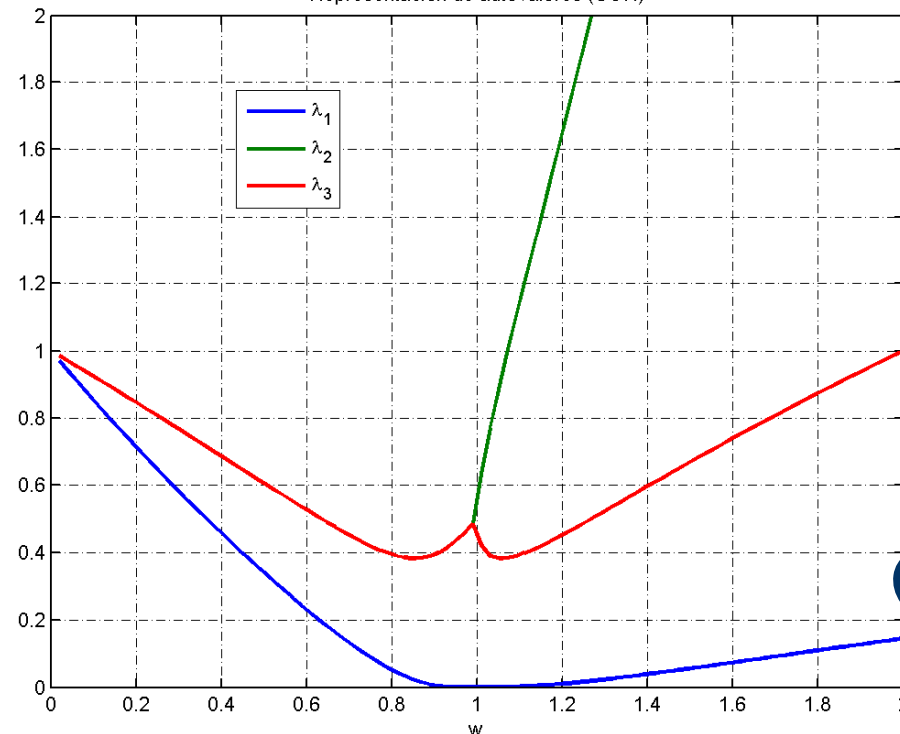
- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía

Representación de autovalores (SOR)



$$\omega = 0.85 \rightarrow \rho = 0.3820$$

Convergente



Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía

Ejemplo completo (I)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Dado el sistema anterior:

1. Calcular las matrices de iteración de los diferentes métodos
2. Estudiar su convergencia
3. Determinar el número de iteraciones necesarias para tener un error inferior a 0.001 partiendo del origen y utilizando la norma infinito
4. Realizar las iteraciones anteriores y comprobar cuantas hubieran sido realmente necesarias.

Jacobi:

$$\mathbf{K}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 0'5 \\ 0'5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_J = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1'5 \\ -1'5 \end{pmatrix}$$

$$P_J(x) = x^2 - \frac{1}{4} \rightarrow \rho(\mathbf{K}_J) = 0'5$$

Gauss-Seidel

$$\mathbf{K}_G = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0'5 \\ 0 & 0'25 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_G = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1'50 \\ -0'75 \end{pmatrix}$$

$$P_G(x) = x^2 - \frac{1}{4}x \rightarrow \rho(\mathbf{K}_G) = 0'25 < 1$$

Como cabía esperar (matriz tridiagonal, de diagonal estrictamente dominante y definida positiva), ambos métodos convergen, y, el radio espectral de Gauss-Seidel es el cuadrado del de Jacobi, por lo que su convergencia es más rápida.



Ejemplo completo (II)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

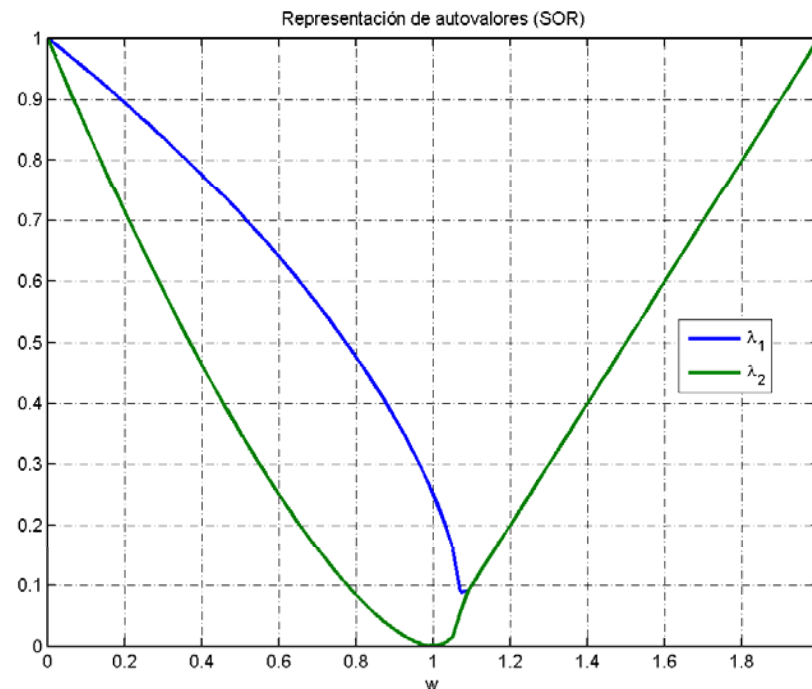
- Ejemplos

Bibliografía

Relajación (SOR)

$$\mathbf{K}_S = (\mathbf{D} - \omega \mathbf{L})^{-1} \{ (1 - \omega) \mathbf{D} + \omega \mathbf{U} \} = \begin{pmatrix} 1 - \omega & \frac{1}{2} \omega \\ \frac{1}{2} \omega (1 - \omega) & \frac{1}{4} \omega^2 - \omega + 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_S = (\mathbf{D} - \omega \mathbf{L})^{-1} \omega \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1.5 \omega \\ 0.75 \omega (\omega - 2) \end{pmatrix}$$



$$\omega = 1.1$$

$$\mathbf{K}_S = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.55 \\ -0.055 & 0.2025 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1.65 \\ -0.7425 \end{pmatrix}$$

$$P_S(x) = x^2 - 0.1025x + 0.01$$

$$\rho(\mathbf{K}_S) = 0.1$$

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 0.25}} = 1.0718$$

$$\rho_{\text{opt}}(\mathbf{K}_S) = 0.0718$$



Ejemplo completo (III)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Número de iteraciones

$$\|x - x^{(n)}\| \leq \frac{\|K\|^n}{1 - \|K\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \rightarrow n \geq \frac{\ln(\varepsilon(1 - \|K\|)) - \ln\|x^{(1)} - x^{(0)}\|}{\ln\|K\|}$$

	$\ K\ _{\infty}$	$\ x^{(1)} - x^{(0)}\ = \ c\ $	n>
Jacobi	0.5	1.5	11.55
Gauss-Seidel	0.5	1.5	11.55
Relajación	0.65	1.65	19.63

$$\text{Jacobi} \quad x_k^i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^j x_{k-1}^j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^j x_{k-1}^j}{a_{ii}^i}$$

$$\text{Gauss - Seidel} \quad x_k^i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^j x_{k-1}^j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^j x_k^j}{a_{ii}^i}$$

$$\text{Relajación} \quad x_k^i = (1 - \omega) x_{k-1}^i + \omega \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^j x_{k-1}^j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^j x_k^j}{a_{ii}^i}$$

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía



Ejemplo completo (IV)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía

Jacobi

$$\begin{cases} x_k^1 = \frac{b_1 - a_1^2 x_{k-1}^2}{a_1^1} = \\ \quad = \frac{3 + x_{k-1}^2}{2} \\ x_k^2 = \frac{b_2 - a_2^1 x_{k-1}^1}{a_2^2} = \\ \quad = \frac{-3 + x_{k-1}^1}{2} \end{cases}$$

Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_k^1 = \frac{b_1 - a_1^2 x_{k-1}^2}{a_1^1} = \\ \quad = \frac{3 + x_{k-1}^2}{2} \\ x_k^2 = \frac{b_2 - a_2^1 x_k^1}{a_2^2} = \\ \quad = \frac{-3 + x_k^1}{2} \end{cases}$$

Relajación

$$\begin{cases} x_k^1 = (1 - \omega) x_{k-1}^1 + \omega \frac{b_1 - a_1^2 x_{k-1}^2}{a_1^1} = \\ \quad = -0.1 x_{k-1}^1 + 1.1 \frac{3 + x_{k-1}^2}{2} \\ x_k^2 = (1 - \omega) x_{k-1}^2 + \omega \frac{b_2 - a_2^1 x_k^1}{a_2^2} = \\ \quad = -0.1 x_{k-1}^2 + 1.1 \frac{-3 + x_k^1}{2} \end{cases}$$

Jacobi

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2} \\ x_1^2 = \frac{-3+0}{2} = -\frac{3}{2} \\ x_2^1 = \frac{3+\frac{-3}{2}}{2} = \frac{3}{4} \\ x_2^2 = \frac{-3+\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2} \\ x_1^2 = \frac{-3+\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4} \\ x_2^1 = \frac{3+\frac{-3}{4}}{2} = \frac{5}{4} \\ x_2^2 = \frac{-3+\frac{5}{4}}{2} = -\frac{7}{8} \end{cases}$$

Relajación

$$\begin{cases} x_1^1 = -0.1 \times 0 + 1.1 \frac{3+0}{2} = 1.65 \\ x_1^2 = -0.1 \times 0 + 1.1 \frac{-3+1.65}{2} = -0.7425 \\ x_2^1 = -0.1 \times 1.65 + 1.1 \frac{3-0.7425}{2} = 1.0766 \\ x_2^2 = -0.1 \times (-0.7425) + 1.1 \frac{-3+1.0766}{2} = -0.9836 \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo completo (V)

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía

	Jacobi		Gauss-Seidel		Relajación (w=1.1)	
00	0	0	0	0	0	0
01	1.5000	-1.5000	1.5000	-0.7500	1.6500	-0.7425
02	0.7500	-0.7500	1.1250	-0.9375	1.0766	-0.9836
03	1.1250	-1.1250	1.0313	-0.9844	1.0014	-1.0009
04	0.9375	-0.9375	1.0078	-0.9961	0.9994	-1.0003
05	1.0313	-1.0313	1.0020	-0.9990	0.9999	-1.0000
06	0.9844	-0.9844	1.0005	-0.9998	1.0000	-1.0000
07	1.0078	-1.0078	1.0001	-0.9999	1.0000	-1.0000
08	0.9961	-0.9961	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
09	1.0020	-1.0020	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
10	0.9990	-0.9990	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
11	1.0005	-1.0005	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
12	0.9998	-0.9998	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
13	1.0001	-1.0001	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
14	0.9999	-0.9999	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
15	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
16	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
17	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
18	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
19	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
20	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000



Ejemplo completo (VI)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Métodos Directos

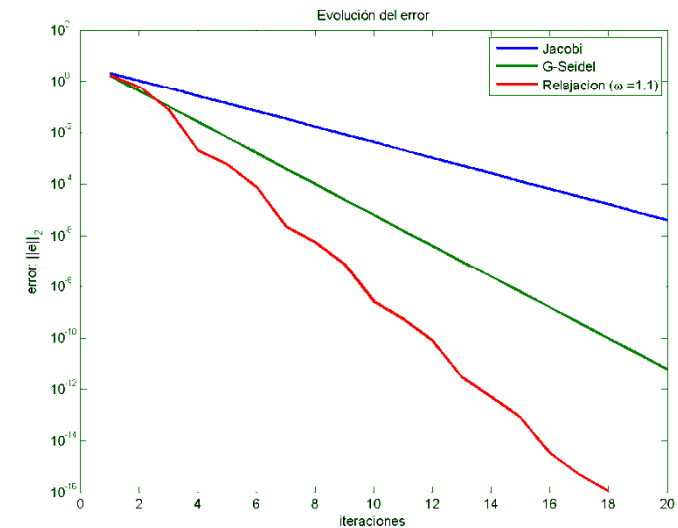
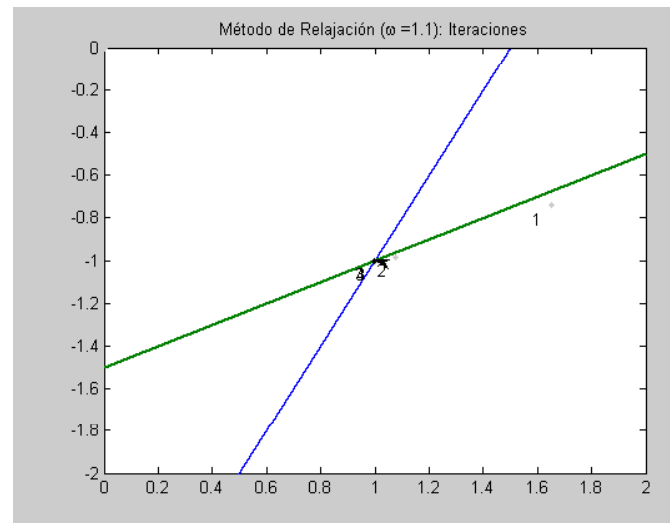
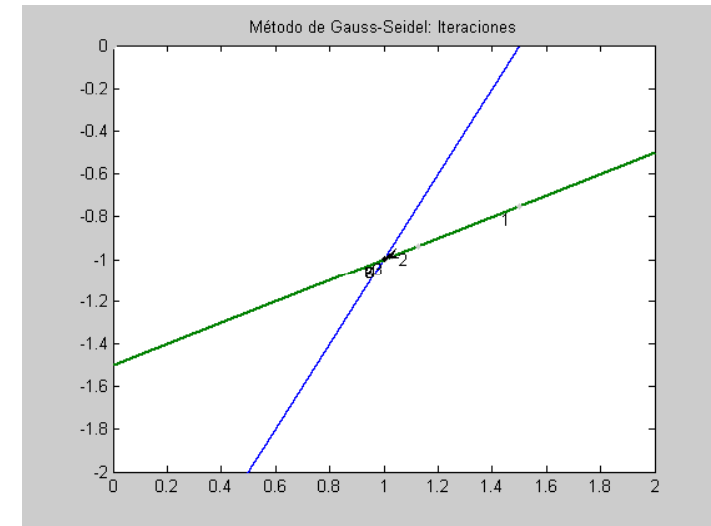
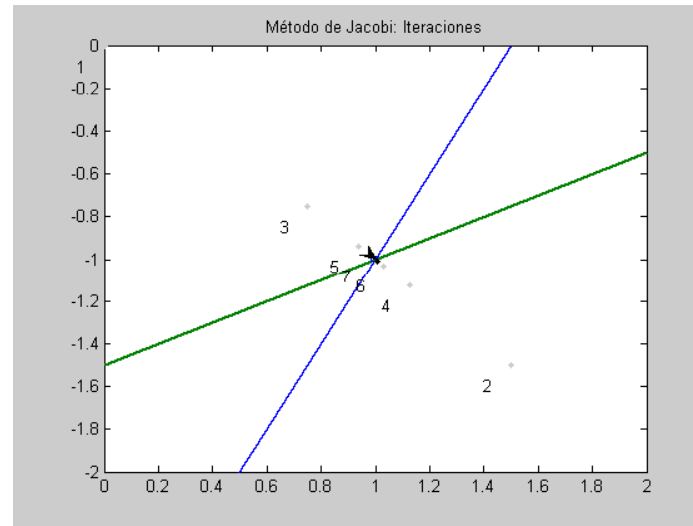
Métodos Iterativos

- Métodos

- Convergencia

- Ejemplos

Bibliografía





Anexo

- Demostraciones de los teoremas



Demo: Consistencia y convergencia

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Mét. Directos: Gauss

Mét.D.: Factorización

Aplicaciones de MD

Condicionamiento

Métodos Iterativos

- Introducción

- Métodos

- Convergencia

Bibliografía

Ejemplo	Consistencia $y = A^{-1}b$	Convergencia $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$
$x_{n+1} = 2x_n - A^{-1}b$	Si	No
$x_{n+1} = x_n/2 - A^{-1}b$	No	Si

$$x_{n+1} = 2x_n - A^{-1}b$$

$$\begin{cases} y = 2y - A^{-1}b \rightarrow y = A^{-1}b \\ x_{n+1} - x_n = 2(x_n - x_{n-1}) = 2^n(x_1 - x_0) \end{cases}$$

$$x_{n+1} = x_n/2 - A^{-1}b$$

$$\begin{cases} y = y/2 - A^{-1}b \rightarrow y = -2A^{-1}b \\ x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n(x_1 - x_0) \end{cases}$$



Demo: Acotación del radio espectral

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Mét. Directos: Gauss

Mét.D.: Factorización

Aplicaciones de MD

Condicionamiento

Métodos Iterativos

- Introducción

- Métodos

- Convergencia

Bibliografía

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

$$\forall \lambda \in \sigma(A) : \exists x \neq 0 / Ax = \lambda x \Rightarrow \|A\| \|x\| \geq \|Ax\| = |\lambda| \|x\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \in \sigma(A) : \|A\| \geq |\lambda| \Rightarrow \|A\| \geq \rho(A)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \|A\|_\varepsilon / \|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$$

$$\exists U \text{ unitaria : } U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_1^2 & \dots & b_1^{n-1} & b_1^n \\ & \lambda_2 & \dots & b_2^{n-1} & b_2^n \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda_{n-1} & b_{n-1}^n \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \text{ Definimos } D = \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \\ \delta^2 \\ \vdots \\ \delta^{n-1} \end{pmatrix}, \text{ entonces}$$

$$(UD)^{-1} A(UD) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta b_1^2 & \dots & \delta^{n-2} b_1^{n-1} & \delta^{n-1} b_1^n \\ & \lambda_2 & \dots & \delta^{n-3} b_2^{n-1} & \delta^{n-2} b_2^n \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda_{n-1} & b_{n-1}^n \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \text{ Si elegimos } \delta : \sum_{j=i+1}^n |\delta^{j-i} b_i^j| \leq \varepsilon, 1 \leq i \leq n-1$$

$$\|A\|_\varepsilon = \|(UD)^{-1} A(UD)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left(|\lambda_i| + \sum_{j=i+1}^n |\delta^{j-i} b_i^j| \right) \leq \rho(A) + \varepsilon$$

[Volver](#)



Demo: Convergencia

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Mét. Directos: Gauss

Mét.D.: Factorización

Aplicaciones de MD

Condicionamiento

Métodos Iterativos

- Introducción

- Métodos

- Convergencia

Bibliografía

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K^n = [0] \Rightarrow \text{Convergencia} (\Leftarrow)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_n = Kx_{n-1} + c \\ y = Ky + c \end{array} \right\} y - x_n = K(y - x_{n-1}) = \dots K^n(y - x_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y - x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} K^n(y - x_0) = [0](y - x_0) = [0] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$$

$$\|K\| < 1 \Rightarrow \text{Convergencia}$$

$$y - x_n = K^n(y - x_0) \rightarrow \|y - x_n\| \leq \|K\|^n \|y - x_0\|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y - x_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|K\|^n \|y - x_0\| = [0]\|y - x_0\| = [0] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$$

$$\text{Convergencia} \Rightarrow \|K\| < 1$$

$$(K^{-1})^n(y - x_n) = (y - x_0) \rightarrow \|y - x_n\| \geq \frac{\|y - x_0\|}{\|K^{-1}\|^n} \text{ puesto que } \|K\|\|K^{-1}\| \geq 1 \Rightarrow \|K^{-1}\| \geq \frac{1}{\|K\|}$$

$$\|y - x_n\| \geq \|K\|^n \|y - x_0\| \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|y - x_n\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|K\|^n \|y - x_0\| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|K\|^n = 0 \Rightarrow \|K\| < 1$$

$$\rho(A) < 1 \Leftrightarrow \exists \|A\| < 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \|A\|_\varepsilon / \|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon < 1$$

$$\|A\| < 1 \Rightarrow \rho(A) \leq \|A\| < 1$$

[Volver](#)



Demo: Acotación del error

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Mét. Directos: Gauss

Mét.D.: Factorización

Aplicaciones de MD

Condicionamiento

Métodos Iterativos

- Introducción

- Métodos

- Convergencia

Bibliografía

$$\left. \begin{array}{l} x_n = Kx_{n-1} + c \\ y = Ky + c \end{array} \right\} y - x_n = K^n (y - x_0) \Rightarrow \|y - x_n\| \leq \|K\|^n \|y - x_0\|$$

$$\text{Sea } m > n \rightarrow x_m - x_n = x_m \pm x_{m-1} \pm x_{m-2} \cdots \pm x_{n+1} - x_n =$$

$$= (x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + (x_{m-2} - x_{m-3}) + \cdots (x_{n+1} - x_n)$$

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \|x_{m-2} - x_{m-3}\| + \cdots \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$\text{como } \|x_{n+1} - x_n\| \leq \|K\|^n \|x_1 - x_0\|$$

$$\|x_m - x_n\| \leq (\|K\|^{m-1} + \|K\|^{m-2} + \|K\|^{m-3} + \cdots \|K\|^n) \|x_1 - x_0\|$$

$$\text{serie geométrica } \sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1 - a_{n+1}r}{1-r}$$

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{\|K\|^{m-1} - \|K\|^n \|K\|^{-1}}{1 - \|K\|^{-1}} \|x_1 - x_0\| \quad \text{y tomando límites}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = \|y - x_n\| \leq \frac{\|K\|^n}{1 - \|K\|} \|x_1 - x_0\|$$

[Volver](#)



Demo: Matriz normal

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Mét. Directos: Gauss

Mét.D.: Factorización

Aplicaciones de MD

Condicionamiento

Métodos Iterativos

- Introducción

- Métodos

- Convergencia

Bibliografía

B definida positiva $\Leftrightarrow \forall x: x^t B x \geq 0 \wedge x^t B x = 0 \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_k \in \sigma(B): \lambda_k > 0$

$$\forall x: x^t (A^t A) x = (Ax)^t (Ax) = \tilde{x}^t \tilde{x} = \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i)^2 \geq 0$$

$$\tilde{x} = Ax = 0 \xrightarrow{A \text{ regular}} x = 0$$

[Volver](#)

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1}$$

$$(A + BCD) \left[A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1} \right] = I - B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1} + BCDA^{-1} - BCDA^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1}$$

[Volver](#)



Demo: Matriz normal

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Mét. Directos: Gauss

Mét.D.: Factorización

Aplicaciones de MD

Condicionamiento

Métodos Iterativos

- Introducción

- Métodos

- Convergencia

Bibliografía

B definida positiva $\Leftrightarrow \forall x: x^t B x \geq 0 \wedge x^t B x = 0 \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_k \in \sigma(B): \lambda_k > 0$

$$\forall x: x^t (A^t A) x = (Ax)^t (Ax) = \tilde{x}^t \tilde{x} = \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i)^2 \geq 0$$

$$\tilde{x} = Ax = 0 \xrightarrow{A \text{ regular}} x = 0$$

[Volver](#)

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1}$$

$$(A + BCD) \left[A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1} \right] = I - B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1} + BCDA^{-1} - BCDA^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1}$$

[Volver](#)



Demo: Matriz normal

Descripción

Objetivos

Temario

Cuestiones previas

Mét. Directos: Gauss

Mét.D.: Factorización

Aplicaciones de MD

Condicionamiento

Métodos Iterativos

- Introducción

- Métodos

- Convergencia

Bibliografía

B definida positiva $\Leftrightarrow \forall x: x^t Bx \geq 0 \wedge x^t Bx = 0 \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_k \in \sigma(B): \lambda_k > 0$

$$\forall x: x^t (A^t A) x = (Ax)^t (Ax) = \tilde{x}^t \tilde{x} = \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i)^2 \geq 0$$

$$\tilde{x} = Ax = 0 \xrightarrow{A \text{ regular}} x = 0$$

[Volver](#)

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1}$$

$$(A + BCD) \left[A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1} \right] = I - B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1} + BCDA^{-1} - BCDA^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)DA^{-1}$$

[Volver](#)