

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 2
	Tema	Sistemas Lineales lineales (Gauss con variantes y estudio iterativo)	
	Examen	Diciembre 2000	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1. Dado el sistema lineal
$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - z = -5, \\ x + y - 3z = -9 \end{cases}$$

- Resolverlo mediante el método de Gauss con aritmética exacta y sin pivoteo.
- Resolverlo mediante el método de Gauss con pivoteo simple o parcial y redondeo de dos cifras significativas.
- Resolverlo mediante el método de Gauss con pivoteo doble o total y redondeo de dos cifras significativas.
- Habría algún método iterativo que fuera convergente. Justifíquese sin calcular el radio espectral de la matriz de iteración.

Apartado (a) Solución analítica exacta

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{igual} \\ 2^a - \frac{1}{2}1^a \\ 3^a - \frac{1}{4}1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 & -\frac{19}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{7}{2} & -\frac{45}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{igual} \\ \text{igual} \\ 3^a - \frac{3}{14}2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{43}{14} & -\frac{129}{14} \end{pmatrix}$$

y resolviendo por remonte

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 9 \\ \frac{7}{2}y - 2z = -\frac{19}{2} \\ -\frac{43}{14}z = -\frac{129}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = 9 - 2z = 3 \\ \frac{7}{2}y = -\frac{19}{2} + 2z = -\frac{7}{2} \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 3 - y = 4 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Apartado (b) Gauss con pivote simple y redondeo a dos cifras significativas

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{igual} \\ 2^a - 0'5 \times 1^a \\ 3^a - 0'25 \times 1^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3'5 & -2 & -9'5 \\ 0 & 0'75 & -3'5 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{igual} \\ \text{igual} \\ 3^a - 0'21 \times 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3'5 & -2 & -9'5 \\ 0 & 0 & -3'1 & -9 \end{pmatrix}$$

y resolviendo por remonte

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 9 \\ 3'5y - 2z = -9'5 \\ -3'1z = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = 9 - 2z \\ 3'5y = -9'5 + 2z = -3'7 \\ z = 2'9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 3'2 - y = 4'3 \\ y = -1'1 \\ z = 2,9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1'1 \\ y = -1'1 \\ z = 2'9 \end{cases}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 2
	Tema	Sistemas Lineales lineales (Gauss con variantes y estudio iterativo)	
	Examen	Diciembre 2000	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Apartado (c) Gauss con pivote doble y redondeo a dos cifras significativas

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{igual} \\ 2^a - 0'5 \times 1^a \\ 3^a - 0'25 \times 1^a \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3'5 & -2 & -9'5 \\ 0 & 0'75 & -3'5 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow \\
\rightarrow \begin{cases} \text{igual} \\ \text{igual} \\ 3^a - 0'21 \times 2^a \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3'5 & -2 & -9'5 \\ 0 & 0 & -3'1 & -9 \end{pmatrix}$$

y resolviendo por remonte

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 9 \\ 3'5y - 2z = -9'5 \\ -3'1z = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = 9 - 2z \\ 3'5y = -9'5 + 2z = -3'7 \\ z = 2'9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 3'2 - y = 4'3 \\ y = -1'1 \\ z = 2,9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1'1 \\ y = -1'1 \\ z = 2'9 \end{cases}$$

Se observa que en ambos casos el resultado es el mismo.

Apartado (d) Convergencia de algún método iterativo

La matriz del sistema es de diagonal estrictamente dominante, puesto que

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{cases} |1| + |2| < |4| \\ |2| + |-1| < |4| \\ |1| + |1| < |-3| \end{cases}, \text{ por consiguiente tanto Jacobi como Gauss-Seidel}$$

serán

convergentes.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 3
	Tema	Sistemas Lineales (Pivote Doble y Jacobi)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1. Para la construcción de una presa, un ingeniero requiere 2130, 2850 y 3120 m³ de arena, trito y grava respectivamente. Tiene en las proximidades 3 canteras que le suministran áridos con la siguiente proporción volumétrica de materiales:

	% Arena	% Trito	% Grava
Cantera 1	70	10	20
Cantera 2	10	60	30
Cantera 3	20	30	50

- Plantear el sistema lineal de ecuaciones.
- Resolver el sistema utilizando el método de Gauss con pivote doble de forma exacta.
- ¿Sería posible resolver el sistema utilizando el método de Jacobi?. En caso afirmativo, ¿se podría determinar el número de iteraciones para obtener la solución con error determinado?. ¿Cuántas serían necesarias para un error menor que 0.01?.

Apartado (a) Planteamiento del sistema y resolución

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2130 \\ 2850 \\ 3120 \end{pmatrix} \quad \text{Donde } x_k \text{ representa la cantidad de material en m}^3 \text{ solicitado a la cantera } k\text{-ésima.}$$

Apartado (b) Resolución mediante Gauss

El método de Gauss con pivote doble convierte el sistema en otro triangular equivalente utilizando como pivote el elemento de mayor valor absoluto de la submatriz no triangulizada. Hay que recordar que el intercambio de filas no provoca cambios, pero el de columnas modifica el orden de las soluciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7/10 & 1/10 & 2/10 & 2130 \\ 1/10 & 6/10 & 3/10 & 2850 \\ 2/10 & 3/10 & 5/10 & 3120 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7/10 & 1/10 & 2/10 & 2130 \\ 0 & 41/70 & 19/70 & 17820/7 \\ 0 & 19/70 & 31/70 & 17580/7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 7/10 & 1/10 & 2/10 & 2130 \\ 0 & 41/70 & 19/70 & 17820/7 \\ 0 & 0 & 13/41 & 31961/24 \end{array} \right)$$

Se observa que el pivote siempre se corresponde con el término de la diagonal y por tanto no se ha precisado intercambio de filas ni de columnas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7/10 & 1/10 & 2/10 & 2130 \\ 0 & 41/70 & 19/70 & 17820/7 \\ 0 & 0 & 13/41 & 31961/24 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 7/10 x_1 = 2130 - 2400 \cdot 1/10 - 4200 \cdot 2/10 \rightarrow x_1 = 1500 \\ 41/70 x_2 = 17820/7 - 4200 \cdot 19/70 \rightarrow x_2 = 2400 \\ x_3 = 4200 \end{cases}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 3
	Tema	Sistemas Lineales (Pivote Doble y Jacobi)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Apartado (c) Método de Jacobi

Comenzamos calculando la matriz de iteración de Jacobi y el segundo miembro

$$\mathbf{K}_J = \begin{pmatrix} 0 & -1/7 & -2/7 \\ -1/6 & 0 & -3/6 \\ -2/5 & -3/5 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & -0.14285714285714 & -0.28571428571429 \\ -0.16 & 0 & -0.5 \\ -0.4 & -0.6 & 0 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$c = \begin{pmatrix} 21300/7 \\ 28500/6 \\ 31200/5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3042.85714285714 \\ 4750 \\ 6240 \end{pmatrix}$$

Comprobamos con las normas habituales si alguna de ellas es menor que 1. Empezamos con la norma infinito.

$$\|\mathbf{K}_J\|_{\infty} = \max \left\{ \left| -1/7 \right| + \left| -2/7 \right|, \left| -1/6 \right| + \left| -3/6 \right|, \left| -2/5 \right| + \left| -3/5 \right| \right\} = \max \left\{ 3/7, 2/3, 1 \right\} = 1$$

La norma infinito es mayor que uno y no sirve. Probamos con la norma uno.

$$\|\mathbf{K}_J\|_1 = \max \left\{ \left| -1/6 \right| + \left| -2/5 \right|, \left| -1/7 \right| + \left| -3/5 \right|, \left| -2/7 \right| + \left| -3/6 \right| \right\} = \max \left\{ 17/30, 26/35, 11/14 \right\} = 11/14$$

Puesto que es menor que uno, el método iterativo será convergente. Utilizamos la acotación del error para calcular el número de iteraciones:

$$\|x - x^n\| \leq \frac{\|\mathbf{K}\|^n}{1 - \|\mathbf{K}\|} \|x^1 - x^0\| \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{L \frac{(1 - \|\mathbf{K}\|) \varepsilon}{\|x^1 - x^0\|}}{L \|\mathbf{K}\|}$$

$$\|x^1 - x^0\| = \|c\| \text{ si } x^0 = \mathbf{0} \text{ y por tanto } n_j \geq \frac{L \frac{(1 - 11/14) 10^{-3}}{4242.86}}{L (11/14)} = \frac{-16.8012}{-0.241162} = 69.66$$

Luego tras 70 iteraciones se puede asegurar un error menor que 0.001 según la norma uno.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 3
	Tema	Sistemas Lineales (Pivote Doble y Jacobi)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 3
	Tema	Sistemas Lineales (Factorización, Gauss y condicionamiento)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1. Dado el sistema lineal $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/63 \\ 1/168 \end{pmatrix}$

- Clasificar la matriz, según sus características. ¿Cuál sería el método de factorización más adecuado para resolver el sistema?
- Resolver el sistema por Gauss, de forma exacta y utilizando aritmética de 3 cifras decimales.
- Calcular el condicionamiento del sistema. ¿Es razonable el error existente entre la solución exacta y aproximada?

Apartado (a) Clasificación de la Matriz

La matriz A es simétrica; para ver si es definida positiva, analizamos su polinomio característico.

$$P_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 1/2 - x & 1/3 \\ 1/3 & 1/4 - x \end{vmatrix} = x^2 - 3/4x + 1/72$$

Aplicando la regla de los signos de Descartes, el polinomio tiene dos raíces reales positivas; así pues la matriz es definida positiva, y la factorización más adecuada será la de Cholesky.

Apartado (b) Resolución por Gauss

Comenzamos resolviendo de forma analítica exacta

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 1/3 & 1/63 \\ 1/3 & 1/4 & 1/168 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 1/3 & 1/63 \\ 0 & 1/36 & -1/216 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 1/2x + 1/3(-1/6) = 1/63 \rightarrow x = 1/7 \\ y = -1/6 \end{cases}$$

Resolvemos ahora de forma aproximada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0'5 & 0'333 & 0'0159 \\ 0'333 & 0'25 & 0'00595 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0'5 & 0'333 & 0'0159 \\ 0 & 0'03 & -0'00465 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 0'5\tilde{x} + 0'333(-0'155) = 0'0159 \rightarrow \tilde{x} = 0'135 \\ \tilde{y} = -0'155 \end{cases}$$

La diferencia entre ambas soluciones es $\delta X = X - \tilde{X} = \begin{pmatrix} 1/7 - 0'135 \\ -1/6 + 0'155 \end{pmatrix}$

Para calcular el condicionamiento, debemos primero invertir la matriz A . Calculando el determinante, y la adjunta de su traspuesta, tenemos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 18 & -24 \\ -24 & 36 \end{pmatrix}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 3
	Tema	Sistemas Lineales (Factorización, Gauss y condicionamiento)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Apartado (c) Cálculo de Normas y Condicionamiento

	$\ \cdot\ _1$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$
A	5/6	$(9 + \sqrt{73})/24$	5/6
A ⁻¹	60	$3(9 + \sqrt{73})$	60
Cond(A)	50	$(9 + \sqrt{73})^2/8 \approx 38.474$	50
δA	$1/3 \times 10^{-3}$	$1/3 \times 10^{-3}$	$1/3 \times 10^{-3}$
b	11/504	$\sqrt{73}/504$	1/63
δb	0.00132937	0.00130266	0.00130238
X	13/42	$\sqrt{85}/42$	1/6
δX	0.329524	0.321763	0.321667
δX/X	1.06462	1.4658	1.93
$\frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)} \frac{\ \delta A\ }{\ A\ } \left(\frac{\ \delta b\ }{\ b\ } + \frac{\ \delta A\ }{\ A\ } \right)$	3.12801	3.02708	4.20663

Se observa que los errores de la solución son menores que las cotas obtenidas, luego los resultados son razonables



UNIVERSIDAD DE OVIEDO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Asignatura

Cálculo Numérico

Página 3 de 3

Tema

Sistemas Lineales (Factorización, Gauss y condicionamiento)

Examen

Febrero 2000

Autor

César Menéndez Fernández

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 5
	Tema	Sistemas lineales (Caracterizar matriz, factorización, normas y Jacobi)	
	Examen	Febrero 2000	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1. Dado el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde

- Obtener el polinomio característico de la matriz del sistema y acotar sus raíces utilizando valores enteros.
- Seleccionar justificadamente el método de factorización más adecuado y utilizarlo para resolver el sistema
- Calcular $\|\mathbf{A}\|_1$, $\|\mathbf{A}\|_2$ y $\|\mathbf{A}\|_\infty$, así como $\|\mathbf{b}\|_1$, $\|\mathbf{b}\|_2$ y $\|\mathbf{b}\|_\infty$. Si se cambia el segundo miembro por $\tilde{\mathbf{b}}^T = (0.1 \ 0.1 \ 3.9)$, ¿Cuál sería el máximo error esperado de la solución según $\|\cdot\|_1$?
- Obtener las matrices del método de Jacobi. Justificar si el método es convergente y, en caso afirmativo, ¿Cuántas iteraciones son necesarias para asegurar un error menor que 0.01 utilizando $\|\cdot\|_\infty$ y partiendo del vector nulo?

Apartado (a) Polinomio característico y acotación de raíces

Comenzamos calculando el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$.

$$P_A(x) = |\mathbf{A} - x\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & -1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^3 - 2(2-x) = -x^3 + 6x^2 - 10x + 4$$

Aplicando la regla de los signos de Descartes, el polinomio tiene tres o una raíces reales positivas. Vamos a acotar sus raíces utilizando Laguerre-Thibault

Raíces Positivas, cota superior: $P(x) = -x^3 + 6x^2 - 10x + 4$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 6 & -10 & 4 \\ 6 & & -6 & 0 & -60 \\ \hline & -1 & 0 & -10 & -56 \end{array} \quad \text{Y por tanto la cota es 6}$$

Raíces Positivas, cota inferior: $x^3 P\left(\frac{1}{x}\right) = 4x^3 - 10x^2 + 6x - 1$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 5
	Tema	Sistemas lineales (Caracterizar matriz, factorización, normas y Jacobi)	
	Examen	Febrero 2000	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{array}{r|rrrr}
& 4 & -10 & 6 & -1 \\
3 & & 12 & 6 & 36 \\
\hline
& 4 & 2 & 12 & 35
\end{array}$$

Y por tanto la cota es 1/3

Raíces Negativas, cota inferior: $P(-x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 4$

$$\begin{array}{r|rrrr}
& 1 & 6 & 10 & 4 \\
1 & & 6 & 7 & 17 \\
\hline
& 1 & 7 & 17 & 21
\end{array}$$

Y por tanto la cota es -1

Raíces Negativas, cota superior: $x^3 P\left(\frac{-1}{x}\right) = 4x^3 + 10x^2 + 6x + 1$

$$\begin{array}{r|rrrr}
& 4 & 10 & 6 & 1 \\
1 & & 4 & 14 & 21 \\
\hline
& 4 & 14 & 20 & 21
\end{array}$$

Y por tanto la cota es $-(1/1)$

Los intervalos de las raíces son por tanto $[-1, -1]$ y $[1/3, 6]$, esto es, la matriz no tiene autovalores negativos ni nulos.

Apartado (b) Resolución por Factorización

A la vista del resultado anterior, la matriz A es simétrica y definida positiva por lo que el método de factorización más adecuado es el de Choleski.

También se podrían haber calculado los autovalores, ya que el polinomio es fácil de factorizar:

$$P_A(x) = (2-x)^3 - 2(2-x) = (2-x)((2-x)^2 - 2) \rightarrow \sigma(A) = \{2, 2 \pm \sqrt{2}\}$$

El método de Choleski factoriza $A = LL^T$, donde L es triangular inferior, para resolver posteriormente los sistemas: $Ly = b$ y $L^T x = y$.

$$A = LL^T \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^1 & & \\ l_2^1 & l_2^2 & \\ l_3^1 & l_3^2 & l_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1^1 & l_2^1 & l_3^1 \\ & l_2^2 & l_3^2 \\ & & l_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (l_1^1)^2 & l_1^1 l_2^1 & l_1^1 l_3^1 \\ l_1^1 l_2^1 & (l_2^1)^2 + (l_2^2)^2 & l_2^1 l_3^1 + l_2^2 l_3^2 \\ l_1^1 l_3^1 & l_2^1 l_3^1 + l_2^2 l_3^2 & (l_3^1)^2 + (l_3^2)^2 + (l_3^3)^2 \end{pmatrix}$$

Planteando el sistema y despejando los coeficientes

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 5
	Tema	Sistemas lineales (Caracterizar matriz, factorización, normas y Jacobi)	
	Examen	Febrero 2000	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{cases} 2 = (l_1^1)^2 & l_1^1 = \sqrt{2} \\ -1 = l_1^1 l_2^1 & l_2^1 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 = l_1^1 l_3^1 & l_3^1 = 0 \\ 2 = (l_2^1)^2 + (l_2^2)^2 & l_2^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 = l_2^1 l_3^1 + l_2^2 l_3^2 & l_3^2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 2 = (l_3^1)^2 + (l_3^2)^2 + (l_3^3)^2 & l_3^3 = \sqrt{\frac{4}{3}} \end{cases}$$

Se resuelven a continuación ambos subsistemas

$$Ly = b \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{12} \end{pmatrix}$$

$$L^T x = y \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ & & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{12} \end{pmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Apartado (c) Cálculo de Normas y Condicionamiento

La variación del segundo miembro viene dada por:

$$\delta b = (0 \ 0 \ 4)^T - (0.1 \ 0.1 \ 3.9)^T = (-0.1 \ -0.1 \ 0.1)^T$$

Calculando la inversa de **A** mediante adjuntos se llega a $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Aunque solo se pide la variación para $\|\cdot\|_1$, lo hacemos para todas, recordando que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \rightarrow \|\delta x\| \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \|x\|$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 4 de 5
	Tema	Sistemas lineales (Caracterizar matriz, factorización, normas y Jacobi)	
	Examen	Febrero 2000	
	Autor	César Menéndez Fernández	

	$\ \cdot\ _1$	$\ \cdot\ _2$	$\ \cdot\ _\infty$
A	4	$2 + \sqrt{2}$	4
b	4	4	4
A^{-1}	2	$1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$	2
$\text{cond}(A) = \kappa(A)$	8	$3 + 2\sqrt{2}$	8
δb	0.3	$0.1\sqrt{3}$	0.1
x	6	$\sqrt{14}$	3
$\kappa(A) \frac{\ \delta b\ }{\ b\ } \ x\ $	3.6	0.9943	0.6

Realizando las operaciones, se obtendría que $\tilde{x} = (1.1 \ 2.1 \ 3)^T \rightarrow \delta x = (-0.1 \ -0.1 \ 0)^T$, que verifica las acotaciones calculadas.

Apartado (d) Método de Jacobi

Dada la matriz **A** descompuesta como $A = D - E - F$, donde

$$(D)_i^j = a_i^j \delta_i^j, (E)_i^j = \begin{cases} -a_i^j & \text{si } i > j \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \text{ y } (F)_i^j = \begin{cases} -a_i^j & \text{si } i < j \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

el método de Jacobi se escribe como $x^{(N+1)} = Kx^{(N)} + c$, donde $K = D^{-1}(E + F)$ y $c = D^{-1}b$

Ene l ejemplo se tiene que $K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ y $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Para analizar la convergencia del método, se acude al radio espectral, puesto que $\|K\|_1 = \|K\|_\infty = 1$ y no permiten decidir.

$$P_K(x) = |K - xI| = \begin{vmatrix} -x & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -x & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -x \end{vmatrix} = -x^3 + \frac{1}{2}x \rightarrow \rho(K) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y el método converge.}$$

Noe s posible calcular l número de iteraciones necesarias con la norma uno, al ser $\|K\|_1 = 1$ y no poder aplicar la fórmula.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 5 de 5
	Tema	Sistemas lineales (Caracterizar matriz, factorización, normas y Jacobi)	
	Examen	Febrero 2000	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Al ser la matriz simétrica, se tiene que $\|K\|_2 = \sqrt{\rho(KK^T)} = \sqrt{\rho(K^2)} = \rho(K) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En este caso sí es posible utilizar la acotación $\|x - x^{(N)}\| \leq \frac{\|K\|^N}{1 - \|K\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$.

$$\frac{\|K\|_2^N}{1 - \|K\|_2} \|c\|_2 < 0.01 \rightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}^N}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} < 0.01 \rightarrow N > \frac{\ln\left(0.01\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)}{\ln \frac{1}{\sqrt{2}}} \rightarrow N = 17$$



UNIVERSIDAD DE OVIEDO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Asignatura

Cálculo Numérico

Página 6 de 6

Tema

Sistemas lineales (Caracterizar matriz, factorización, normas y Jacobi)

Examen

Febrero 2000

Autor

César Menéndez Fernández