Titulación: Ingeniero Geólogo

Asignatura: Análisis Numérico

Autor: César Menéndez

Ultima actualización: 29/10/2009

Sist. Lineales de Ecuaciones

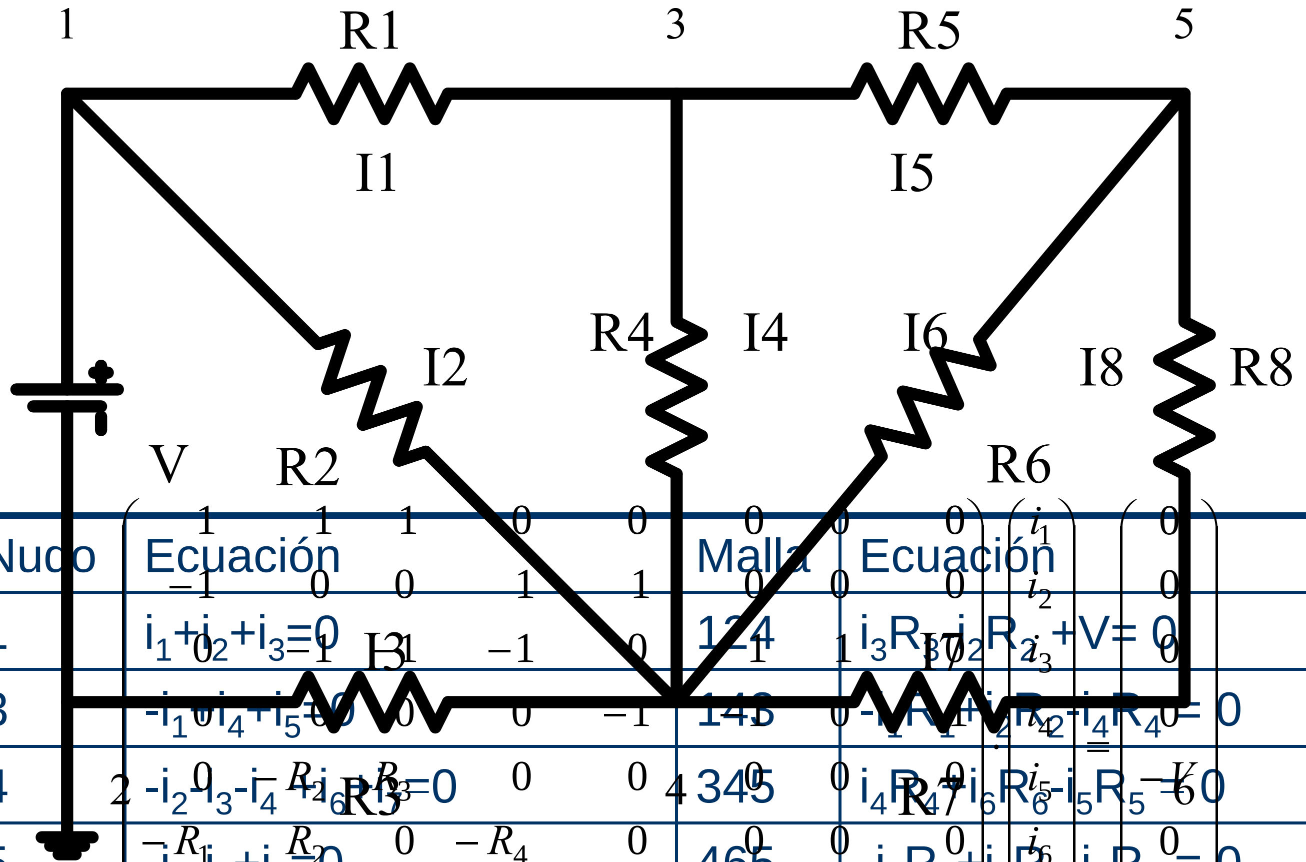
Planificación: 6 Teoría+4 Prácticas+2 Laboratorio

Materiales: MATLAB

Conocimientos previos: Conocimientos de Álgebra: valores y vectores propios, normas, sistemas lineales, determinantes, …

- Descripción
- Objetivos
- Temario
- Bibliografía

Motivación: Circuito eléctrico



Nudo	Ecuación	Malla	Ecuación
1	$i_1+i_2+i_3=0$	124	$i_3R_3-i_2R_2+V=0$
3	$-i_1+i_4+i_5=0$	143	$-i_1R_1+i_2R_2-i_4R_4=0$
4	$-i_2-i_3-i_4+i_6+i_7=0$	345	$i_4R_4+i_6R_6-i_5R_5=0$
5	$-i_5-i_6+i_8=0$	465	$-i_5R_6+i_7R_7-i_8R_8=0$
6	$-i_7-i_8=0$		

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_1 & R_2 & 0 & -R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & -R_5 & R_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_6 & R_7 & -R_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Objetivos

- Distinguir las dos grandes familias de métodos de resolución de sistemas, orígenes, ventajas e inconvenientes
- Entender el significado del **condicionamiento,** aprender a estimarlo.y conocer como afecta a los diferentes métodos.
- Utilizar la **eliminación gausiana** con sus diversas mejoras, así como familiarizarse con la terminología: eliminación progresiva, sustitución regresiva, pivote.
- Conocer el interés de los métodos de **factorización** en el cálculo de determinantes y matrices inversas.
- Saber qué condiciones debe cumplir un algoritmo iterativo para ser **consistente y convergente**.
- Conocer la descomposición matricial que origina los métodos de **Jacobi, Gauss-Seidel y relajación**, entendiendo las ventajas que habitualmente tienen los segundos sobre el primero.
- Interpretar el concepto de **relajación** y su relación con el radio espectral.

Temario

Cuestiones previas de análisis matricial

Tipos de matrices particulares - Valores propios - Reducción de operadores - Cociente de Rayleigh- Normas vectoriales y matriciales - Normas matriciales subordinadas - Clasificación de métodos

Métodos directos

Introducción - El método de eliminación de Gauss – Técnicas de pivoteo: parcial, escalado y total - Evaluación del número de operaciones - Interpretación matricial del método de Gauss - Método de Gauss-Jordan - Factorización matricial: LU, LDL' y LL' - Condicionamiento de un sistema lineal - Cotas de error - Aplicaciones al cálculo de la inversa y del determinante de una matriz

Métodos iterativos

Introducción - Sucesiones vectoriales y matriciales - Convergencia de un método iterativo - Velocidad media de convergencia - Test de parada - Métodos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel y relajación - Análisis de la convergencia - Comparación de los métodos directos con los métodos iterativos.

Definiciones elementales

Sea *A* un elemento perteneciente al espacio vectorial de las matrices cuadradas cuadrada de orden *n* sobre el cuerpo de los complejos: $\mathbf{A} \in M_n$

- El polinomio característico se define por $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$
- Los autovalores de A son las raíces del polinomio característico $\lambda / \exists x \neq 0 : \mathbf{A}x = \lambda x$
- El espectro de A es el conjunto de autovalores $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_i / P_{\mathbf{A}}(\lambda_i) = 0\}$
- Autovector *x* asociado al valor propio λ es todo vector no nulo verificando $(\mathbf{A} - \lambda I)x = 0 \leftrightarrow \mathbf{A}x = \lambda x$
- Radio espectral Radio espectral de A, , es el máximo de sus autovalores, en módulo $\rho(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i|$
- Traza es la suma de los términos de la diagonal $traza(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}) = \sum \lambda_i = \sum a_i^i$

T^mas^:

- tr(AB)=tr(BA) tr(A+B)=tr(A)+tr(B)
- |AB|=|BA|=|A| |B|

Tipos especiales de matrices (I)

Diagonal

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \quad i \neq j \Rightarrow a_i^j = 0$$

Tridiagonal

$$\left| i - j \right| > 1 \Rightarrow a_i^j = 0 \quad \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

Triangular Inf. (Sup)

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & & a_n^n \end{pmatrix} \quad i < j \Rightarrow a_i^j = 0$$

Hexember Inf. (Sup.)

$$i - j > 1 \Rightarrow a_i^j = 0 \quad \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & a_{n-1}^3 & \cdots & a_{n-1}^n \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

Tipos especiales de matrices (II)

- Regular: $|A| \neq 0$
- Simétrica: $A=A^T$ Hermítica: $A=A^*$ con $A^*=\mathrm{conj}(A^T)$
- Ortogonal: $A^{-1}=A^T$ Unitaria: $AA^*=A^*A=I \Leftrightarrow A^{-1}=A^*$
- Normal: $AA^T=A^TA$

- Definida positiva (negativa):
  $$\forall x \neq 0 \in \Re^n : x^T A x > 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_i \in \sigma(\mathbf{A}) : \lambda_i > 0$$
- Semidefinida positiva (negativa):
  $$\forall x \neq 0 \in \Re^n : x^T A x \geq 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_i \in \sigma(\mathbf{A}) : \lambda_i \geq 0$$
- Semidefinida negativa
  $$\forall x \neq 0 \in \Re^n : x^T A x \leq 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_i \in \sigma(\mathbf{A}) : \lambda_i \leq 0$$
- Definida negativa
  $$\forall x \neq 0 \in \Re^n : x^T A x < 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_i \in \sigma(\mathbf{A}) : \lambda_i < 0$$

Propiedades

- **T^ma^:** Si A es una matriz cuadrada, existe una matriz unitaria U tal que la matriz $U^{-1}AU$ es triangular
- **T^ma^:** Si A es una matriz normal, existe una matriz unitaria U tal que la matriz $U^{-1}AU$ es diagonal
- **T^ma^:** Si A es una matriz real, existen dos matrices ortogonales U y V tal que la matriz $U^{-1}AV$ es diagonal
- **T^ma^:** Si A es una matriz simétrica, existe una matriz ortogonal U tal que la matriz $U^{-1}AU$ es diagonal

- **T^ma^ de Rouché-Frobenius** Dado el sistema Ax=b
  - Solución única (Compatible determinado) ⇔ rango(A)=rango(Ab)=Nº incog.
  - Infinitas soluciones (Compatible indeterminado) ⇔ rango(A)=rango(Ab)<Nº incog
  - Sin solución única (Incompatible) ⇔ rango(A)<rango(Ab)

Normas vectoriales: definición y ejemplos

Se denomina norma vectorial a toda aplicación de un espacio vectorial en los reales que cumple las condiciones siguientes:

$$\|\cdot\| : \mathrm{E} \to \Re_+$$

- La norma de cualquier vector es mayor o igual que cero y solo se anula cuando el vector es el nulo

$$\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- La norma de un escalar por un vector es igual al valor absoluto del escalar por la norma del vector

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathrm{K} \wedge \forall x \in \mathrm{E}$$

- La norma de la suma es menor o igual a la suma de las normas

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in \mathrm{E}$$

Ejemplos en R^n:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \sup_{\mathrm{i=1,..n}} |x_i|$$

Normas vectoriales: Normas equivalentes

Dos normas $\|\circ\|_\alpha$ y $\|\circ\|_\beta$ son equivalentes cuando existen valores reales λ y μ tales que

$$\lambda\|\mathbf{x}\|_\alpha \le \|\mathbf{x}\|_\beta \le \mu\|\mathbf{x}\|_\alpha \quad \forall \mathbf{x}\in E$$

Todas las normas vistas son equivalentes en R^n , es más

- $\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_1 \le n\|\mathbf{x}\|_\infty$
- $\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty \quad \forall \mathbf{x}\in C^n$
- $\frac{1}{n}\|\mathbf{x}\|_1 \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_1$
- $\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1$

Demo

– Ejemplo

$$v=(45,-27,11,-1,39,26)\begin{cases}\|v\|_1=\sum_{i=1}^{n}|v_i|=45+27+11+1+39+26=149\\ \|v\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|v_i|^2}=\sqrt{45^2+27^2+11^2+1^2+39^2+26^2}=71.225\\ \|v\|_\infty=\sup_{\mathrm{i=1,..n}}|v_i|=\sup_{\mathrm{i=1,..n}}(45,27,11,1,39,26)=45\end{cases}$$

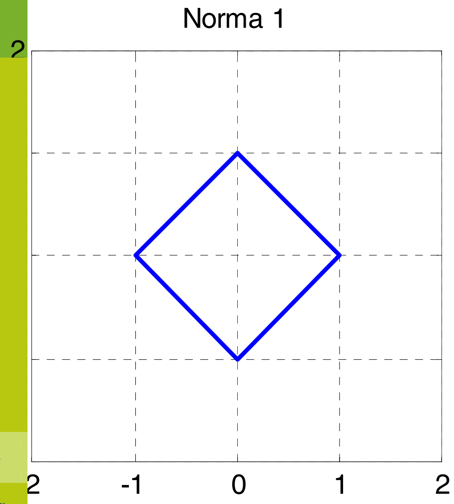
$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_1 \le n\|\mathbf{x}\|_\infty \rightarrow 45\le 149\le 6\times 45$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty \rightarrow 45\le 71.225\le \sqrt{6}\times 45$$

$$\frac{1}{n}\|\mathbf{x}\|_1 \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_1 \rightarrow \tfrac{1}{6}149\le 71.225\le \sqrt{6}\times 149$$

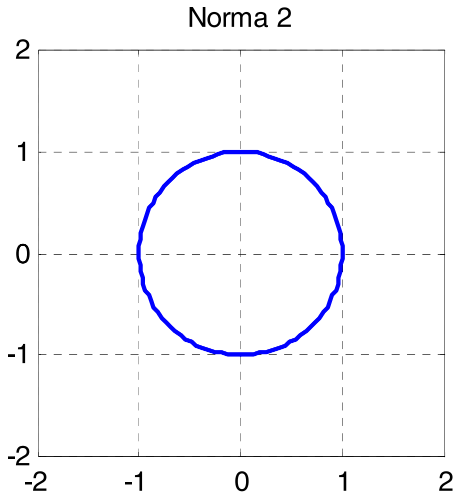
$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 \rightarrow 45\le 71.225\le 149$$

Normas vectoriales: significado geométrico

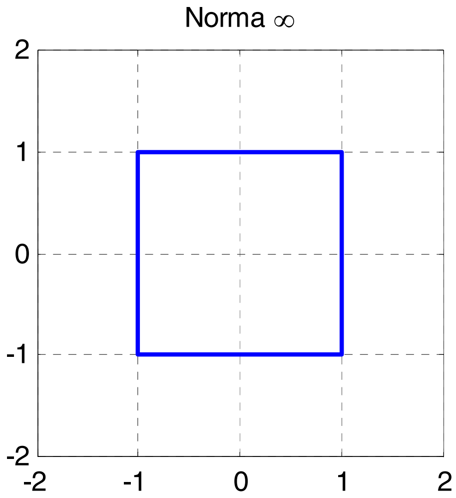


$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x| + |y|$$

$$\begin{cases} x+y=1 & x\geq 0 & y\geq 0 \\ -x+y=1 & x\leq 0 & y\geq 0 \\ -x-y=1 & x\leq 0 & y\leq 0 \\ x-y=1 & x\geq 0 & y\leq 0 \end{cases}$$



$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$



$$\|x\|_\infty = \sup_{\mathrm{i=1,..n}} |x_i| = \max\left(|x|,|y|\right)$$

Normas matriciales: definición y ejemplos

Se denomina norma matricial a toda aplicación del espacio vectorial de las matrices de orden n en los reales que cumple las condiciones siguientes:

$$\|\cdot\| : \mathrm{M}_n \to R_+$$

- La norma de cualquier matriz es mayor o igual que cero y solo se anula cuando la matriz es la nula

$$\|A\| \geq 0 \wedge \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = (0)$$

- La norma de un escalar por una matriz es igual al valor absoluto del escalar por la norma de la matriz

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \qquad \forall \lambda \in \mathrm{K} \wedge \forall A \in \mathrm{M_n}$$

- La norma de la suma es menor o igual a la suma de las normas

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \qquad \forall A, B \in \mathrm{M_n}$$

- La norma del producto es menor o igual que el producto de las normas

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \qquad \forall A, B \in \mathrm{M_n}$$

Ejemplo: Norma de Frobenius

$$\|A\|_E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

Normas matriciales subordinadas

Def.:Si $\|x\|$ es una norma vectorial sobre C^n entonces se define una norma matricial sobre el conjunto de las matrices cuadradas de orden n, denominada norma subordinada, mediante

$$\|A\| = \sup_{x\in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$$

Ejemplos:

- $\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|A\cdot x\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} \left|a_i^j\right|$ (máximo de columnas)
- $\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|A\cdot x\|_2 = \sqrt{\rho\left(A\cdot A^*\right)}$ (radio espectral de la normal)
- $\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|A\cdot x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_i^j\right|$ (máximo de filas)

Demo

Nota: las normas matriciales no verifican $\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \|A\|_1$ (ver ejemplo siguiente)

Normas 1: ejemplo

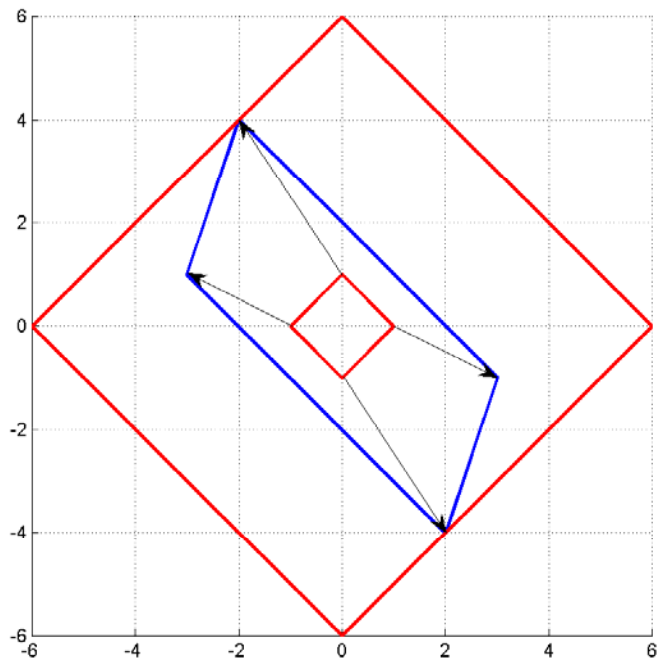
$$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{A}\|_1=\sup_{\|\mathbf{x}\|_1=1}\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}\|_1=\sup_{\|\mathbf{x}\|_1=1}\left\|\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\|_1=\sup_{\|\mathbf{x}\|_1=1}\left\|\begin{pmatrix}3x-2y\\ -x+4y\end{pmatrix}\right\|_1=$$

$$=\sup_{|x|+|y|=1}\left(|3x-2y|+|-x+4y|\right)\le\sup_{|x|+|y|=1}\left(2|x-y|+|x|+|-x+y|+3|y|\right)=$$

$$=2+0+1+3=6$$

$$\|\mathbf{A}\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i-1}^{n}\left|a_i^j\right|=\max\left(\{3+|-1|\},\{|-2|+|4|\}\right)=\max(4,6)=6$$



Normas 2: ejemplo

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2=\sup_{\|\mathbf{x}\|_2=1}\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}\|_2=\sup_{\alpha}\left\|\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right\|_2=\sup_{\alpha}\left\|\begin{pmatrix}3\cos\alpha-2\sin\alpha\\ -\cos\alpha+4\sin\alpha\end{pmatrix}\right\|_2=$$

$$=\sup_{\alpha}\sqrt{(3\cos\alpha-2\sin\alpha)^2+(-\cos\alpha+4\sin\alpha)^2}=$$

$$=\sup_{\alpha}\sqrt{10+10\sin^2\alpha-20\sin\alpha\cos\alpha}=\sup_{\alpha}\sqrt{10+10\sin^2\alpha-10\sin 2\alpha}=$$

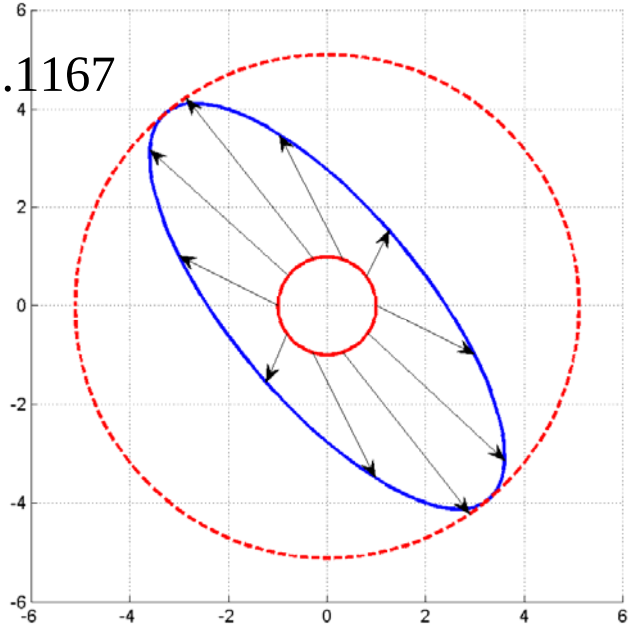
$$=5.1167$$

$$\|\mathbf{A}\|_2=\sqrt{\rho\left(A\cdot A^*\right)}_{1\le j\le n}=\sqrt{26.1803}=5.1167$$

$$A\cdot A^*=\begin{pmatrix}13 & -11\\ -11 & 17\end{pmatrix}$$

$$P_x\left(A\cdot A^*\right)=x^2-30x+100$$

$$\sigma\left(A\cdot A^*\right)=\{3.8197, 26.1803\}$$



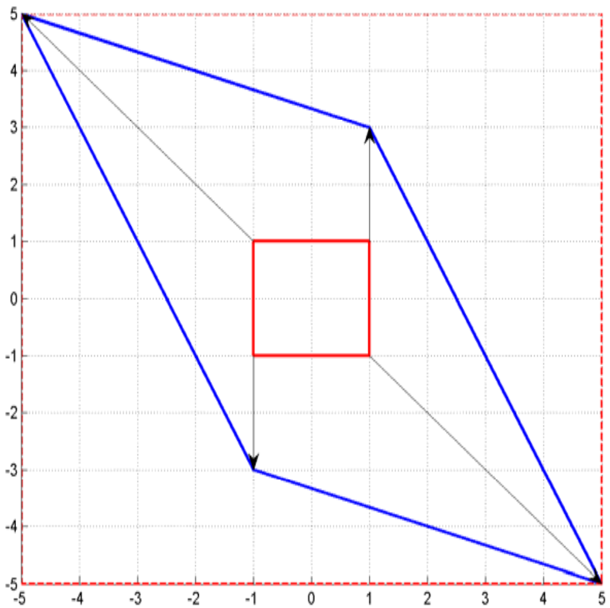
Normas infinito: ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \left\| \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \left\| \begin{pmatrix} 3x-2y \\ -x+4y \end{pmatrix} \right\|_\infty =$$

$$= \sup_{\max\{|x|,|y|\}=1} \left(|3x-2y|, |-x+4y|\right) \le \sup_{\max\{|x|,|y|\}=1} (5,5) = 5$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_i^j| = \max\left(\{3+|-2|\}, \{|-1|+|4|\}\right) = \max(5,5) = 5$$



$$\begin{cases} \|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|A\cdot x\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_i^j| = 6 \\ \|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|A\cdot x\|_2 = \sqrt{\rho\left(A\cdot A^*\right)} = 5.1167 \\ \|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|A\cdot x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_i^j| = 5 \end{cases}$$

Clasificación de los métodos

- Métodos directos
  - Convierten el sistema inicial en otro u otros equivalentes, pero más simples de resolver
  - Operaciones de equivalencia
    - Multiplicar una ecuación por un escalar
    - Intercambiar el orden de dos ecuaciones
    - Sumar una ecuación a otra
  - Obtienen la solución "exacta" en un número finito de pasos (dependen sólo del orden del sistema)
- Métodos iterativos
  - Transforman el sistema inicial para poder aplicar punto fijo
  - El número de pasos para obtener la solución "aproximada" depende del error admisible

Representación matricial

$$\left.\begin{array}{c} a_1^1x_1 + a_1^2x_2 + a_1^3x_3 + a_1^4x_4 + \cdots a_1^n x_n = b_1 \\ a_2^1x_1 + a_2^2x_2 + a_2^3x_3 + a_2^4x_4 + \cdots a_2^n x_n = b_2 \\ a_3^1x_1 + a_3^2x_2 + a_3^3x_3 + a_3^4x_4 + \cdots a_3^n x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_n^1x_1 + a_n^2x_2 + a_n^3x_3 + a_n^4x_4 + \cdots a_n^n x_n = b_n \end{array}\right\}$$

Sistema de Ecuaciones

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Representación Matricial

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n & b_2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n & b_n \end{array}\right)$$

Matriz Ampliada

Sistemas "más simples": Diagonales y triangulares

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_1^1} \\ x_2 = \frac{b_2}{a_2^2} \\ x_3 = \frac{b_3}{a_3^3} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n}{a_n^n} \end{cases}$$

- Operaciones: n÷

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_1^1} b_1 \\ x_2 = \frac{1}{a_2^2}\left(b_2 - a_2^1 x_1\right) \\ x_3 = \frac{1}{a_3^3}\left(b_3 - a_3^1 x_1 - a_3^2 x_2\right) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_n^n}\left(b_2 - \sum_{k=1}^{n-1} a_n^k x_k\right) \end{cases}$$

- Operaciones:
  - n÷
  - ½n(n-1)×
  - ½n(n-1)+
- Inferior: descenso
- Superior: remonte

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-2}^{n-2} & a_{n-2}^{n-1} & a_{n-2}^n \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^{n-1} & a_{n-1}^n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_n = \frac{1}{a_n^n} b_n \\ x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1}^{n-1}}\left(b_{n-1} - a_{n-1}^n x_n\right) \\ x_{n-2} = \frac{1}{a_{n-2}^{n-2}}\left(b_{n-2} - a_{n-2}^{n-1} x_{n-1} - a_{n-2}^n x_n\right) \\ \vdots \\ x_i = \frac{1}{a_i^i}\left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_i^k x_k\right) \end{cases}$$

Método de Cramer

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathbf{A}x = b \rightarrow x_k = \frac{|\mathbf{A}_k|}{|\mathbf{A}|}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^k & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^k & \cdots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^k & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^k & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} \quad |\mathbf{A}_k| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & b_1 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & b_2 & \cdots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & b_3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & b_n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

- Cálculo del determinante

$$|\mathbf{A}| = a_1^1 A_1^{n-1} - a_2^1 A_2^{n-1} + a_3^1 A_3^{n-1} + \cdots (-1)^{n+1} a_n^1 A_n^{n-1} \quad A_1^{n-1} = \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} \quad A_2^{n-1} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

- Operaciones
  - n+1 determinantes de orden n con n cocientes
  - Cada uno genera n determinantes de orden n-1 junto con (n-1) sumas y n productos
- Total
  - Productos: (n+1)!
  - Sumas n!

Un sistema de orden 9 requiere 3628800 productos
Uno de orden 100, 9.3326×10^{157}

Método de Gauss

- El sistema equivalente es triangular superior
- Opera para anular los coeficientes por debajo de la diagonal
  - Anular el elemento de la fila *j*-esima bajo la primera diagonal

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n & b_2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_j^1 & a_j^2 & a_j^3 & \cdots & a_j^n & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n & b_n \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} m = -\dfrac{a_j^1}{a_1^1} \\ j^{\text{a}} \leftarrow j^{\text{a}} + m \times 1^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n & b_2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \bar{a}_j^2 & \bar{a}_j^3 & \cdots & \bar{a}_j^n & \bar{b}_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n & b_n \end{array}\right)$$

    - Operaciones: 1 cociente, n productos y n sumas para (n-1) filas
  - Anular el elemento de la fila *j*-esima bajo la diagonal *i*-esima

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_1^1 & \cdots & a_1^{i-1} & a_1^i & \cdots & a_1^n & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i-1}^{i-1} & a_{i-1}^i & \cdots & a_{i-1}^n & b_{i-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_i^i & \cdots & a_i^n & b_i \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i+1}^i & \cdots & a_{i+1}^n & b_{i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_j^i & \cdots & a_j^n & b_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^i & \cdots & a_n^n & b_n \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} m = -\dfrac{a_j^i}{a_i^i} \\ j^{\text{a}} \leftarrow j^{\text{a}} + m \times i^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} a_1^1 & \cdots & a_1^{i-1} & a_1^i & \cdots & a_1^n & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i-1}^{i-1} & a_{i-1}^i & \cdots & a_{i-1}^n & b_{i-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_i^i & \cdots & a_i^n & b_i \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i+1}^i & \cdots & a_{i+1}^n & b_{i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_j^n & \bar{b}_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^i & \cdots & a_n^n & b_n \end{array}\right)$$

    - Operaciones: 1 cociente, n-i productos y n-i sumas para (n-i-1) filas

Operaciones

- Convertir el sistema en triangular

$$\div \quad \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}1=\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)=\sum_{i=1}^{n-1}i=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n}{2}$$

$$+,\times \quad \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(n-i)=\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2=\sum_{i=1}^{n-1}i^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{2n^3-3n^2+n}{6}$$

- Resolución de un sistema triangular

$$\div \quad n$$

$$+,\times \quad \frac{n^2-n}{2}$$

- Total

$$\div \quad \frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n^2+n}{2}=O\left(\frac{n^2}{2}\right)$$

$$+,\times \quad \frac{2n^3-3n^2+n}{6}+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^3-n}{3}=O\left(\frac{n^3}{3}\right)$$

- Un sistema de orden 9 requiere 240 productos
- Un sistema de orden 100 requiere 333.300 productos

Ejemplo del método de Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & -10 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & -22 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} = \\ 2^{a} - \frac{-1}{2}1^{a} \\ 3^{a} - \frac{-1}{2}1^{a} \\ 4^{a} - \frac{-2}{2}1^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -\frac{5}{2} & -7 & -\frac{35}{2} \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & -4 & -\frac{17}{2} \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \end{array}\right) : \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -\frac{5}{2} & -7 & -\frac{35}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{19}{3} & -\frac{43}{3} \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & 13 & \frac{31}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} = \\ = \\ = \\ 4^{a} - \frac{21/2}{5/3} 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -\frac{5}{2} & -7 & -\frac{35}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{19}{3} & -\frac{43}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{529}{10} & \frac{529}{5} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \left(-15 - \left(4x_2 + 1x_3 - 4x_4\right)\right) \big/ 2 = 1 \\ x_2 = \left(-\frac{35}{2} - \left(-\frac{5}{2}x_3 - 7x_4\right)\right) \big/ 3 = -2 \\ x_3 = \left(-\frac{43}{3} - \left(-\frac{19}{3}x_4\right)\right) \big/ \frac{5}{3} = -1 \\ x_4 = 2 \end{array}\right.$$

Justificación

- Se denomina pivote al término de la diagonal que anula las columnas
- Debido a los errores inherentes a la representación limitada de un número en el ordenador, es conveniente no dividir por números "pequeños". Interesa que el pivote sea (en valor absoluto) muy alto para disminuir la propagación de errores en la división.
- Ejemplo:

$$\begin{cases} 0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ 5.291x_1 - 6.13x_2 = 46.78 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Resolución con 4 cifras decimales

$$\mathbf{A}x = b \to \left\{ m = \frac{5.291}{0.003} = 1763.\widehat{6} \approx 1764 \right\} \to \left(\begin{array}{cc|c} 0.003 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{cases} 0.003x_1 = 59.17 - 59.2 \to x_1 = -10 \\ x_2 \approx 1.001 \to 59.14 \times 1.001 \approx 59.2 \end{cases}$$

Resolución con 4 cifras decimales e intercambio de filas

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.13 & 46.78 \\ 0.003 & 59.14 & 59.17 \end{array}\right) \to \left\{ m = \frac{-0.003}{5.291} \approx -5.670 \cdot 10^{-4} \right\} \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.13 & 46.78 \\ 0 & 59.14 & 59.14 \end{array}\right) \to \begin{cases} 5.291x_1 = 46.78 + 6.13 \to x_1 = 10 \\ x_2 \approx 1.000 \to -6.13 \times 1.000 \approx -6'13 \end{cases}$$

Algoritmo de Gauss y modificaciones

- ENTRADA: Matriz ampliada A
- SALIDA: Solución x, o mensaje de indeterminación
- ALGORITMO

1. Repetir para todas las filas {Proceso de triangularización}
2. Encontrar el pivote y su fila
3. Si el pivote es nulo PARAR 'No existe solución única'
4. Si la fila/columna actual no es la del pivote, intercambiarlas
5. Repetir desde la fila actual hasta la ultima
6. Calcular el coeficiente m
7. Anular el elemento combinando ambas filas
8. Resolver el sistema triangular resultante (Sustitución regresiva)

Técnicas de pivoteo (I)

Pivote simple: **Algoritmo**

Se intercambian filas para tomar como pivote el mayor término en valor absoluto de la columna bajo la diagonal

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pivote doble: **Algoritmo**

Se intercambian filas y columnas para tomar como pivote el mayor término en valor absoluto de la submatriz

Se altera el orden de las soluciones)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_1 \leftrightarrow x_3} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Pivote escalado: **Algoritmo**

Actúa como el pivote simple pero tomando como término de comparación el valor ponderado de la columna, esto es, dividido entre el máximo de la fila

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -5/6 \\ 3/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Técnicas de pivoteo: justificación práctica

Sistema: $\begin{cases} \left(0.003x_1 + 59.14x_2 = 59.17\right)\times 10^4 \\ 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{cases}$ (resolución con 4 cifras)

Pivote simple $\left(\begin{array}{cc|c} 30 & 591400 & 591700 \\ 5.291 & -6.13 & 46.78 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} \rightarrow x_1 = -10 \\ x_2 \approx 1.001 \end{cases}$

Pivote escalado $\left\{\begin{array}{l} p_1 = \dfrac{30}{\max\left(30,591400\right)} \approx 5.073\cdot 10^{-5} \\ p_2 = \dfrac{5.291}{\max\left(5.291,6.13\right)} \approx 0.863 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \rightarrow x_1 = 10 \\ x_2 \approx 1.000 \end{cases}$

Sistema: $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 37 \\ x_1 + 5x_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ (resolución con 4 cifras)

Pivote simple $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 37 \\ 1 & 5 & 15 \end{array}\right) \rightarrow \{m = -0.3333\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 37 \\ 0 & 2.667 & 2.67 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} \rightarrow x_1 = 9.997 \\ x_2 \approx 1.001 \end{cases}$

Pivote doble $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 37 \\ 5 & 1 & 15 \end{array}\right) \rightarrow \{m = -0.7143\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 37 \\ 0 & -1.143 & -11.43 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} \rightarrow x_2 = 1.00 \\ x_1 \approx 10.00 \end{cases}$

Matriz singular

- Sistema compatible indeterminado o incompatible $\Rightarrow$ No hay solución única
- rango(A)<Nº incógnitas
- El pivote se anula

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{c} = \\ 2^a-(2)1^a \\ 3^a-(3)1^a \\ 4^a-(-1)1^a \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 15 & 8 \end{array}\right)$$

$$\to \left\{\begin{array}{c} = \\ = \\ 3^a-(4)2^a \\ 4^a-(-3)2^a \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right)$$

Ejemplo: Gauss sin pivote)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & -10 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & -22 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} = \\ 2^a - \frac{-1}{2}1^a \\ 3^a - \frac{-1}{2}1^a \\ 4^a - \frac{-2}{2}1^a \end{matrix}\right\} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -2.5 & -7 & -17.5 \\ 0 & -1 & 2.5 & -4 & -8.5 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} = \\ = \\ 3^a - \frac{-1}{3}2^a \\ 4^a - \frac{9}{3}2^a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & 2.5 & -7 & -17.5 \\ 0 & 0 & 1.667 & -6.333 & -14.33 \\ 0 & 0 & 10.5 & 13 & 15.5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} = \\ = \\ = \\ 4^a - \frac{10.5}{1.667}3^a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & 2.5 & -7 & -17.5 \\ 0 & 0 & 1.667 & -6.333 & -14.33 \\ 0 & 0 & 0 & 52.89 & 105.8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\left(-15 - 4x_2 - 1x_3 + 4x_4\right) \\ x_2 = \frac{1}{3}\left(-17.5 - 2.5x_3 - 7x_4\right) \\ x_3 = \frac{1}{1.667}\left(-14.33 + 6.333x_4\right) \\ x_4 = \frac{105.8}{52.89} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.99 \\ x_2 = -1.997 \\ x_3 = -0.9958 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Descripción
Objetivos
Temario
Cuestiones previas
Métodos Directos
- Método de Gauss
- Técnicas de pivoteo
-Gauss-Jordan
-Factorización
-Condicionamiento
-Aplicaciones
Métodos Iterativos
Bibliografía

Ejemplo: Gauss pivote simple (4 decimales)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & -10 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & -22 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} = \\ 2^a - \frac{-1}{2}1^a \\ 3^a - \frac{-1}{2}1^a \\ 4^a - \frac{-2}{2}1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -2.5 & -7 & -17.5 \\ 0 & -1 & 2.5 & -4 & -8.5 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \end{array}\right)$$

$$\underset{4^a}{\overset{2^a}{\rightleftarrows}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & -1 & 2.5 & -4 & -8.5 \\ 0 & 3 & -2.5 & -7 & -17.5 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} = \\ = \\ 3^a - \frac{-1}{9}2^a \\ 4^a - \frac{3}{9}2^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & 0 & 2.833 & -4.889 & -12.61 \\ 0 & 0 & -3.5 & -4.334 & -5.170 \end{array}\right)$$

$$\underset{4^a}{\overset{3^a}{\rightleftarrows}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & 0 & -3.5 & -4.889 & -12.61 \\ 0 & 0 & 2.833 & -4.889 & -12.61 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} = \\ = \\ = \\ 4^a - \frac{2.833}{-3.5}3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & 0 & -3.5 & -4.334 & -5.170 \\ 0 & 0 & 0 & -8.397 & -16.79 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}\left(-15 - 4x_2 - 1x_3 + 4x_4\right) \\ x_2 = \frac{1}{9}\left(-37 - 3x_3 + 8x_4\right) \\ x_3 = \frac{1}{-3.5}\left(-5.17 + -4.334x_4\right) \\ x_4 = \frac{-16.79}{-8.397} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -0.9994 \\ x_4 = 2 \end{array}\right.$$

Ejemplo: Gauss pivote doble (4 decimales)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & -10 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow[{[2,1,3,4]}]{\substack{F:1^a\leftrightarrow 4^a \\ C:1^a\leftrightarrow 2^a}} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 2 & -4 & -22 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & -10 \\ -3 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & -4 & -15 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} = \\ 2^a - \frac{1}{5}1^a \\ 3^a - \frac{-3}{5}1^a \\ 4^a - \frac{4}{5}1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 2 & -4 & -22 \\ 0 & -0.6 & -3.4 & -4.2 & -5.6 \\ 0 & -2.2 & 3.2 & -4.4 & -14.2 \\ 0 & 3.6 & -0.6 & -0.8 & -2.6 \end{array}\right) \xrightarrow[{[2,4,3,1]}]{\substack{F:2^a\leftrightarrow 3^a \\ C:2^a\leftrightarrow 4^a}} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -4 & 2 & -2 & -22 \\ 0 & -4.4 & 3.2 & -2.2 & -14.2 \\ 0 & -4.2 & -3.4 & -0.6 & -5.6 \\ 0 & -0.8 & -0.6 & 3.6 & -2.6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} = \\ = \\ 3^a - \frac{4.2}{4.4}2^a \\ 4^a - \frac{0.8}{4.4}2^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -4 & 2 & -2 & -22 \\ 0 & -4.4 & 3.2 & -2.2 & -14.2 \\ 0 & 0 & -6.454 & 1.5 & 7.95 \\ 0 & 0 & -1.182 & 4 & 5.182 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} = \\ = \\ = \\ 4^a - \frac{1.182}{6.454}3^a \end{array}\right\} \xrightarrow[{[2,4,3,1]}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -4 & 2 & -2 & -22 \\ 0 & -4.4 & 3.2 & -2.2 & -14.2 \\ 0 & 0 & -6.454 & 1.5 & 7.95 \\ 0 & 0 & 0 & 3.725 & 3.726 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{5}\left(-22+4x_4-2x_3+2x_1\right) \\ x_4 = \frac{1}{-4.4}\left(-14.2-3.2x_3+2.2x_1\right) \\ x_3 = \frac{1}{-6.454}\left(7.95-1.5x_1\right) \\ x_1 = \frac{3.726}{3.725} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -0.9994 \\ x_4 = 2 \end{array}\right.$$

Ejemplo: Gauss pivote escalado

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & -10 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2/4 \\ 1/5 \\ 1/3 \\ 2/5 \end{bmatrix}} \left\{\begin{array}{c} = \\ 2^a + 0.5 \times 1^a \\ 3^a + 0.5 \times 1^a \\ 4^a + 1 \times 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -2.5 & -7 & -17.5 \\ 0 & -1 & 2.5 & -4 & -8.5 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2^o \leftrightarrow 4^a]{\begin{bmatrix} 3/7 \approx 0.4286 \\ 1/4 = 0.25 \\ 9/9 = 1 \end{bmatrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & -4 & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{5}{2} & -7 & -\frac{35}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} = \\ = \\ 3^a - \frac{-1}{9} 2^a \\ 4^a - \frac{3}{9} 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & 0 & 2.833 & -4.889 & -12.61 \\ 0 & 0 & 3.5 & -4.334 & -5.17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3^o \leftrightarrow 4^a]{\begin{bmatrix} 2.833/4.889 \approx 0.5795 \\ 3.5/4.334 = 0.8076 \end{bmatrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & 0 & 3.5 & -4.334 & -5.17 \\ 0 & 0 & 2.833 & -4.889 & -12.61 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} = \\ = \\ = \\ 4^a - \frac{2.833}{3.5} 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \\ 0 & 0 & 2.833 & -4.889 & -12.61 \\ 0 & 0 & 0 & -8.397 & -16.79 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/2\left(-15 - 4x_2 - 1x_3 + 4x_4\right) \\ x_2 = 1/9\left(-37 - 3x_3 + 8x_4\right) \\ x_3 = 1/2.833\left(-12.61 + 4.889x_4\right) \\ x_4 = -16.79/-8.397 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -0.9994 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Método de Gauss-Jordan

- El sistema equivalente es diagonal
- Opera para anular los coeficientes por encima y por debajo de la diagonal
  - Anular el elemento de la fila *j*-esima bajo la diagonal *i*-esima

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_1^1 & \cdots & 0 & a_1^i & \cdots & a_1^n & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i-1}^{i-1} & a_{i-1}^i & \cdots & a_{i-1}^n & b_{i-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_i^i & \cdots & a_i^n & b_i \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i+1}^i & \cdots & a_{i+1}^n & b_{i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_j^i & \cdots & a_j^n & b_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^i & \cdots & a_n^n & b_n \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} m = -\dfrac{a_j^i}{a_i^i} \\ j^{a} \leftarrow j^{a} + m \times i^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} a_1^1 & \cdots & 0 & a_1^i & \cdots & a_1^n & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{i-1}^{i-1} & a_{i-1}^i & \cdots & a_{i-1}^n & b_{i-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_i^i & \cdots & a_i^n & b_i \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i+1}^i & \cdots & a_{i+1}^n & b_{i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \overline{a}_j^n & \overline{b}_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^i & \cdots & a_n^n & b_n \end{array}\right)$$

  - Operaciones: 1 cociente, n-i productos y n-i sumas para (n-1) filas

- Total de operaciones

$$\div \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 1 + n == \frac{n^2+n}{2}$$

$$\times,+ \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} (n-i) = \frac{n(n-1)^2}{2} = \frac{n^3-2n^2+n}{2}$$

- Un sistema de 9(100) ecuaciones requiere 288 (490.000)productos

Ejemplo: Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & -10 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & -22 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} = \\ 2^a - \frac{-1}{2}1^a \\ 3^a - \frac{-1}{2}1^a \\ 4^a - \frac{-2}{2}1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -\frac{5}{2} & -7 & -17.5 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & -4 & -8.5 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & -37 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 1^a - \frac{4}{3}2^a \\ = \\ 3^a - \frac{-1}{3}2^a \\ 4^a - \frac{9}{3}2^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 4.333 & 5.331 & 8.333 \\ 0 & 3 & -2.5 & -7 & -17.5 \\ 0 & 0 & 1.667 & -6.333 & -14.33 \\ 0 & 0 & 10.5 & 13 & 15.5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 1^a - \frac{4.333}{1.667}3^a \\ 2^a - \frac{-2.5}{1.667}3^a \\ = \\ 4^a - \frac{10.5}{1.667}3^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 21.79 & 45.57 \\ 0 & 3 & 0 & 16.5 & -39 \\ 0 & 0 & 1.667 & -6.333 & -14.33 \\ 0 & 0 & 0 & 52.89 & 105.8 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 1^a - \frac{21.79}{52.89}4^a \\ 2^a - \frac{16.5}{52.89}4^a \\ 3^a - \frac{-6.333}{52.89}4^a \\ = \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 1.98 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -5.99 \\ 0 & 0 & 1.667 & 0 & -1.67 \\ 0 & 0 & 0 & 52.89 & 105.8 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0.99 \\ x_2 = -1.997 \\ x_3 = -1.002 \\ x_4 = 2 \end{array}\right.$$

Intrepretación matricial de Gauss sin pivoteo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-a_2^1}{a_1^1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-a_3^1}{a_1^1} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-a_n^1}{a_1^1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ 0 & \bar{a}_2^2 & \bar{a}_2^3 & \cdots & \bar{a}_2^n \\ 0 & \bar{a}_3^2 & \bar{a}_3^3 & \cdots & \bar{a}_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bar{a}_n^2 & \bar{a}_n^3 & \cdots & \bar{a}_n^n \end{pmatrix} \leftrightarrow L_1 A = U_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{-a_3^2}{a_2^2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{-a_n^1}{a_2^2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ 0 & \bar{a}_2^2 & \bar{a}_2^3 & \cdots & \bar{a}_2^n \\ 0 & \bar{a}_3^2 & \bar{a}_3^3 & \cdots & \bar{a}_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bar{a}_n^2 & \bar{a}_n^3 & \cdots & \bar{a}_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^n \\ 0 & \bar{a}_2^2 & \bar{a}_2^3 & \cdots & \bar{a}_2^n \\ 0 & 0 & \tilde{a}_3^3 & \cdots & \tilde{a}_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \tilde{a}_n^3 & \cdots & \tilde{a}_n^n \end{pmatrix} \leftrightarrow L_2 U_1 = U_2$$

$$L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_2 L_1 A = U_n$$

- T^ma^: Las matrices verifican L_k verifican $(L_k)^{-1}=2I-L_k$

Demo

Factorización

- Tma: El producto de matrices triangulares inferiores (superiores) es una matriz triangular inferior (superior) [Demo]
- Tma: La inversa de una matriz triangular inferior (superior) es una matriz triangular inferior (superior) [Demo]

$$L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_2L_1A=U_n \rightarrow \overline{L}A=U \rightarrow A=\overline{L}^{-1}U=LU$$

- Doodlittle (Matrices regulares): $A=L\times U$
  - L es triangular inferior con diagonal unitaria
  - U es triangular superior

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{U}\cdot x=b\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{L}\cdot y=b\\ \mathbf{U}\cdot x=y\end{cases}$$

- Crout (Matrices simétricas): $A=L\times D\times L^T$
  - L es triangular inferior con diagonal unitaria
  - D es diagonal

$$\mathbf{L}\cdot D\cdot\mathbf{L}^T\cdot x=b\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{L}\cdot y=b\\ D\cdot z=y\\ \mathbf{L}^T\cdot x=z\end{cases}$$

- Choleski (Matrices definidas positivas): $A=L\times L^T$
  - L es triangular inferior con diagonal de términos positivos no necesariamente unitarios

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^T\cdot x=b\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{L}\cdot y=b\\ \mathbf{L}^T\cdot x=y\end{cases}$$

Interpretación matricial del intercambio de filas y columnas

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\xrightarrow[Fila/Columna:1\leftrightarrow 2]{Intercambio}M_1^2=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}a_1^1&a_1^2&a_1^3&\cdots&a_1^n\\a_2^1&a_2^2&a_2^3&\cdots&a_2^n\\a_3^1&a_3^2&a_3^3&\cdots&a_3^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n^1&a_n^2&a_n^3&\cdots&a_n^n\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}M_1^2A=\begin{pmatrix}a_2^1&a_2^2&a_2^3&\cdots&a_2^n\\a_1^1&a_1^2&a_1^3&\cdots&a_1^n\\a_3^1&a_3^2&a_3^3&\cdots&a_3^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n^1&a_n^2&a_n^3&\cdots&a_n^n\end{pmatrix}\\[2em] AM_1^2=\begin{pmatrix}a_1^2&a_1^1&a_1^3&\cdots&a_1^n\\a_2^2&a_2^1&a_2^3&\cdots&a_2^n\\a_3^2&a_3^1&a_3^3&\cdots&a_3^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n^2&a_n^1&a_n^3&\cdots&a_n^n\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

Propiedades: $M_i^j M_k^l = M_{ij}^{kl}$ $\quad M_{i\cdots j}^{k\cdots l}=M \rightarrow M^{-1}=M^T$

Demo

Factorización de Doodlittle: $(L\times U)x=Mb$

Factorización directa

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2^1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_n^1 & l_n^2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \cdots & u_1^n \\ 0 & u_2^2 & \cdots & u_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_n^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \cdots & u_1^{n-1} & u_1^n \\ l_2^1 u_1^1 & l_2^1 u_1^2 + u_2^2 & \cdots & l_2^1 u_1^{n-1} + u_2^{n-1} & l_2^1 u_1^n + u_2^n \\ l_3^1 u_1^1 & l_3^1 u_1^2 + l_3^2 u_2^2 & \cdots & \sum_{k=1}^{2} l_3^k u_k^{n-1} + u_3^{n-1} & \sum_{k=1}^{2} l_3^k u_k^n + u_3^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_n^1 u_1^1 & \sum_{k=1}^{1} l_n^k u_k^n + l_n^2 u_2^2 & \cdots & \sum_{k=1}^{n-2} l_n^k u_k^n + l_n^{k-1} u_{k-1}^{k-1} & \sum_{k=1}^{n-1} l_n^{k1} u_k^2 + u_n^n \end{pmatrix}$$

Algoritmo

Ejemplo (4 cifras)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0'3333 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2'667 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0'3333 & 1 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 37 \\ 15 \end{pmatrix} \to y = \begin{pmatrix} 37 \\ 2'67 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2'667 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 37 \\ 2'67 \end{pmatrix} \to x = \begin{pmatrix} 9'997 \\ 1'001 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Factorización de Crout: $(L\times D\times L^T)Mx=Mb$

Factorización directa

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2^1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_n^1 & l_n^2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_2^1 & \cdots & l_n^1 \\ 0 & 1 & \cdots & l_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^1 l_2^1 & d_1^1 l_3^1 & \cdots & d_1^1 l_n^1 \\ & \left(l_2^1\right)^2 d_1^1 + d_2^2 & l_2^1 d_1^1 l_3^1 + d_2^2 l_3^2 & \cdots & l_2^1 d_1^1 l_n^1 + d_2^2 l_n^2 \\ & & \sum_{k=1}^{2} \left(l_3^k\right)^2 d_k^k + d_3^3 & \cdots & \sum_{k=1}^{2} l_3^k d_k^k l_n^k + d_3^3 l_n^3 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & \cdots & \sum_{k=1}^{n-1} \left(l_n^k\right)^2 d_k^k + d_n^n \end{pmatrix}$$

Algoritmo

Ejemplo (4 cifras)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 75 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2'333 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -11'33 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2'333 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2'333 & 1 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 37 \\ 75 \end{pmatrix} \to y = \begin{pmatrix} 37 \\ -11'32 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -11'33 \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} 37 \\ -11'32 \end{pmatrix} \to z = \begin{pmatrix} 12'33 \\ 0'9991 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2'333 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 12'33 \\ 0'9991 \end{pmatrix} \to x = \begin{pmatrix} 9'999 \\ 0'9991 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Factorización de Choleski: $(L \times L^T)x = b$

Factorización directa

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2^1 & l_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_n^1 & l_n^2 & \cdots & l_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1^1 & l_2^1 & \cdots & l_n^1 \\ 0 & l_2^2 & \cdots & l_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_n^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(l_1^1\right)^2 & l_1^1 l_2^1 & l_1^1 l_3^1 & \cdots & l_1^1 l_n^1 \\ & \left(l_2^1\right)^2 + \left(l_2^2\right)^2 & l_2^1 l_3^1 + l_2^2 l_3^2 & \cdots & l_2^1 l_n^1 + l_2^2 l_n^2 \\ & & \sum_{k=1}^{2} \left(l_3^k\right)^2 + \left(l_3^3\right)^2 & \cdots & \sum_{k=1}^{2} l_3^k l_n^k + l_3^3 l_n^3 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & \cdots & \sum_{k=1}^{n-1} \left(l_n^k\right)^2 + \left(l_n^n\right)^2 \end{pmatrix}$$

Algoritmo

Ejemplo (4 cifras)

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2'646 & \\ -0'3779 & 3'586 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2'646 & -0'3779 \\ & 3'586 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 2'646 & \\ -0'3779 & 3'586 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 69 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow y = \begin{pmatrix} 26'08 \\ 3'586 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2'646 & -0'3779 \\ & 3'586 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 26'08 \\ 3'586 \end{pmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Operaciones

	Sumas	Productos	Cocientes
Cramer	$O(n!)$	$O(n+1!)$	$O(n)$
Gauss	$\frac{1}{3}O(n^3)$	$\frac{1}{3}O(n^3)$	$\frac{1}{2}O(n^2)$
G-Jordan	$\frac{1}{2}O(n^3)$	$\frac{1}{2}O(n^3)$	$\frac{1}{2}O(n^2)$
Doolitle	$\frac{1}{2}O(n^3)$	$\frac{1}{2}O(n^3)$	$\frac{1}{2}O(n^2)$
Crout	$\frac{1}{3}O(n^3)$	$\frac{2}{3}O(n^3)$	$\frac{1}{2}O(n^2)$
Choleski	$\frac{1}{3}O(n^3)$	$\frac{1}{3}O(n^3)$	$\frac{1}{2}O(n^2)$

Ejemplo de condicionamiento

Sistema inicial: Ax=b

Sistema "equivalente": Cx'=d

¿x=x'? ¿A∝C?

$$\mathbf{A}\cdot x = b$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\cdot(x+\delta x) = (b+\delta b)$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1+\delta x_1 \\ x_2+\delta x_2 \\ x_3+\delta x_3 \\ x_4+\delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32'1 \\ 22'9 \\ 33'1 \\ 30'9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})\cdot(x+\delta x) = b$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8'1 & 7'2 \\ 7'08 & 5'04 & 6 & 5 \\ 8 & 5'98 & 9'89 & 9 \\ 6'99 & 4'99 & 9 & 9'98 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1+\delta x_1 \\ x_2+\delta x_2 \\ x_3+\delta x_3 \\ x_4+\delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Acotación

$$\mathbf{A}\cdot x=b\to\left\{\begin{array}{c}\|\mathbf{A}\|\cdot\|x\|\geq\|b\|\\ x=\mathbf{A}^{-1}\cdot b\to\|x\|\leq\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\cdot\|b\|\end{array}\right\}\to\frac{\|b\|}{\|\mathbf{A}\|}\leq\|x\|\leq\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\cdot\|b\|$$

$$\mathbf{A}\cdot(x+\delta x)=(b+\delta b)\to\mathbf{A}\cdot\delta x=\delta b\to\frac{\|\delta b\|}{\|\mathbf{A}\|}\leq\|\delta x\|\leq\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\cdot\|\delta b\|$$

$$\frac{1}{\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\cdot\|\mathbf{A}\|}\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\leq\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leq\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\cdot\|\mathbf{A}\|\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$$\frac{1}{cond(A)}\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\leq\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leq cond(A)\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$$(A+\delta A)\cdot(x+\delta x)=(b+\delta b)\to$$

$$\to\left\{\begin{array}{ll}\|\delta A\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|<1 & \dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leq\dfrac{cond(A)}{1-cond(A)\left(\|\delta A\|/\|A\|\right)}\left(\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}+\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)\\ \|\delta A\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|\geq 1 & \dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leq\|A\|\left\|(A+\delta A)^{-1}\right\|\left(\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}+\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)\end{array}\right.$$

Demo

Propiedades

Para cualquier matriz regular A y una norma subordinada cualquiera se verifica:

- Cond(I)=1

$$\|I\| = \sup_{x\in E} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = 1$$

- Cond(A)≥1

$$I = A\cdot A^{-1} \leftrightarrow \|I\| = \|A\cdot A^{-1}\| \le \|A\|\cdot\|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

- Cond(A^{-1}) = cond(A)

$$\kappa(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\| = \|A^{-1}\|\cdot\|A\| = \kappa(A^{-1})$$

- Cond(αA) = cond(A)

$$\kappa(\alpha A) = \|\alpha A\|\cdot\|\alpha A^{-1}\| = |\alpha|\cdot\|A\|\cdot\left|\tfrac{1}{\alpha}\right|\cdot\|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

- Si B singular $\quad cond(A) > \dfrac{\|A\|}{\|A-B\|}$

$$\exists x / \|x\| = 1 : B\cdot x = 0 \to (A-B)x = A\cdot x \to \|A-B\|\cdot\|x\| \ge \|A\cdot x\|$$

$$\to \left\{\|A^{-1}\|\cdot\|A\cdot x\| \ge \|x\|\right\} \to \|A-B\|\cdot\|x\| \ge \tfrac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow \kappa(A) = \|A^{-1}\|\cdot\|A\| > \tfrac{\|A\|}{\|A-B\|}$$

Ejemplo: cota con variación de b

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}10&7&8&7\\7&5&6&5\\8&6&10&9\\7&5&9&10\end{pmatrix}\qquad \mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}25&-41&10&-6\\-41&68&-17&10\\10&-17&5&-3\\-6&10&-3&2\end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}32\\23\\33\\31\end{pmatrix}\quad \delta b=\begin{pmatrix}0'1\\-0'1\\0,1\\-0'1\end{pmatrix}\quad x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad \delta x=\begin{pmatrix}8'2\\-13'6\\3'5\\-2'1\end{pmatrix}$$

	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}^{-1}$	$\kappa(A)$	b	δb	$\kappa(A)\frac{\lVert\delta b\rVert}{\lVert b\rVert}$	x	δx	$\frac{\lVert\delta x\rVert}{\lVert x\rVert}$
$\lVert*\rVert_1$	33	136	4488	119	0.4	15.1	4	27.4	6.85
$\lVert*\rVert_2$	30.3	98.6	2984	60.0	0.2	9.94	2	16.4	8.20
$\lVert*\rVert_\infty$	33	136	4488	33	0.1	13.6	1	13.6	13.6

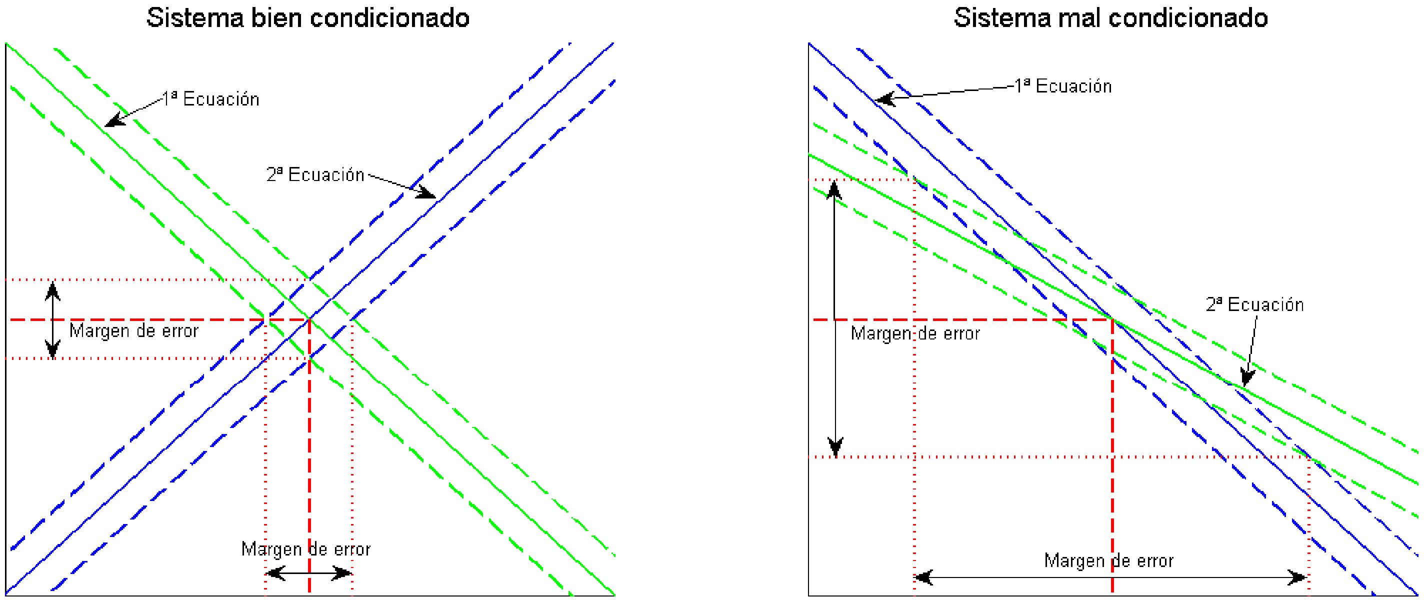
Ejemplo: cota con variación de A

$$\delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & -0.11 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & -0.02 \end{pmatrix} \qquad (A+\delta A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1242.5 & -1974.2 & 533.8 & -388.7 \\ -2063.3 & 3279.1 & -887.0 & 645.6 \\ 533.3 & -848.0 & 230.2 & -167.5 \\ -319.5 & 507.9 & -137.9 & 100.6 \end{pmatrix}$$

	$\kappa(\mathbf{A})$	$\mathbf{A}^{-1}$	$\delta\mathbf{A}$	$(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})^{-1}$	$\left\|(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})^{-1}\right\|\left\|\delta\mathbf{A}\right\|$	x	δx	$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$
$\|*\|_1$	4488	136	0.22	6609.1	1454	4	274	68.5
$\|*\|_2$	2984	98.6	0.231	4854.3	1120.5	2	164	82.0
$\|*\|_\infty$	4488	136	0.3	6875	2062.5	1	136	136

Nota : $\|\delta\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\| \geq 1 \Rightarrow$ No es aplicable $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \dfrac{\operatorname{cond}(A)}{1-\operatorname{cond}(A)\left(\|\delta A\| \big/ \|A\|\right)} \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

Interpretación geométrica



Cálculo del determinante de una matriz

A partir de los resultados de la factorización de la matriz

- Doodlittle

$$\mathbf{A} = M \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \Rightarrow |\mathbf{A}| = |M| \cdot |\mathbf{L}| \cdot |\mathbf{U}| = (-1)^p \cdot 1 \cdot |\mathbf{U}| = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} u_i^i$$

- Crout

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot D \cdot \mathbf{L}^T \Rightarrow |\mathbf{A}| = |\mathbf{L}| \cdot |D| \cdot \left|\mathbf{L}^T\right| = 1 \cdot |D| \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} d_i^i$$

- Choleski

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T \Rightarrow |\mathbf{A}| = |\mathbf{L}| \cdot \left|\mathbf{L}^T\right| = |\mathbf{L}|^2 = \prod_{i=1}^{n} \left(l_i^i\right)^2$$

Aplicaciones: Cálculo de la inversa

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} =\frac{1}{2}1^a \\ 2^a-\frac{-1}{2}1^a \\ 3^a-\frac{-1}{2}1^a \\ 4^a-\frac{-2}{2}1^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{5}{2} & -7 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & -4 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & -8 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1^a-\frac{2}{3}2^a \\ =\frac{1}{3}2^a \\ 3^a-\frac{-1}{3}2^a \\ 4^a-\frac{9}{3}2^a \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 & -\frac{5}{2} & -7 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} & -4 \\ 1 & 9 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{8}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{6} & \frac{-7}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{-19}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & 13 & \frac{-1}{2} & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1^a-\frac{13}{10}3^a \\ 2^a-\frac{-1}{2}3^a \\ =\frac{3}{5}3^a \\ 4^a-\frac{63}{10}3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-2}{3} & \frac{13}{6} & \frac{8}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-5}{6} & \frac{-7}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-19}{3} \\ \frac{-1}{2} & -3 & \frac{21}{2} & 13 \end{pmatrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{109}{10} & \frac{-7}{10} & \frac{-11}{10} & \frac{-13}{10} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-11}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{529}{10} & \frac{-47}{10} & \frac{-51}{10} & \frac{-63}{10} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1^a-\frac{109}{529}4^a \\ 2^a-\frac{-55}{529}4^a \\ 3^a-\frac{-38}{529}4^a \\ =\frac{10}{529}4^a \end{array}\right\} \qquad \begin{pmatrix} \frac{-7}{10} & \frac{-11}{10} & \frac{-13}{10} & \frac{109}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-11}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-19}{5} \\ \frac{-47}{10} & \frac{-51}{10} & \frac{-63}{10} & \frac{529}{10} \end{pmatrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-218}{529} & \frac{-26}{529} & \frac{-1}{529} & \frac{-109}{529} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{6}{529} & \frac{-16}{529} & \frac{-82}{529} & \frac{55}{529} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{33}{529} & \frac{-88}{529} & \frac{78}{529} & \frac{38}{529} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-47}{529} & \frac{-51}{529} & \frac{-63}{529} & \frac{10}{529} \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} \frac{-218}{529} & \frac{-26}{529} & \frac{-1}{529} & \frac{-109}{529} \\ \frac{6}{529} & \frac{-16}{529} & \frac{-82}{529} & \frac{55}{529} \\ \frac{33}{529} & \frac{-88}{529} & \frac{78}{529} & \frac{38}{529} \\ \frac{-47}{529} & \frac{-51}{529} & \frac{-63}{529} & \frac{10}{529} \end{pmatrix}$$

Anexo

- Demostraciones
- Algoritmos

Demo: Normas equivalentes

$x=\left(x_1,x_2,x_3,\cdots x_{n-1},x_n\right)$

- $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty \rightarrow \sup_{\mathrm{i=1,..n}}|x_i| \le \sum_{i=1}^{n}|v_i| \le n\sup_{\mathrm{i=1,..n}}|x_i|$
- $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty \rightarrow \sup_{\mathrm{i=1,..n}}|x_i| = x_s \le x_s\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{x_s}\right|^2} \le x_s\sqrt{n}$
- $\frac{1}{n}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_1 \rightarrow \frac{1}{n}\|x\|_1 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty \le \sqrt{n}\,\|x\|_1$
- $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \rightarrow \|x\|_\infty \le \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} \le \sum_{i=1}^{n}\sqrt{|x_i|^2} = \|x\|_1$

Volver

Demo: Normas matriciales subordinadas

- Def.:Si $\|x\|$ es una norma vectorial sobre Cn entonces se define una norma matricial sobre el conjunto de las matrices de orden n, denominada norma subordinada, mediante

$$\|A\| = \sup_{x\in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$$

Ejemplos:

- $\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|A\cdot x\|_1 = \max_{i\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} \left|a_i^j\right|$ (máximo de columnas)
- $\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|A\cdot x\|_2 = \sqrt{\rho\left(A\cdot A^*\right)}$ (radio espectral de la normal)
- $\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|A\cdot x\|_\infty = \max_{i\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_i^j\right|$ (máximo de filas)

Volver

MATLAB para Gauss con pivote simple


```
[n,m]=size(A);if m~=n+1;error('falla matriz ampliada');end
for i=1:n
        [p,j]=max(abs( A(i:n,i)) );j=j+i-1;
        if p==0; error('sistema indeterminado o incompatible');end
        if j~=i; p=A(j,i:n); A(j,i:n)=A(i,i:n); A(i,i:n)=p;end
        for j=i+1:n; m=-A(j,i)/A(i,i); A(j,i:n)=A(j,i:n)+m*A(i,i:n); end
end
x(n)=A(n,n+1)/A(n,n)
for i=n-1,1,-1; x(i)=(a(i,n+1)-a(i,i+1:n)*x(I+1:n))/a(i,i);end
```

- OPERACIONES

	Tringularizar	Resolver	Total
$+$ $\times$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(n-i)=\frac{n^2(n-1)}{3}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{2n^3-5n^2+3n}{6}$
$\div$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}1=\frac{n(n-1)}{2}$	n	$\frac{n^2+n}{2}$

Volver

MATLAB para Gauss con pivote doble

```
[n,m]=size(A);if m~=n+1;error('falla matriz ampliada');end
orden=1:n;
for i=1:n % Triangularización
        [p,j]=max(abs( A(i:n,i:n)) );j=j+i-1; % Pivote y posición
        [p,k]=max(p);j=j(k);k=k+i-1;
        if p==0; error('sistema indeterminado o incompatible');end
        if j~=i; p=A(j,i:n); A(j,i:n)=A(i,i:n); A(i,i:n)=p;end % Intercambio de filas
        if k~=i;
                p=A(i:n,k); A(i:n,k)=A(i:n,i); A(i:n,i)=p;
                p=orden(k); orden(k)=orden(i);orden(i)=p;
        end
        for j=i+1:n; m=-A(j,i)/A(i,i); A(j,i:n)=A(j,i:n)+m*A(i,i:n); end
end
x(n)=A(n,n+1)/A(n,n); % Resolución del sistema triangular
for i=n-1,1,-1; x(i)=(a(i,n+1)-a(i,i+1:n)*x(I+1:n))/a(i,i);end;
x=x(orden); % Ordenación de los resultados
```


Volver

MATLAB para Gauss con pivote escalado

```
[n,m]=size(A);if m~=n+1;error(‘falla matriz ampliada’);end
for i=1:n % Triangularización
        escala=max(abs( A(i:n,i:n)’) ); ; % Pivote y posición
        if any(escala); error(‘sistema indeterminado o incompatible’);end
        [p,j]=max(abs( A(i:n,i)./escala’) );j=j+i-1;
        if j~=i; p=A(j,i:n); A(j,i:n)=A(i,i:n); A(i,i:n)=p;end % Intercambio de filas
        for j=i+1:n; m=-A(j,i)/A(i,i); A(j,i:n)=A(j,i:n)+m*A(i,i:n); end
end
x(n)=A(n,n+1)/A(n,n); % Resolución del sistema triangular
for i=n-1,1,-1; x(i)=(a(i,n+1)-a(i,i+1:n)*x(I+1:n))/a(i,i);end
```

Volver

Factorización: Demostraciones I

$$L_k=\begin{pmatrix}1&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1&0&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&-\alpha_{k+1}^{k}&1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&-\alpha_{k+1}^{n}&0&\cdots&1\end{pmatrix}\quad 2I-L_k=\begin{pmatrix}1&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1&0&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&\alpha_{k+1}^{k}&1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&\alpha_{k+1}^{n}&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

$$L_k\left(2I-L_k\right)=\begin{pmatrix}1&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1&0&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&\alpha_{k+1}^{k}-\alpha_{k+1}^{k}&1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&\alpha_{k+1}^{n}-\alpha_{k+1}^{n}&0&\cdots&1\end{pmatrix}=I$$

Volver

Demostración de inversa de L

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{k+1}^{k} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{k+1}^{n} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad 2I - L_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k+1}^{k} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k+1}^{n} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_k(2I - L_k) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k+1}^{k} - \alpha_{k+1}^{k} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k+1}^{n} - \alpha_{k+1}^{n} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

Descripción
Objetivos
Temario
Cuestiones previas
Métodos Directos
- Método de Gauss
- Técnicas de pivoteo
-Gauss-Jordan
-Factorización
-Condicionamiento
-Aplicaciones
Métodos Iterativos
Bibliografía

Volver

Factorización: Demostraciones II

- Tma: El producto de matrices triangulares inferiores (superiores) es una matriz triangular inferior (superior)

$$C = A\cdot B \quad \text{con} \quad A,B \text{ triang. inf.}\left(\forall i<j: a_i^j = b_i^j\right)$$

$$\forall i<j: c_i^j = \sum_{k=1}^{n} a_i^k b_k^j = \sum_{k=1}^{i} a_i^k b_k^j + \sum_{k=i+1}^{n} a_i^k b_k^j =$$

$$= \sum_{k=1}^{i} a_i^k \cdot 0 + \sum_{k=i+1}^{n} 0\cdot b_k^j = 0 \Rightarrow C \text{ triang. inf.}$$

Volver

- Tma: La inversa de una matriz triangular inferior (superior) es una matriz triangular inferior (superior)
  - Demostración por inducción: se verifica para 1, supuesto que se verifica para *n* hay que demostrarlo para *n+1*

$$\mathbf{A}_{n+1}\cdot\mathbf{B}_{n+1} = \begin{pmatrix}\mathbf{A}_n & 0\\ c_{n+1}^1 & a_{n+1}^{n+1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{B}_n & d_1^{n+1}\\ d_{n+1}^1 & b_{n+1}^{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{A}_n\cdot d_1^{n+1} + 0\cdot b_{n+1}^{n+1} = 0 \Rightarrow d_1^{n+1} = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{B}_{n+1} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}_n & 0\\ d_{n+1}^1 & b_{n+1}^{n+1}\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_{n+1} \quad \text{triang. inferior}$$

Volver

Propiedades de la matriz de intercambio

$$M_i^j = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & \scriptstyle i-esima & & \scriptstyle j-esima & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & 0 & & 0 \\ & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix} & & & \\ 0 & \begin{matrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{matrix} & & & 0 \\ & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix} & & & \\ 0 & & 0 & & I_{n-j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-j} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{j-i-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Simetría

$$\left(M_i^j\right)^T = \begin{pmatrix} \left(I_{i-1}\right)^T & 0 & 0 \\ 0 & B^T & 0 \\ 0 & 0 & \left(I_{n-j}\right)^T \end{pmatrix}$$

- Ortogonalidad

$$M_i^j M_i^j = \begin{pmatrix} I_{i-1}\cdot I_{i-1}+0\cdot 0+0\cdot 0 & I_{i-1}\cdot 0+0\cdot B+0\cdot 0 & I_{i-1}\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot I_{n-j} \\ & 0\cdot 0+B\cdot B+0\cdot 0 & 0\cdot 0+B\cdot 0+0\cdot I_{n-j} \\ & & 0\cdot 0+0\cdot 0+I_{n-j}\cdot I_{n-j} \end{pmatrix}$$

$$B\cdot B = \begin{pmatrix} 0\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 0+0\cdot I_{j-i-1}+1\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0 \\ & 0\cdot 0+I_{j-i-1}\cdot I_{j-i-1}+0\cdot 0 & 0\cdot 1+I_{j-i-1}\cdot 0+0\cdot 0 \\ & & 1\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0 \end{pmatrix} = I_{j-i+1}$$

Algoritmo de Factorización LU

- ENTRADA: Matriz A y vector b
- SALIDA: Solución x, o mensaje de indeterminación
- ALGORITMO

1. Repetir para i desde 1 hasta n (Proceso de factorización).
2. Repetir para j desde 1 hasta i-1
3. Calcular $l_i^j = \left[a_i^j - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k u_k^j \right] \Big/ u_j^j$
4. Hacer $l_i^i = 1$
5. Calcular $u_i^i = a_i^i - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k u_k^i$
6. Repetir para j desde i+1 hasta n
7. Calcular $u_i^j = a_i^j - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k u_k^j$
8. Repetir para i desde 1 hasta n repetir (Resolución sistema T.S.)
9. Calcular $y_i = \left[b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k y_k \right]$
10. Repetir para i desde n hasta 1 (Resolución sistema T.I.)
11. Calcular $x_i = \left[y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_i^k x_k \right] \Big/ u_i^i$
12. SALIDA x

- OPERACIONES

$$+,\times \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i-1) + 2\sum_{i=1}^{n}\left[(n-i)\right] = \frac{n^2(n-1)}{2} + 2\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^3+n^2-2n}{2}$$

$$\div \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} 1 + n = \frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n^2+n}{2}$$

Volver

Algoritmo de Factorización de Crout

- ENTRADA: Matriz A y vector b
- SALIDA: Solución x, o mensaje de indeterminación
- ALGORITMO

Volver

1. Repetir para i desde 1 hasta n (Proceso de factorización).
2. Repetir para j desde 1 hasta i-1
3. Calcular $l_i^j = \left[a_i^j - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k d_k^k l_j^k \right] \Big/ d_j^j$
4. Hacer $l_i^i = 1$
5. Calcular $d_i^i = a_i^i - \sum_{k=1}^{i-1} \left(l_i^k \right)^2 d_k^k$
6. Repetir para i desde 1 hasta n repetir (Resolución sistema T.S.)
7. Calcular $y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k y_k$
8. Repetir para i desde n hasta 1 (Resolución sistema diagonal)
9. Calcular $z_i = y_i \big/ d_i^i$
10. Repetir para i desde n hasta 1 (Resolución sistema T.I.)
11. Calcular $x_i = z_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_k^i x_k$
12. SALIDA x

- OPERACIONES

$$+ \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} (i-1) + \sum_{i=1}^{n} (n-1) = \frac{n^2(n-1)}{3} + n^2 = \frac{n^3 + 3n^2 - 4n}{3}$$

$$\times \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 2(i-1) + \sum_{i=1}^{n} (n-1) = \frac{2n^2(n-1)}{3} + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{3}$$

$$\div \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} 1 + n = \frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

Algoritmo de Factorización de Choleski

[Volver]

- ENTRADA: Matriz A y vector b
- SALIDA: Solución x, o mensaje de indeterminación
- ALGORITMO

1. Repetir para i desde 1 hasta n (Proceso de factorización).
2. Repetir para j desde 1 hasta i-1
3. Calcular $l_i^j = \left[a_i^j - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k l_j^k \right] \Big/ l_j^j$
4. Calcular $l_i^i = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \left(l_i^k\right)^2}$
5. Repetir para i desde 1 hasta n repetir (Resolución sistema T.S.)
6. Calcular $y_i = \left[b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_i^k y_k \right] \Big/ l_i^i$
7. Repetir para i desde n hasta 1 (Resolución sistema T.I.)
8. Calcular $x_i = \left[y_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_i^k x_k \right] \Big/ l_i^i$
9. SALIDA x

- OPERACIONES

$$+,\times \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(i-1) + \sum_{i=1}^{n}(n-1) = \frac{n\left(n^2-4\right)}{3} + n^2 = \frac{n^3+3n^2-4n}{3}$$

$$\div \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} 1 + 2n = \frac{n^2-n}{2} + 2n = \frac{n^2+3n}{2}$$

$$\sqrt{\ } \quad n$$

Demo: condicionamiento

$$(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})(x+\delta x)=b+\delta b \to \mathbf{A}\cdot\delta x=\delta b-\delta\mathbf{A}\cdot x-\delta\mathbf{A}\cdot\delta x$$

$$\left(1-\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\left\|\delta\mathbf{A}\right\|\right)>0 \to \delta x=\mathbf{A}^{-1}\left(\delta b-\delta\mathbf{A}\cdot x-\delta\mathbf{A}\cdot\delta x\right)$$

$$\left\|\delta x\right\|\le\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\left(\left\|\delta b\right\|+\left\|\delta\mathbf{A}\right\|\cdot\left\|x\right\|+\left\|\delta\mathbf{A}\right\|\cdot\left\|\delta x\right\|\right)$$

$$\left\|\delta x\right\|\left(1-\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\left\|\delta\mathbf{A}\right\|\right)\le\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\left(\left\|\delta b\right\|+\left\|\delta\mathbf{A}\right\|\cdot\left\|x\right\|\right)$$

$$\left\|\delta x\right\|\le\frac{\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|}{1-\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\left\|\delta\mathbf{A}\right\|}\left(\left\|\delta b\right\|+\left\|\delta\mathbf{A}\right\|\cdot\left\|x\right\|\right)$$

$$\frac{\left\|\delta x\right\|}{\left\|x\right\|}\le\frac{\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|}{1-\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\left\|\delta\mathbf{A}\right\|}\left(\frac{\left\|\delta b\right\|}{\left\|x\right\|}+\left\|\delta\mathbf{A}\right\|\right)\le\frac{\operatorname{cond}(\mathbf{A})}{1-\operatorname{cond}(\mathbf{A})\left(\left\|\delta\mathbf{A}\right\|/\left\|\mathbf{A}\right\|\right)}\left(\frac{\left\|\delta b\right\|}{\left\|b\right\|}+\frac{\left\|\delta\mathbf{A}\right\|}{\left\|\mathbf{A}\right\|}\right)$$

$$\left(1-\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|\left\|\delta\mathbf{A}\right\|\right)<0 \to \delta x(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})=\mathbf{A}^{-1}\left(\delta b-\delta\mathbf{A}\cdot x\right)$$

$$\frac{\left\|\delta x\right\|}{\left\|x\right\|}\le\left\|(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})^{-1}\right\|\left(\frac{\left\|\delta b\right\|}{\left\|x\right\|}+\left\|\delta\mathbf{A}\right\|\right)\le\left\|\mathbf{A}\right\|\left\|(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})^{-1}\right\|\left(\frac{\left\|\delta b\right\|}{\left\|b\right\|}+\frac{\left\|\delta\mathbf{A}\right\|}{\left\|\mathbf{A}\right\|}\right)$$

Volver

Demo: Matriz normal

B definida positiva $\Leftrightarrow \forall x : x^t Bx \geq 0 \wedge x^t Bx = 0 \Rightarrow x = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_k \in \sigma(B) : \lambda_k > 0$

$$\forall x : x^t \left(A^t A \right) x = (Ax)^t (Ax) = \tilde{x}^t \tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i)^2 \geq 0$$

$$\tilde{x} = Ax = 0 \xrightarrow{A \text{ regular}} x = 0$$

Volver

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)DA^{-1}$$

$$(A + BCD)\left[A^{-1} - A^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)DA^{-1}\right] = I - B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)DA^{-1} +$$

$$+BCDA^{-1} - BCDA^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)DA^{-1}$$

Volver