

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 6
	Tema	Ecuaciones No lineales (Método de la Secante)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- A continuación se muestra el pseudocódigo correspondiente a un método de resolución de ecuaciones no lineales.

Algoritmo

Paso 1: Asignar $f_0 \leftarrow f(x_0)$; $f_1 \leftarrow f(x_1)$;

Paso 2: Repetir para i desde 1 hasta n, Pasos 3-6

Paso 3: Calcular $c \leftarrow x_1 - f_1 \frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0} \wedge f_c \leftarrow f(c)$

Paso 4: Asignar $x_0 \leftarrow x_1 \wedge f_0 \leftarrow f_1$;

Paso 5: Asignar $x_1 \leftarrow c \wedge f_1 \leftarrow f_c$;

Paso 6: Si $|x_0 - x_1| < \varepsilon \vee |f_1| < \delta$ entonces Salida x_1 , FIN

Paso 7: Imprimir 'Finalizadas las iteraciones sin convergencia', FIN

(a) Interpretar geoméricamente el método. ¿Sabrías identificarlo?. Indicar las diferencias (si las hay) entre el método expuesto y el de Regula Falsi (aplicabilidad, convergencia, etc.).

(b) Se considera la ecuación $x^3 + 15x^2 - 05 = 0$. Acotar y separar las raíces de la ecuación anterior en intervalos de longitud 1, utilizando los algoritmos vistos en clase y en prácticas.

(c) Realizar 3 iteraciones del algoritmo a la ecuación anterior a partir de los puntos iniciales -2 y 1.

(d) Obtener las soluciones reales de la ecuación. ¿Cuál habría sido el método adecuado para obtener todas las raíces?. ¿Y para obtener las negativas?.

Ejercicio 2.- Dada la ecuación $f(x) = 2 \cdot \sin(x) - x[1 + \cos(x)]$:

(a) Realizar 5 iteraciones con el método de Newton partiendo de $x_0 = 1$, para obtener una raíz aproximada.

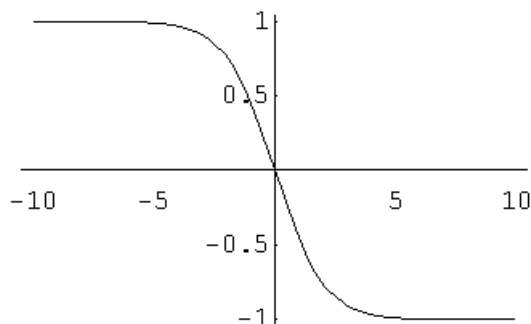
(b) Demostrar que existen modificaciones del método de Newton que permiten mantener velocidad de convergencia cuadrática cuando la raíz tiene multiplicidad α .

(c) Sabiendo que la raíz es triple, modificar el método de Newton y realizar tres iteraciones

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 6
	Tema	Ecuaciones No lineales (Método de la Secante)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 3.- Sea la función $f(x) = \frac{2}{1+e^x} - 1$, cuya gráfica se muestra en la figura.

Describir los métodos que conoce para el cálculo aproximado de la raíz de $f(x)=0$ en el intervalo $[-9,10]$, indicando sus ventajas e inconvenientes, y seleccionar el más adecuado.



Ejercicio 4.-

- (a) Demostrar el siguiente teorema (Nota: aplicar a cada lado de la igualdad el teorema del valor medio)

Sea $I = [r - \delta, r + \delta] \in \mathbb{R}$ con $\delta > 0$ y r la raíz de $g(x) - h(x) = 0$ con

$g(x), h(x) \in C^1(I)$ tales que $|g'(x)| \geq \alpha$ y $|h'(x)| \leq \beta$, donde $\alpha > 0$,

$\beta \geq 0$ y $\beta/\alpha < 1$ entonces para todo $x_0 \in I$ el método definido por

$g(x_{k+1}) = h(x_k)$ converge a r .

- (b) Este teorema se utiliza en la generación de funciones de punto fijo que convergen a la raíz de una ecuación $f(x) = g(x) - h(x) = 0$ al transformarla en $x_{k+1} = g^{-1}(h(x_k))$. Aplicarlo para calcular la raíz de $\sin(x) - (x - 2) = 0$ en el intervalo $(2.5, 3)$.
- (c) Calcular el número máximo de iteraciones para obtener una precisión de 10^{-4} .

Ejercicio 5.- La velocidad de descenso de un paracaídas viene dada por

$$v = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{-ct/m} \right)$$

donde g es la aceleración de la gravedad (9.81 m/s^2), m la masa soportada, t el tiempo y c el coeficiente de arrastre, viniendo dados todos los valores en S.I.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 6
	Tema	Ecuaciones No lineales (Método de la Secante)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

- Representar, de forma aproximada, la velocidad como función del coeficiente de arrastre
- Seleccionar un método de intervalo para determinar el valor de c para que un paracaídas que soporta 50 Kg alcance una velocidad de 30 m/s en 5 minutos. Realizar 4 iteraciones de Regula Falsi Modificada ¿Presenta alguna ventaja?. (Nota: utilizar decenas para determinar el intervalo).
- ¿Se puede asegurar la convergencia del método de Newton en el intervalo $[10,20]$? Justificar la respuesta.

Ejercicio 6.- Dada la función $f(x) = x \cos(x) - e^x + 1$

- Representarla de forma aproximada en el intervalo $[-1,1]$.
- Obtener el desarrollo de Taylor en el origen de la función.
- A partir del desarrollo anterior, seleccionar el método de intervalo más adecuado para su resolución en el subintervalo $[a,b] \subseteq [-0.5,0.5]$, justificando la respuesta.
- Analizar las siguientes funciones de punto fijo, comprobando su consistencia con la ecuación $f(x)=0$ y la convergencia del método en $[-0.5,0.5]$ y, en su caso, la velocidad de convergencia.

$$g_1(x) = \frac{e^x + x - 1}{1 + \cos(x)} \quad g_2(x) = \sqrt{\frac{x(e^x - 1)}{\cos(x)}}$$

- ¿Cuál sería el método más adecuado para resolver la ecuación?. Razónese la propuesta.

Ejercicio 7.- Utilice el teorema del valor intermedio y el teorema de Rolle para demostrar que la gráfica de $f(x) = x^3 + 2x + k$ cruza el eje x exactamente una vez, cualquiera que sea el valor de la constante k .

Ejercicio 8.- Sea $f(x) = (x+2)(x+1)2x(x-1)3(x-2)$. ¿Hacia qué cero converge el método de bisección en los siguientes casos?

- Intervalo $[-1.5,2.5]$
- Intervalo $[-0.5,2.4]$
- Intervalo $[-0.5,3]$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 4 de 6
	Tema	Ecuaciones No lineales (Método de la Secante)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

(d) Intervalo $[-3, -0.5]$

Ejercicio 9.- Dadas las siguientes funciones

$$g_1(x) = \sqrt[4]{3+x-2x^2} \quad \left| \quad g_2(x) = \sqrt{\frac{x+3-x^4}{2}} \quad \left| \quad g_3(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2+2}} \quad \left| \quad g_4(x) = \frac{3x^4+2x^2+3}{4x^3+4x-1} \right. \right.$$

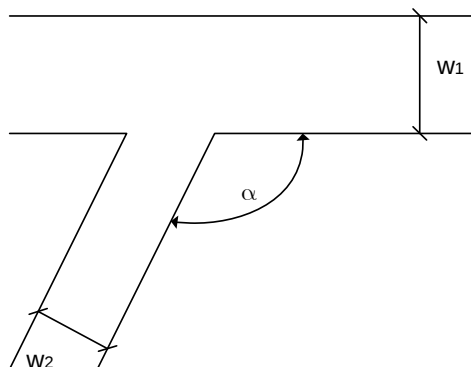
obtenidas mediante despeje de la ecuación $f(x)=0$, donde $f(x)=x^4+2x^2-x-3$.

- Use el manejo algebraico para demostrar que tienen un punto fijo en p , siendo p una raíz de $f(x)$.
- Efectúe cuatro iteraciones si es posible hacerlo, en las funciones g definidas en el ejercicio anterior. Sea $p_0=1$ y $p_{n+1}=g(p_n)$ para $n=0,1,2,3$. ¿Cuál función a su juicio, dará la mejor aproximación a la solución?.
- Clasifíquense por orden, basándose en la rapidez de convergencia

Ejercicio 10.- Dada la ecuación $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x = 0$

- Resuélvala utilizando el método de Newton, tomando como valor de partida $p_0 = \pi/2$. Realice las iteraciones necesarias hasta lograr una exactitud de 10^{-5} . Explique por qué el resultado parece poco usual para el método de Newton.
- Repita el proceso tomando como valores de partida $p_0=5\pi$ y $p_0=10\pi$.
- ¿Hay alguna manera de acelerar el método de Newton?. En caso afirmativo, aplíquela partiendo de los mismos valores iniciales.

Ejercicio 11.- En una mina se intersectan dos galerías anchuras w_1 y w_2 respectivamente con un ángulo α .



 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 5 de 6
	Tema	Ecuaciones No lineales (Método de la Secante)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

- (a) Plantear la ecuación para obtener la longitud que puede tener un raíl para pasar por el cruce dependiendo de las anchuras de las galerías y el ángulo que forman
- (b) Plantear la ecuación para obtener la longitud máxima del raíl.
- (c) Justifíquese la elección de un método para resolver la ecuación anterior y realícense 3 iteraciones, razonando el motivo para elegir los valores de partida. Se considera que $w_1=6\text{m}$, $w_2=4\text{m}$ y $\alpha=4\pi/6$.

Ejercicio 12.- Se desea resolver la ecuación $x^2 = \ln(1+x)^3$.

- (a) Demostrar que admite dos raíces reales distintas.
- (b) Analizar el método de Newton para obtener la raíz positiva de dicha ecuación. Seleccionar un valor inicial que asegure la convergencia, y efectuar dos iteraciones del método.
- (c) Encontrar un método de punto fijo, diferente al de Newton, que asegure la convergencia hacia la raíz positiva.
- (d) Comprobar si la siguiente función multivariable satisface las condiciones de punto fijo.

$$G(X) = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2 + y^2 + 8}{10} \\ \frac{xy^2 + x + 8}{10} \end{pmatrix} \quad (0 \leq x, y \leq 1.5)$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 6 de 6
	Tema	Ecuaciones No lineales (Método de la Secante)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 13.- La función $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$ tiene tres raíces reales. Una

reordenación de la función para poder aplicar iteración de punto fijo es $x = \pm \sqrt{\frac{e^x}{3}}$.

- (a) Mostrar que cuando se toma el signo negativo de la raíz, y comenzamos por cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^-$ el método converge a una raíz próxima a -0.5 . Demostrar que en realidad converge para cualquier valor real con el que se comience.
- (b) Mostrar que cuando se toma el signo positivo de la raíz y se comienza por $x_0 = 0$ el método converge a una raíz próxima a 1 .
- (c) Mostrar que el método nunca converge a una raíz próxima a 4 , incluso tomando valores muy próximos de partida. Encontrar otra fórmula del punto fijo que converja a esa raíz