



Campo: Ingeniería
Asignatura: Análisis Numérico
Autor: César Menéndez

Última actualización: 11/11/2010

Ecuaciones no lineales

Planificación:

5 Teoría+3 Prácticas+2 Laboratorio

Materiales:

MATLAB

Conocimientos previos:

T^{mas}. básicos de Cálculo –
Desarrollos de Taylor



Descripción del problema

Descripción

Objetivos

Temario

Ejercicios

Bibliografía

- Resolución de una ecuación: cálculo del valor o valores de x para los cuales se verifica que

$$F(x) = 0$$

- Problema bien planteado: existencia y unicidad de solución (condiciones de F)
- Solución analítica o calculable
 - Polinomios de grado mayor que 4
 - Funciones trascendentes y algebraicas
- Métodos de cálculo de raíces no analíticas
 - Métodos iterativos: generan sucesión de valores que se aproximan a la raíz
 - Convergencia – Criterios
$$|F(\alpha_n)| < \varepsilon \quad |\alpha_n - x| < \varepsilon \quad |\alpha_n - \alpha_{n-1}| < \varepsilon$$
 - Velocidad
 - Estabilidad (propagación de errores)



Ejemplo

Descripción

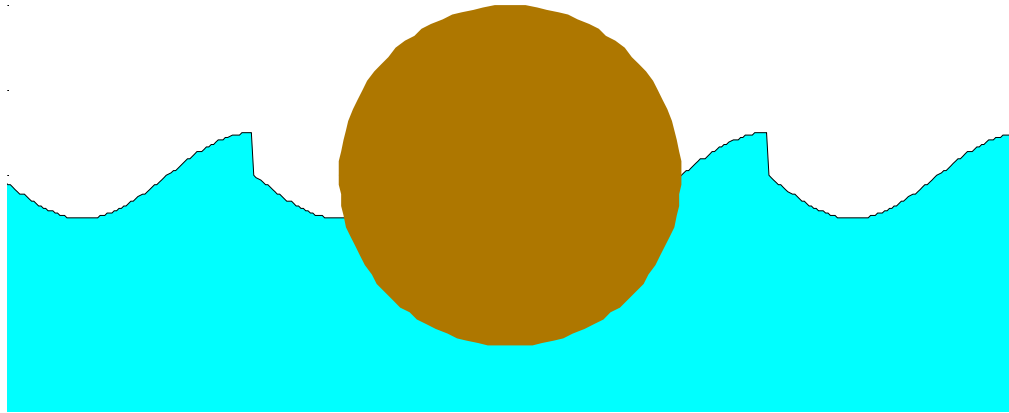
Ejemplo

Objetivos

Temario

Ejercicios

Bibliografía



- Una esfera de radio r y densidad ρ pesa
- El volumen del segmento esférico hundido en el agua una profundidad h viene dado por
$$\frac{\pi}{3}(3rh^2 - h^3)$$
- Encontrar la profundidad, en función del radio, a la cual una esfera de densidad 0.6 flota en el agua



Ejemplo

Descripción

Ejemplo

Objetivos

Temario

Ejercicios

Bibliografía

- Planteamiento (Principio de Arquímedes): el empuje debe equilibrar el peso

$$\frac{\pi}{3}(3rh^2 - h^3)\rho_a = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_e$$

- Ecuación a resolver

$$0 = h^3\rho_a - 3rh^2\rho_a + 4r^3\rho_e \rightarrow$$

$$F(x) = x^3 - 3x^2 + 2.4 = 0 \quad \text{siendo} \quad x = \frac{h}{r}$$

- Existencia y unicidad de solución : Polinomio de tercer grado con 3 raíces
- Cálculo de la solución: obtención analítica o aproximada: { 2.6611, -0.7952, 1.1341 }
- Coherencia de la solución { **1.1341** }



Objetivos

📁 Descripción

📁 Objetivos

📁 Temario

📁 Ejercicios

📁 Bibliografía

- Comprender e interpretar gráficamente los métodos, para así intuir sus ventajas e inconvenientes
- Diferenciar los métodos de intervalo de los de iteración funcional en cuanto a aplicabilidad y convergencia
- Entender el concepto de velocidad de convergencia y su importancia en la eficiencia de un método
- Conocer los problemas que presentan las raíces múltiples



Definiciones

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- Una función $F(x)$ es una aplicación de un conjunto inicial A en otro conjunto final B tal que a cada elemento del conjunto inicial le hace corresponder un elemento del conjunto final.

$$F : A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow y = F(x)$$

- Resolver una ecuación consiste en hallar los elementos $\alpha \in A$, denominados raíces de la ecuación, que convierten la igualdad $F(x)=0$ en una identidad.
- Una raíz α se dice que tiene multiplicada de orden m cuando $F^{(k)}(\alpha)=0$, $k=0,1,\dots,m-1$ y $F^{(m)}(\alpha) \neq 0$. Cuando la multiplicidad es uno, la raíz se denomina simple.

Ejemplos:

Simple Doble

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + x \quad F(0) = 0 \quad F(1) = 0$$

$$F'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \quad F'(0) = 1 \quad F'(1) = 0$$

$$F''(x) = 6x - 4 \quad F''(1) = 2$$



Teoremas (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

● Teorema I (Teorema de Bolzano).

[Demo](#)

Sea $F(x)$ una función continua en $[a, b]$ con valores de signos opuestos en los extremos, entonces existe un punto c en $[a, b]$ en que la función se anula.

$$F(x) \in C[a, b] / F(a) \cdot F(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in [a, b] / F(c) = 0$$

● Teorema II

[Demo](#)

Si $F(x)$ es derivable en (a, b) , cambia de signo en los extremos y su derivada no se anula en todo el intervalo, entonces la ecuación $F(x) = 0$ tiene una raíz única en el mismo.

$$F(x) \in C^1(a, b) / F(a) \cdot F(b) < 0 \wedge \forall x \in (a, b) : F'(x) \neq 0 \\ \Rightarrow \exists! c \in [a, b] / F(c) = 0$$



Teoremas (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

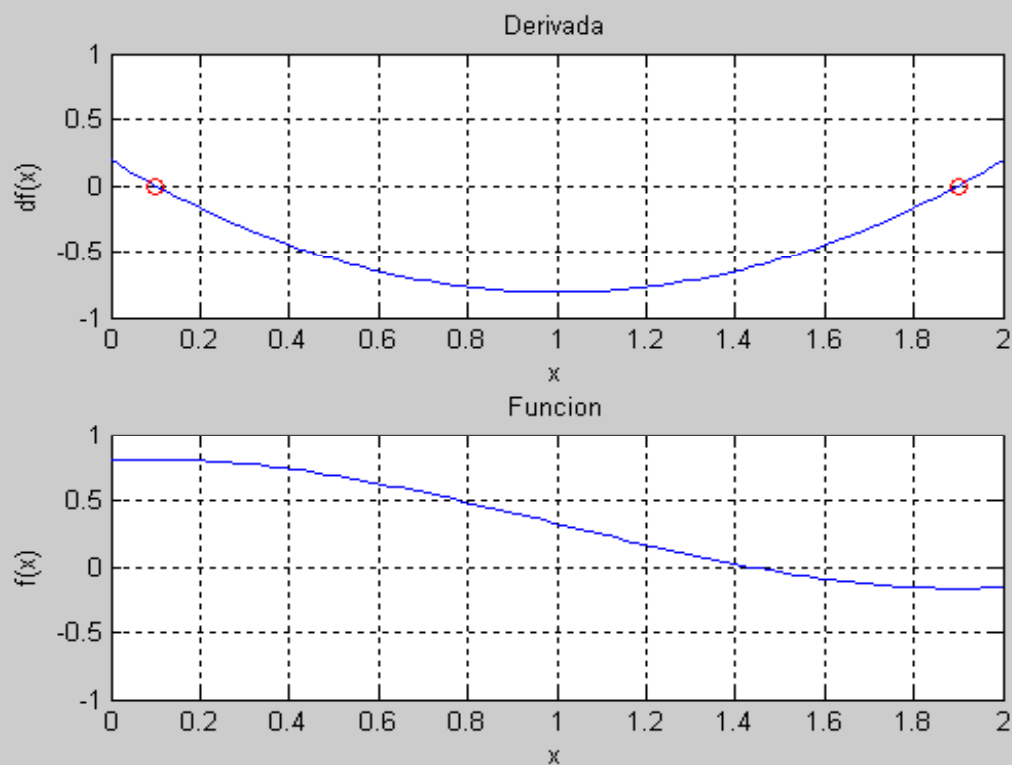
Ejercicios

Bibliografía

• Teorema III

Entre dos raíces consecutivas de la ecuación $F'(x)=0$ existe, a lo sumo, una raíz de $F(x)=0$.

Demo



Si la función es monótona (creciente o decreciente) en un intervalo, la raíz, de existir, es única



Aproximación de la raíz

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- Son métodos iterativos $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow \alpha$
 - Condiciones de convergencia
 - Velocidad de convergencia
 - Test de parada: elemento de la sucesión que “aproxima” la raíz.
- Definición:
 - Una sucesión que converge a un valor α , se dice que lo hace con orden de convergencia k y constante asintótica L cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x^{(n+1)}|}{|\alpha - x^{(n)}|^k} = L$$

- Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = 1 + \frac{1}{2^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| 1 - \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \right|}{\left| 1 - \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) \right|^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{kn}}{2^{n+1}} = 2^{(k-1)n-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 1 \\ y_{n+1} = 1 + \frac{1}{3^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1 - y_n|}{|1 - x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0 \end{array} \right.$$

**Test de parada**

$$\left\{ x^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow \alpha$$

Descripción**Objetivos****Temario**

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios**Bibliografía**● **Error absoluto**

$$\left| \alpha - x^{(n)} \right| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad \left| x^{(n+1)} - x^{(n)} \right| < \varepsilon \rightarrow x^{(n)} = 1$$

● **Error relativo**

$$\left| \frac{\alpha - x^{(n)}}{\alpha} \right| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad \left| \frac{x^{(n+1)} - x^{(n)}}{x^{(n)}} \right| \neq 0?$$

● **Valor absoluto de la función**

$$\left| F(x^{(n)}) \right| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad \left| F(x^{(n)}) \right| < \varepsilon$$

$$F(x) = (x-1)^{10} \quad \varepsilon = 0.001 \quad x^{(n)} = 1 + \frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \left| F(x^{(n)}) \right| < \varepsilon \Rightarrow n \geq 2 \\ \left| \alpha - x^{(n)} \right| < \varepsilon \Rightarrow n \geq 1000 \end{cases}$$

No hay una elección OPTIMA del test

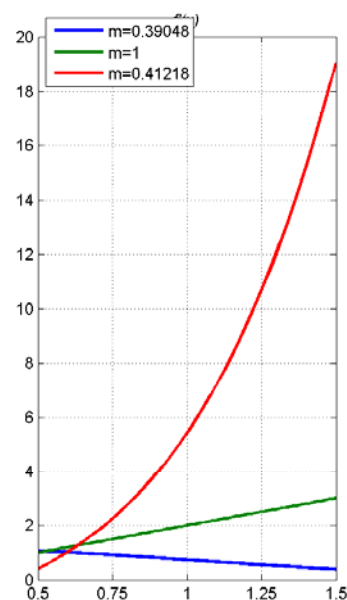
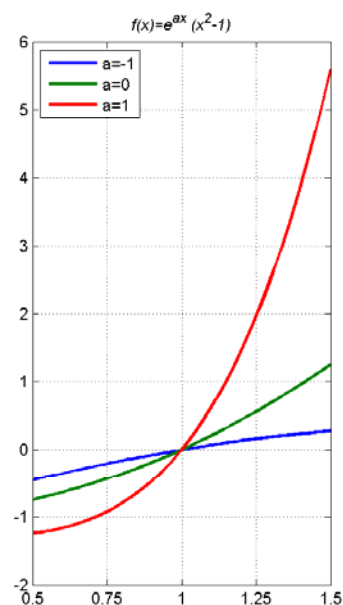


Acotación del error (caso general)

• Teorema

Sea la ecuación $F(x)=0$, donde $F(x)$ una función continua y derivable en $[a, b]$, α su raíz exacta y $x^{(n)}$ una aproximada, ambas situadas en el intervalo $[a,b]$, si $F'(x)$ tiene una cota inferior no nula m en todo el intervalo, la diferencia entre la solución real y la aproximada está acotada por $F(x)/m$

$$\left. \begin{array}{l} F(x) \in C^1[a, b] \\ \alpha \in [a, b] : F(\alpha) = 0 \\ |F'(\alpha)| \geq m \end{array} \right\} \Rightarrow |\alpha - x^{(n)}| \leq \left| \frac{F(x^{(n)})}{m} \right|$$



x	a	F(x)	Cota
0.75	-1	-0.2067	0.5293
	0	-0.4375	0.4375
	1	-0.9262	2.2470
1.25	-1	0.1612	0.4127
	0	0.5625	0.5625
	1	1.9633	4.7633

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía



Bases

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- Aplicación del Teorema de Bolzano.
- Proceso: disminuir en cada iteración el tamaño del intervalo en que se busca la raíz, hasta alcanzar la precisión deseada.
- Procedimiento:
 - $F(x)$ verifica Bolzano en $[a,b]$
 - Mientras no se cumpla el criterio de parada, repetir:
 - Generar un valor $x^{(n)}$ en $[a,b]$
 - Seleccionar el intervalo $[a, x^{(n)}]$ o $[x^{(n)}, b]$ que cumpla Bolzano
- Acotación
$$|b - a| = |b_0 - a_0| > |b_1 - a_1| > \cdots |b_n - a_n| : F(b_n)F(a_n) < 0$$
$$x^{(n)} \in [a_n, b_n] \Rightarrow |\alpha - x^{(n)}| \leq |b_n - a_n|$$



Bisección

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- Considera sólo el signo de la función
- Toma el punto medio del intervalo
$$x^{(n)} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$
- Acotación $|a - x^{(n)}| \leq \frac{|b - a|}{2^n}$
 - ¿Cuántos terminos se necesitan para que el error sea menos que ε ?

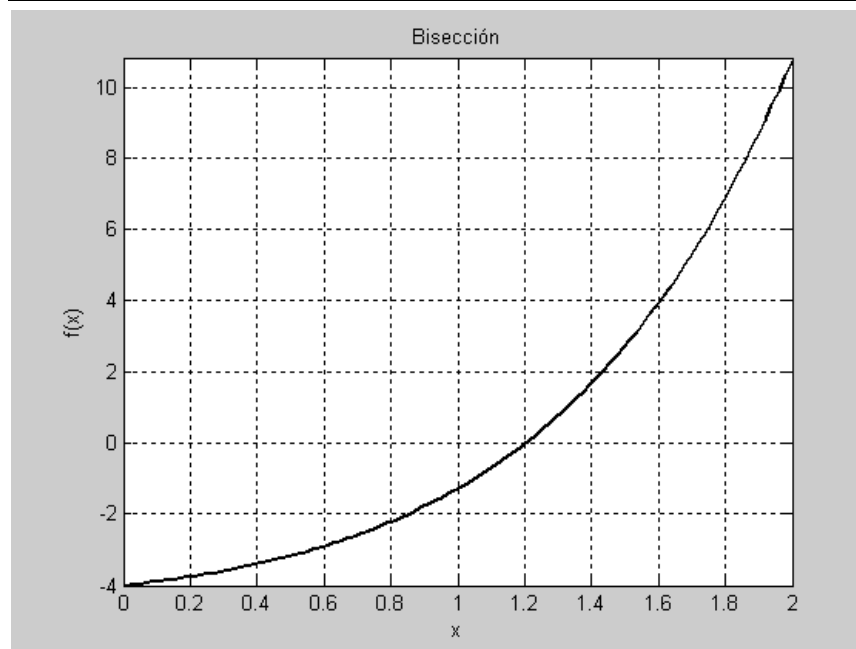
$$n \geq \log_2 \frac{|b - a|}{\varepsilon}$$

- Ventajas: muy simple y $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = 0$
- Inconvenientes: no usa información sobre la función



Bisección (Ejemplo) $F(x) = x \cdot e^x - 4$ $x^{(n)} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$

Iter	a	F(a)	b	F(b)	$x^{(n)}$	$f(x^{(n)})$
1	0.0000	-	2.0000	+	1.0000	-
2	1.0000	-	2.0000	+	1.5000	+
3	1.0000	-	1.5000	+	1.2500	+
4	1.0000	-	1.2500	+	1.1250	-
5	1.1250	-	1.2500	+	1.1875	-
:	:	:	:	:	:	:
11	1.2012	-0.0073	1.2031	+0.0070	1.2021	-0.0001



$$r = 1.202171326\ldots$$
$$\approx 1.2022$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía



Regula Falsi

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- Considera el valor de la función
- Toma una aproximación lineal $F(x) \approx P_1(x)$

$$x^{(n)} = a_n - F(a_n) \frac{b_n - a_n}{F(b_n) - F(a_n)} = b_n - F(b_n) \frac{b_n - a_n}{F(b_n) - F(a_n)}$$

- Ventajas: simple, convergencia superlineal $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Inconvenientes: $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = 0$?

- Teorema

Sea $F(x)$ continua y derivable en $[a,b]$ tal que cambia de signo en los extremos y su derivada no se anula en todo el intervalo, y sean M y m el máximo y el mínimo respectivamente de $|F'(x)|$ en $[a,b]$, entonces el error del método de “Regula Falsi” viene acotado por

$$|a - x^{(n)}| \leq \frac{M - m}{m} |x^{(n)} - x^{(n-1)}|$$

**Regula Falsi (Ejemplo)**

$$F(x) = x \cdot e^x - 4$$

$$x^{(1)} = a - F(a) \frac{b-a}{F(b)-F(a)} = 0 - (-4) \frac{2-0}{10.7781-(-4)} = 0.5413$$

$$r = 1.202171326\dots \\ \approx 1.2022$$

$$x^{(2)} = 0.5413 - (-3.0698) \frac{2-0.5413}{10.7781-(-3.0698)} = 0.8647$$

$$x^{(3)} = 0.8647 - (-1.9470) \frac{2-0.8647}{10.7781-(-1.9470)} = 1.0384$$

$$x^{(4)} = 1.0384 - (-1.0668) \frac{2-1.0384}{10.7781-(-1.0668)} = 1.1250$$

Iter	a	F(a)	b	F(b)	$x^{(n)}$	$f(x^{(n)})$
1	0.0000	-4.0000	2.0000	+10.7781	0.5413	-3.0698
2	0.5413	-3.0698	2.0000	+10.7781	0.8647	-1.9470
3	0.8647	-1.9470	2.0000	+10.7781	1.0384	-1.0668
4	1.0384	-1.0668	2.0000	+10.7781	1.1250	-0.5347
5	1.1250	-0.5347	2.0000	+10.7781	1.1664	-0.2556
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
11	1.2014	-0.0053	2.0000	+10.7781	1.2018	-0.0024

Descripción**Objetivos****Temario**

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES**Ejercicios****Bibliografía**



Regula Falsi (Ejemplo II)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

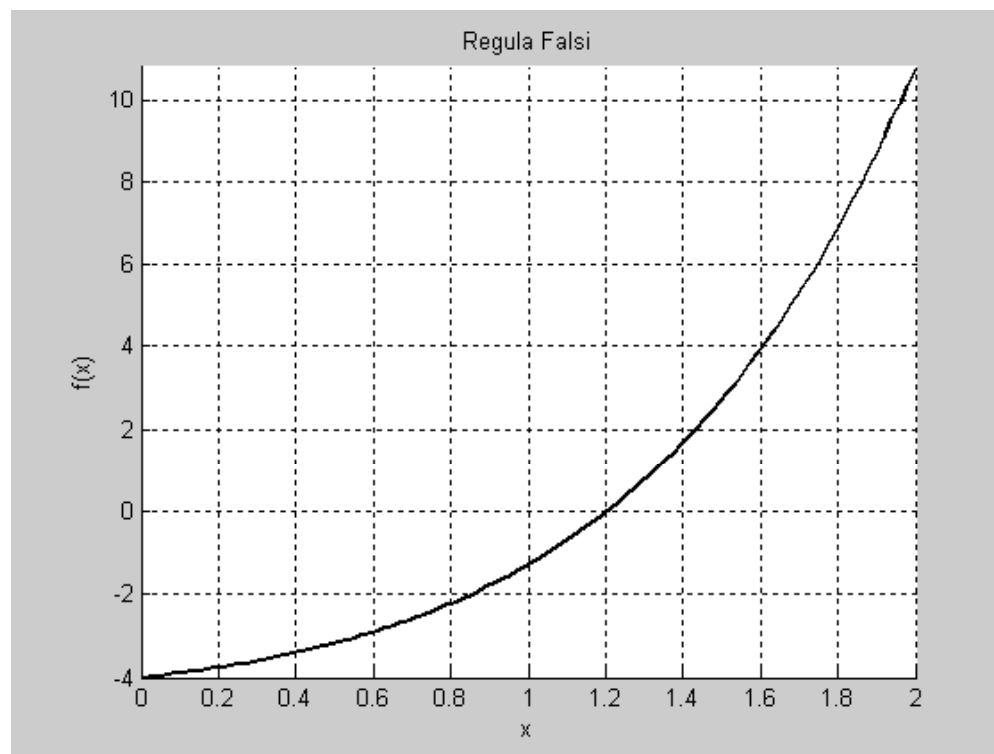
Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

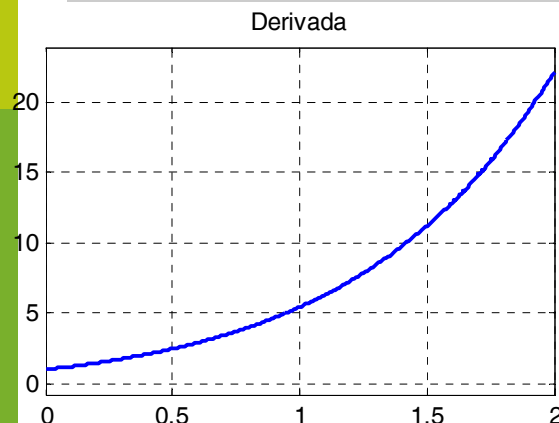
Ejercicios

Bibliografía



$$Cota = \frac{M - m}{m} |x^{(n)} - x^{(n-1)}|$$

$$M \approx 22.17 \quad m = 1$$



Iter	x_{n+1}	x_n	$ \alpha - x^{(n)} $	Cota	$ b_n - a_n $
2	0.8647	0.5413	0.3375	6.8445	2.000
3	1.0384	0.8647	0.1638	3.6768	1.459
4	1.1250	1.0384	0.0772	1.8332	1.135
5	1.1664	1.1250	0.0358	0.8754	0.962
6	1.1857	1.1664	0.0165	0.4088	0.875
7	1.1946	1.1857	0.0076	0.1888	0.834



Régula Falsi Modificada

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

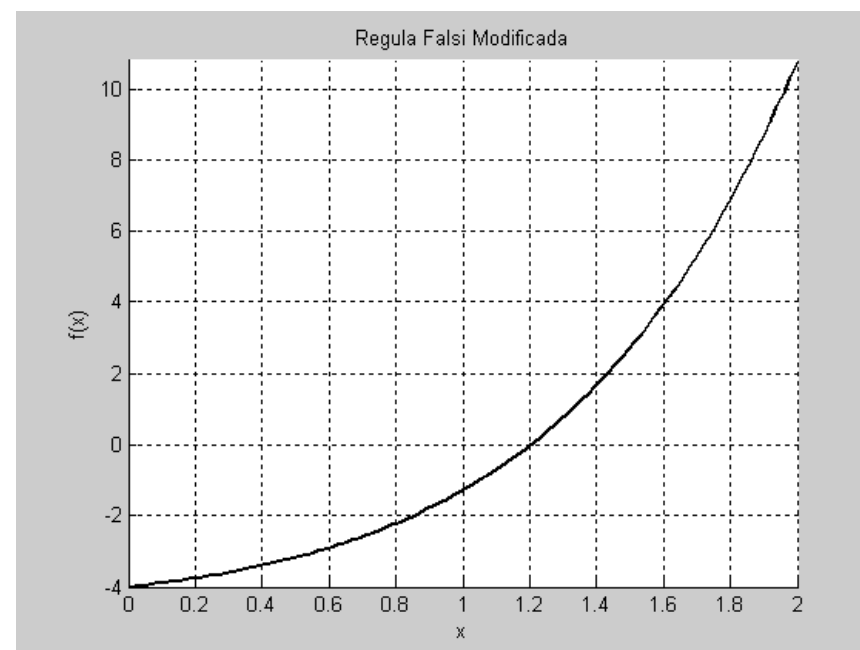
- Objetivo: $|b_n - a_n| \rightarrow 0$
 - Disminuir el intervalo por ambos lados
- Método
 - Cuando hay dos sustituciones consecutivas del intervalo por el mismo extremo, el valor de la función en el otro extremo se divide a la mitad.
 - Proceso
 1. Asignar $fxn \leftarrow 0$; $fa \leftarrow F(a)$; $fb \leftarrow F(b)$
 2. Mientras que $|b-a| > \varepsilon$ ó criterio $> \varepsilon$, repetir Pasos 3-11
 3. Calcular $x^{(n)}$
 4. Si $F(x^{(n)})=0$ entonces Raiz_Exacta = $x^{(n)}$; FIN
 5. Si $F(x^{(n)}) \cdot fa > 0$ entonces
 1. $a = x^{(n)}$ y $fa = F(x^{(n)})$
 2. Si $fxn \cdot F(x^{(n)}) > 0$ disminuir la función en b: $fb = fb/2$
 6. Sino
 1. $b = x^{(n)}$ y $ba = F(x^{(n)})$
 2. Si $fxn \cdot F(x^{(n)}) > 0$ disminuir la función en a: $fa = fa/2$
 7. Hacer $fxn = F(x^{(n)})$



Regula Falsi Modificada (Ejemplo) $F(x) = x \cdot e^x - 4$

Iter	a	F(a)	b	F(b)	$x^{(n)}$	$f(x^{(n)})$
1	0.0000	-4.0000	2.0000	+10.7781	0.5413	-3.0698
2	0.5413	-3.0698	2.0000	+10.7781	0.8647	-1.9470
3	0.8647	-1.9470	2.0000	+5.3891	1.1660	-0.2581
4	1.1660	-0.2581	2.0000	+2.6945	1.2389	+0.2766
5	1.1660	-0.2581	1.2389	+0.2766	1.2012	-0.0071
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
8	1.2021	-0.0002	1.2022	+0.0002	1.2022	0.0000

$$r = 1.202171326 \dots$$
$$\approx 1.2022$$



Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía





Müller

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- Toma una aproximación cuadrática

$$F(x) \approx P_2(x)$$

- Procedimiento

- Utilizar tres puntos (a,m,b) para calcular la parábola
- Obtener la raíz r de la parábola que esta en el intervalo [a,b]
 - Si $r > m$ ($F(a)$ y $F(m)$ tienen el mismo signo) $\Rightarrow$ usar la terna (m,r,b)
 - Si $r < m$ ($F(b)$ y $F(m)$ tienen el mismo signo) $\Rightarrow$ usar la terna (a,r,m)

- Ventajas: convergencia superlineal: 1.85
- Inconvenientes: cálculos más complejos



Müller (Ejemplo)

$$F(x) = x \cdot e^x - 4$$

Iter	a	F(a)	m	F(m)	b	F(b)	$x^{(n)}$	$f(x^{(n)})$
1	0.0000	-4.0000	1.0000	-1.2817	2.0000	10.7781	1.1577	-0.3153
2	1.0000	-1.2817	1.1577	-0.3153	2.0000	10.7781	1.1996	-0.0189
3	1.1577	-0.3153	1.1996	-0.0189	2.0000	10.7781	1.2021	-0.0003
4	1.1996	-0.0189	1.2021	-0.0003	2.0000	10.7781	1.2022	-2.3×10^{-7}

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

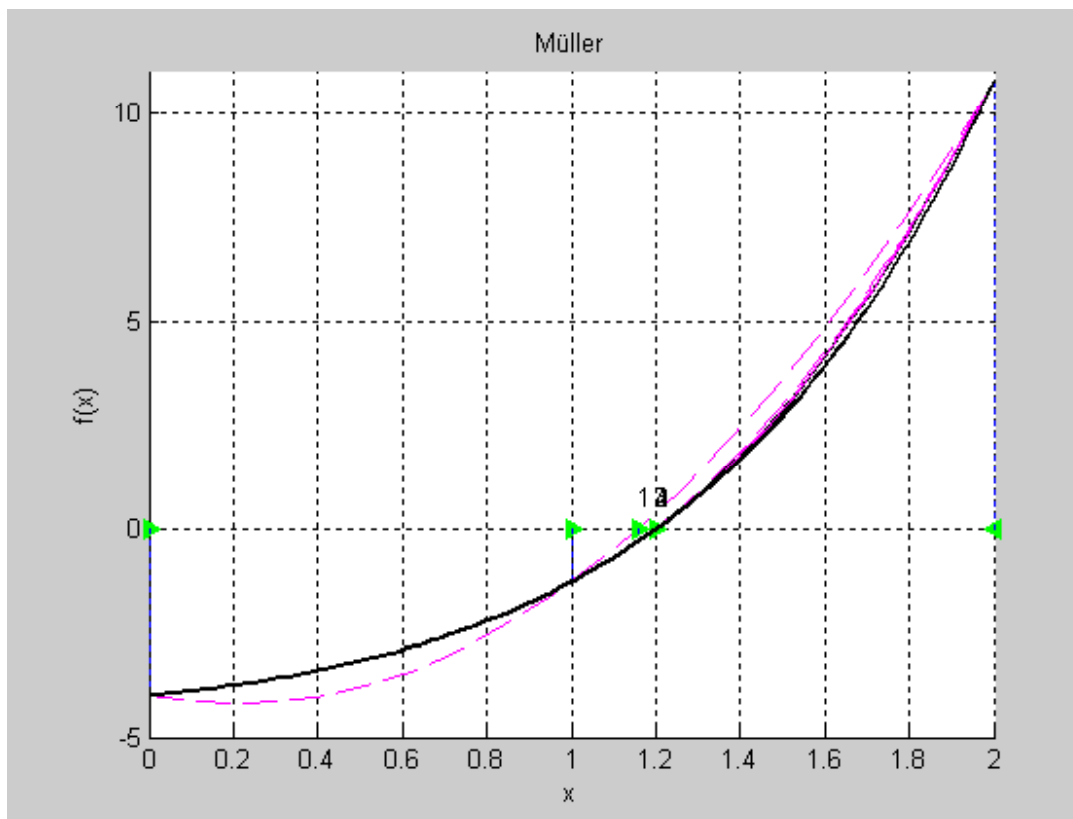
Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía





Métodos de punto fijo

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

Ejercicios

Bibliografía

Definición

Sea $G(x)$ una función continua en $[a, b]$ y un punto c en $[a, b]$ tal que $G(c)=c$, entonces c se denomina punto fijo de $G(x)$.

Justificación

- Transformar $F(x)$ en $G(x)=x$
- Obtener raíces de $F(x)$ “equivale” a calcular los puntos fijos de $G(x)$

Problemas

- Existen infinitas transformaciones

$$F(x) + x^n = x^n \rightarrow x = \sqrt[n]{F(x) + x^n}$$

- ¿Todas las raíces de $F(x)$ son puntos fijos de $G(x)$? ¿y todos los puntos fijos de $G(x)$ son raíces de $F(x)$?

$$F(x) = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{x+2} & x = 2 \\ x = -\sqrt{x+2} & x = -1 \end{cases}$$
$$x^2(x^2 - x - 2) \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{2}(x^4 - x^3)} & x = 2, 0 \\ x = -\sqrt{\frac{1}{2}(x^4 - x^3)} & x = -1, 0 \end{cases}$$



Existencia y unicidad de solución

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

● Teorema

- Sea $G(x)$ una función continua en $[a, b]$ tal que $G(a) \geq a$ y $G(b) \leq b$, entonces $G(x)$ tiene uno o más puntos fijos en $[a, b]$.
- Si además $G'(x)$ está definida en (a, b) y existe una constante positiva $k < 1$ tal que para cualquier punto x del intervalo $|G'(x)| \leq k < 1$, entonces el punto fijo es único.

● Procedimiento: Generar la sucesión $x^{(n+1)} = G(x^{(n)})$

● Notas

- Condiciones suficientes, no necesarias
 - Sea $G(x)$ una función continua en $[a, b]$ tal que $G(a) \leq a$ y $G(b) \geq b$, entonces $G(x)$ tiene uno o más puntos fijos en $[a, b]$.
 - Si además $G'(x)$ está definida en (a, b) y existe una constante positiva $k < 1$ tal que para cualquier punto x del intervalo $|g'(x)| \geq k > 1$, entonces el punto fijo es único.





Contractividad

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

Definición

- Una función $G(x)$ definida en $[a, b]$ se denomina contractiva cuando para cualquier par de puntos del intervalo la distancia entre las imágenes es menor que entre los puntos iniciales.

$$G(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} \forall x_1, x_2 \in [a,b] \rightarrow |G(x_1) - G(x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \\ 0 \leq L < 1 \end{array} \right.$$

Teorema:

$G(x) \in C^1[a,b]$ entonces $G(x)$ contractiva $\Leftrightarrow \forall x \in [a,b]: |G'(x)| < 1$

Notas:

- Contractividad $\Rightarrow$ Continuidad

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon / L \text{ tal que } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < L |x - a| < \varepsilon$$

- Contractividad $\nRightarrow$ Derivabilidad

$$f(x) = \left| \frac{x}{4} \right|, x \in [-1, 1] \left\{ \begin{array}{l} \forall x_1, x_2 / x_1 \cdot x_2 > 0 \quad \left| \left| \frac{x_1}{4} \right| - \left| \frac{x_2}{4} \right| \right| \leq \left| \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{4} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{4} \\ \forall x_1, x_2 / x_1 \cdot x_2 < 0 \quad \left| \left| \frac{x_1}{4} \right| - \left| \frac{x_2}{4} \right| \right| \leq \left| \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{4} \end{array} \right.$$

- Continuidad $\nRightarrow$ Contractividad

$$f(x) = 3x, x \in [-1, 1] / \forall x_1, x_2 : |3x_1 - 3x_2| > |x_1 - x_2|$$



Teorema de Punto fijo

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- **Teorema de punto fijo**

Si $g(x) \in C[a,b]$ y verifica:

1. $\forall x \in [a,b]: g(x) \in [a,b]$ (la imagen del intervalo esta en el intervalo)

2. $\exists k \in [0,1)/\forall x \in [a,b]: |g'(x)| \leq k < 1$ (función contractiva)

entonces la sucesión $\{x^{(n)}\}$, generada mediante la relación $x^{(n)} = g(x^{(n-1)})$ converge para cualquier valor inicial $x^{(0)}$ de $[a,b]$ al punto fijo α de $g(x)$.

- Corolario: bajo las condiciones anteriores se verifican las siguientes acotaciones

$$|\alpha - x_n| \leq k^n |\alpha - x_0| \quad |\alpha - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$$

[Demo](#)

- **Ventajas e inconvenientes del método**

- Ventajas: Aplicable a raíces de cualquier orden
- Inconvenientes: Convergencia Lineal y encontrar la función que cumpla las condiciones del teorema



Ejemplos gráficos

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

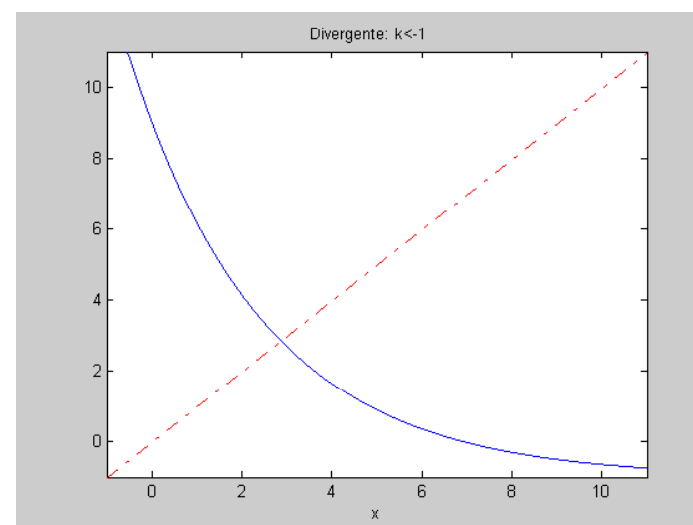
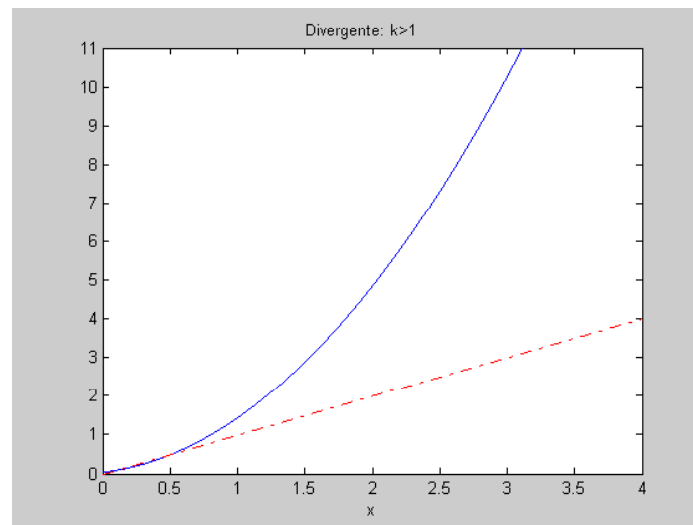
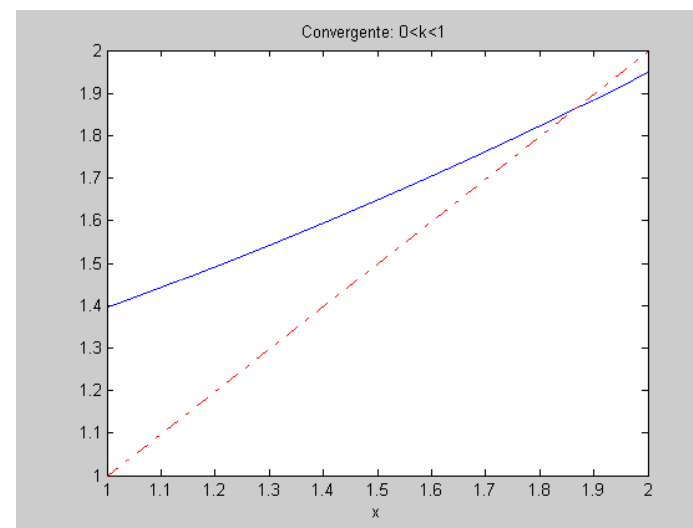
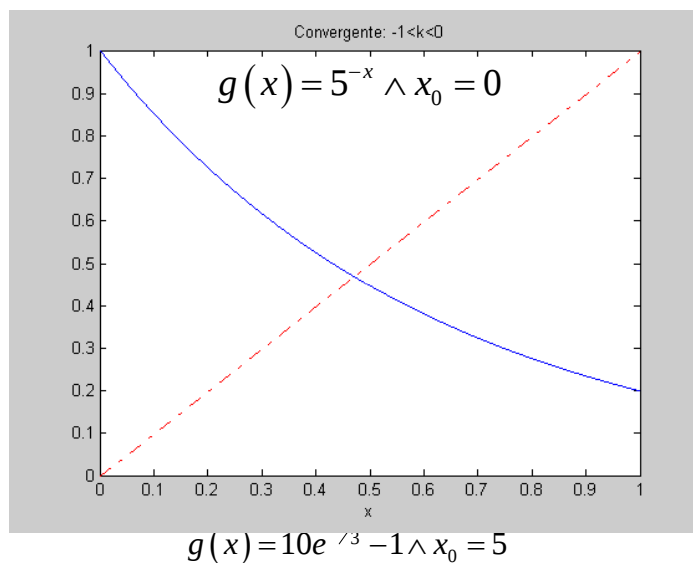
Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía



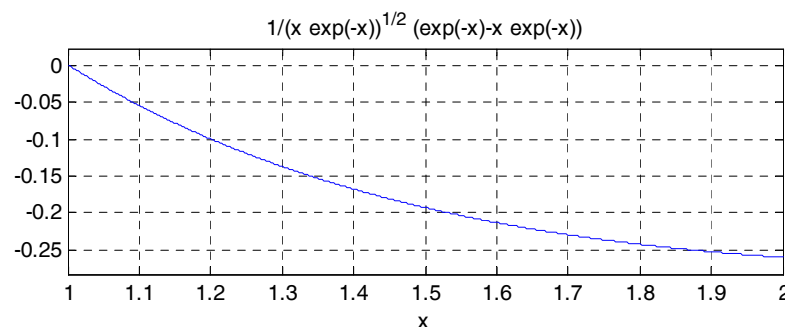
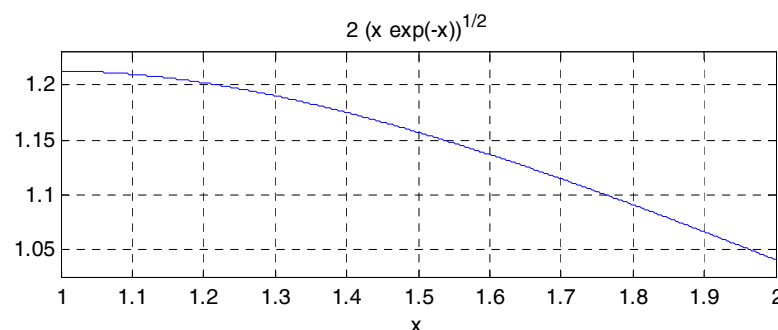


Punto fijo (Ejemplo 1A) $F(x) = x \cdot e^x - 4$ en $[1, 2]$

$$F(x) = x \cdot e^x - 4 = 0 \rightarrow g(x) = \frac{4}{e^x} \quad \boxed{\times}$$

$$F(x) = x \cdot e^x - 4 = 0 \rightarrow g(x) = \log\left(\frac{4}{x}\right) \quad \boxed{\times}$$

$$xF(x) = x^2 \cdot e^x - 4x = 0 \rightarrow g(x) = 2\sqrt{xe^{-x}} \quad \boxed{\checkmark}$$



n	x_n	x_n
0	1.0000	2.0000
1	1.2131	1.0405
2	1.2010	1.2126
3	1.2023	1.2011
4	1.2022	1.2023
5	1.2022	1.2022
6	1.2022	1.2022
7	1.2022	1.2022
8	1.2022	1.2022
9	1.2022	1.2022

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía



Punto fijo (Ejemplo 1B) $F(x) = x \cdot e^x - 4$ en $[1, 2]$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Mét. Iter. Funcional

Mét. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

● Estudio analítico

– Mapeo: $\forall x \in [a, b]: g(x) \in [a, b]$



$$g(x) = 2\sqrt{xe^{-x}} = 2\sqrt{\frac{x}{e^x}} \quad g'(x) = (e^{-x} - xe^{-x})(xe^{-x})^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-x} - xe^{-x}}{\sqrt{xe^{-x}}} = \frac{1-x}{\sqrt{xe^x}}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$g(1) = 2\sqrt{\frac{1}{e}} \approx 1.2131 \quad g(2) = 2\sqrt{\frac{2}{e^2}} \approx 1.0405 \quad \max_{x \in [1, 2]} g(x) \approx 1.2131 \quad \min_{x \in [1, 2]} g(x) \approx 1.0405$$

– Contractividad $\exists k \in [0, 1) / \forall x \in [a, b]: |g'(x)| \leq k < 1$



$$g'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{xe^x}} \quad g''(x) = \frac{1+2x-x^2}{2\sqrt{x^3e^x}}$$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow 1+2x-x^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \notin [1, 2]$$

$$g'(1) = 0 \quad g'(2) = -0.2601 \quad \max_{x \in [1, 2]} |g'(x)| \approx 0.2722$$



Velocidad de convergencia

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- Nota: Si $G(x)$ verifica las condiciones de punto fijo en $[a,b]$, entonces $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow \alpha$

- Desarrollo de Taylor

$$G(x^{(n)}) = G(\alpha) + (x^{(n)} - \alpha) \frac{G'(\alpha)}{1!} + (x^{(n)} - \alpha)^2 \frac{G''(\alpha)}{2!} + \dots + (x^{(n)} - \alpha)^n \frac{G^{(n)}(\alpha)}{n!} + \dots \rightarrow$$

$$\rightarrow x^{(n+1)} - \alpha = (x^{(n)} - \alpha) \frac{G'(\alpha)}{1!} + (x^{(n)} - \alpha)^2 \frac{G''(\alpha)}{2!} + \dots + (x^{(n)} - \alpha)^n \frac{G^{(n)}(\alpha)}{n!} + \dots$$

- Si $G'(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ Orden uno (convergencia lineal)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(n+1)} - \alpha}{x^{(n)} - \alpha} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{G'(\alpha)}{1!} + \dots + (x^{(n)} - \alpha)^{n-1} \frac{G^{(n)}(\alpha)}{n!} + \dots \right| = G'(\alpha)$$

- Si $G'(\alpha) = 0$ y $G''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ Orden 2 (cuadrática)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(n+1)} - \alpha}{(x^{(n)} - \alpha)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{G''(\alpha)}{2!} + \dots + (x^{(n)} - \alpha)^{n-2} \frac{G^{(n)}(\alpha)}{n!} + \dots \right| = \frac{G''(\alpha)}{2!}$$

- Si $G'(\alpha) = \dots = G^{(n-1)}(\alpha) = 0$ y $G^{(n)}(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ Orden n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(n+1)} - \alpha}{(x^{(n)} - \alpha)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{G^{(n)}(\alpha)}{n!} + \dots \right| = \frac{G^{(n)}(\alpha)}{n!}$$



Aceleración de la velocidad de convergencia

● Método de Aitken:

- A partir de una función de punto fijo $G(x)$ con convergencia lineal genera otra sucesión con mayor velocidad de convergencia

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ x^{(n)} = G(x^{(n-1)}) \right\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow \alpha \\ \left\{ y^{(n)} = x^{(n)} - \frac{(\Delta x^{(n)})^2}{\Delta^2 x^{(n)}} \right\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow \alpha \end{array} \right\} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - y^{(n)}}{\alpha - x^{(n)}} = 0$$

[Demo](#)

donde $\Delta x^{(n)} = x^{(n+1)} - x^{(n)}$ $\Delta^2 x^{(n)} = \Delta x^{(n+1)} - \Delta x^{(n)}$

- Inconvenientes: necesita almacenar dos series
- Solución (Método de Steffensen): combinar ambas

$$\left\{ \begin{array}{l} z^{(0)} \\ z^{(1)} = G(z^{(0)}) \\ z^{(2)} = G(z^{(1)}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nearrow z^{(3)} = z^{(0)} - \frac{(\Delta z^{(0)})^2}{\Delta^2 z^{(0)}} \\ z^{(4)} = G(z^{(3)}) \\ z^{(5)} = G(z^{(4)}) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \nearrow z^{(6)} = z^{(3)} - \frac{(\Delta z^{(3)})^2}{\Delta^2 z^{(3)}} \\ z^{(7)} = G(z^{(6)}) \\ z^{(8)} = G(z^{(7)}) \end{array} \right\} \dots$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

**Aceleración: Aitken**

$$F(x) = x \cdot e^x - 4 \text{ en } [1, 2]$$

$$x^{(n+1)} = g(x^{(n)}) = 2\sqrt{x^{(n)}e^{-x^{(n)}}} \quad y^{(n)} = x^{(n)} - \frac{(\Delta x^{(n)})^2}{\Delta^2 x^{(n)}} = x^{(n)} - \frac{(x^{(n+1)} - x^{(n)})^2}{x^{(n+2)} - 2x^{(n+1)} + x^{(n)}}$$

n	$x^{(n)}$	$\Delta x^{(n)}$	$\Delta^2 x^{(n)}$	$y^{(n)}$
0	1.0000000000000000	2.1306×10^{-1}	-2.2508×10^{-1}	1.20168447570198
1	1.213061319425267	-1.2019×10^{-2}	1.3257×10^{-2}	1.20216562399164
2	1.201042717963047	1.2386×10^{-3}	-1.3636×10^{-3}	1.20216784955552
3	1.202281350239381	-1.2495×10^{-4}	1.3758×10^{-4}	1.20216787295619
4	1.202156399867930	1.2633×10^{-5}	-1.3910×10^{-5}	1.20216787319458
5	1.202169032939500	-1.2770×10^{-6}	1.4061×10^{-6}	1.20216787319702
6	1.202167755965436	1.2908×10^{-7}	-1.4213×10^{-7}	1.20216787319704

Descripción**Objetivos****Temario**

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios**Bibliografía**

**Aceleración: Steffensen** $F(x) = x \cdot e^x - 4$ en $[1, 2]$ **Descripción****Objetivos****Temario**

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios**Bibliografía**

n	$x^{(n)}$	$\Delta z^{(n)}$ $\Delta^2 z^{(n)}$	$z^{(n)}$	$y^{(n)}$
0	1.0000000000000000		=	1.201684475701979
1	1.213061319425267		=	1.202165623991641
2	1.201042717963047		=	1.202167849555524
3	1.202281350239381	2.1306×10^{-1} -2.2508×10^{-1}	1.201684475701979	1.202167872956192
4	1.202156399867930		1.202216689302744	1.202167873194581
5	1.202169032939500		1.202162938187486	1.202167873197018
6	1.202167755965436	5.3221×10^{-4} -5.8596×10^{-4}	1.202167868829746	1.202167873197043
7	1.202167885047273		1.202167873638506	1.202167873197043
8	1.202167871999175		1.202167873152418	1.202167873197043
9	1.202167873318128	4.8088×10^{-9} -5.2948×10^{-9}	1.202167873197043	1.202167873197043



Aceleración: Comparativa $F(x) = x \cdot e^x - 4$ en $[1, 2]$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía



Origen

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- Encontrar un método con velocidad cuadrática $F(x) = 0 \rightarrow G(x) = x - F(x)\phi(x)$
- Planteamiento:
 1. ¿Condiciones $\phi(x)$?
$$G'(x) = 1 - F'(x)\phi(x) - F(x)\phi'(x)$$
$$G'(\alpha) = 0 \rightarrow \phi(\alpha) = \frac{1}{F'(\alpha)}$$
- Método de Newton
$$G(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} \rightarrow x^{(n+1)} = G(x^{(n)}) = x^{(n)} - \frac{F(x^{(n)})}{F'(x^{(n)})}$$
- Ventajas: velocidad cuadrática (casi siempre)
- Inconvenientes: cálculo de $F'(x)$, derivada nula, intervalo y condiciones de convergencia



Justificaciones

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

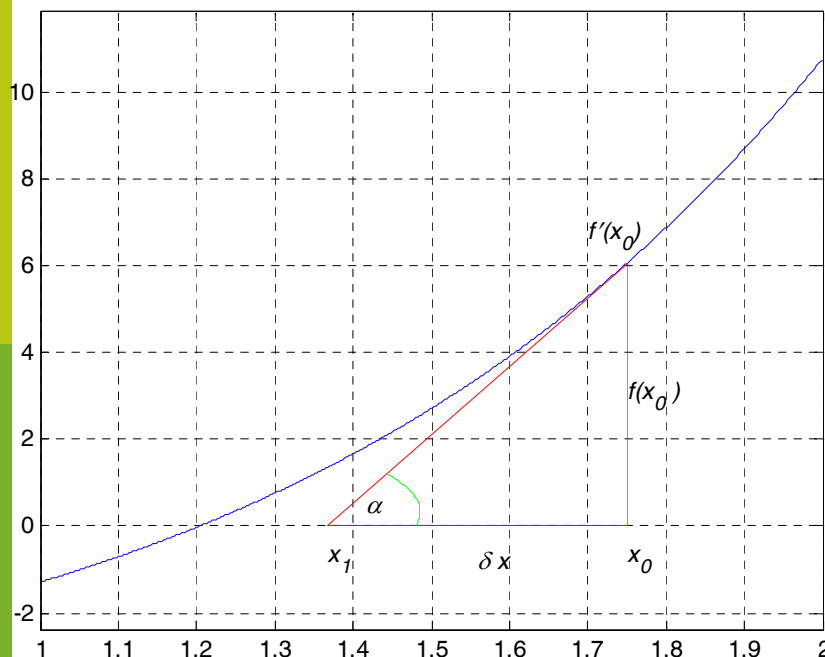
• Desarrollo de Taylor “cerca” de la raíz

$$F(\alpha) = F(x) + (\alpha - x) \frac{F'(x)}{1!} + \dots + (\alpha - x)^n \frac{F^{(n)}(x)}{n!} + \dots \xrightarrow{|\alpha - x|^2 \ll |\alpha - x|}$$

$$\rightarrow 0 \approx F(x) + (\alpha - x) \frac{F'(x)}{1!} \Rightarrow \alpha \approx x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

• Justificación gráfica

Método de Newton



$$\tan(\alpha) = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{\delta x}$$

$$x_1 = x_0 - \delta x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Condiciones de convergencia global

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

● Teorema

Sea $F(x) \in C^2[a,b]$ tal que

1. $F(a) \cdot F(b) < 0$
2. $F'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$
3. $F''(x)$ no cambia de signo $\forall x \in [a,b]$

$$4. \max \left\{ \left| \frac{F(a)}{F'(a)} \right|, \left| \frac{F(b)}{F'(b)} \right| \right\} \leq |b - a|$$

entonces la sucesión generada por el método de Newton converge a α para cualquier selección inicial de $x_0 \in [a,b]$

● Notas

- Condición 4 asegura la permanencia en el intervalo
- Suficientes 1-3 eligiendo el extremo con $F(x)F''(x) > 0$
- Condiciones suficientes, no necesarias.



Newton (Ej. Condiciones) $F(x) = x \cdot e^x - 4$ en $[1, 2]$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

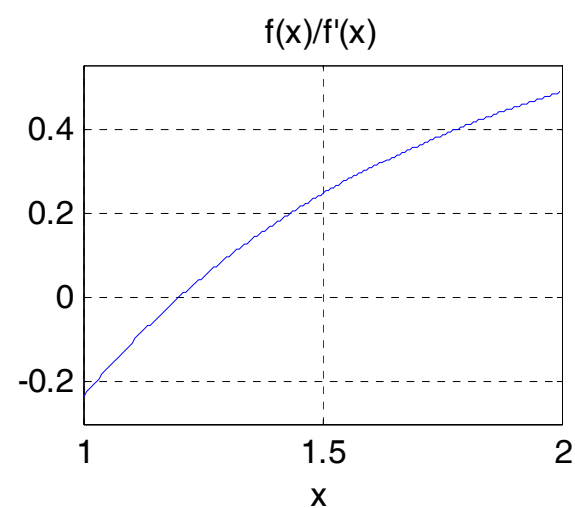
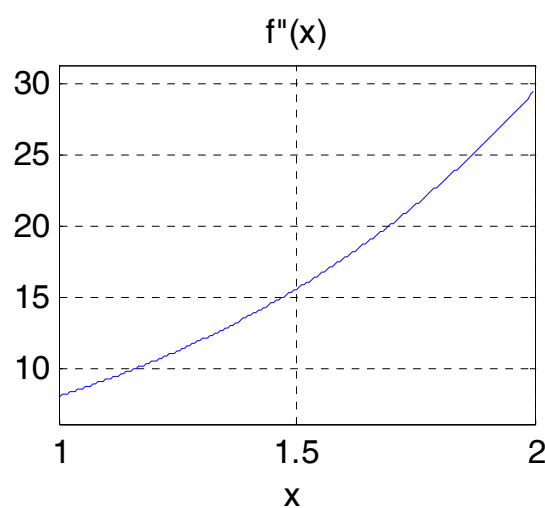
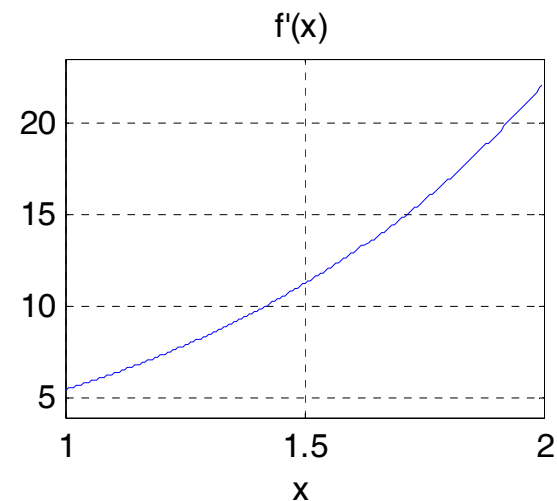
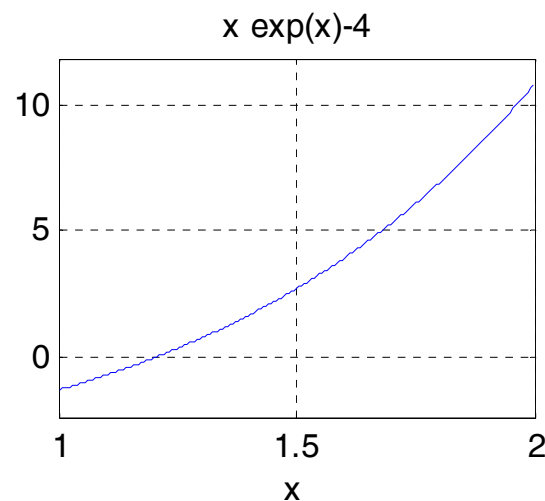
Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía





Newton (Ej. Iteraciones) $F(x) = x \cdot e^x - 4$ en $[1, 2]$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

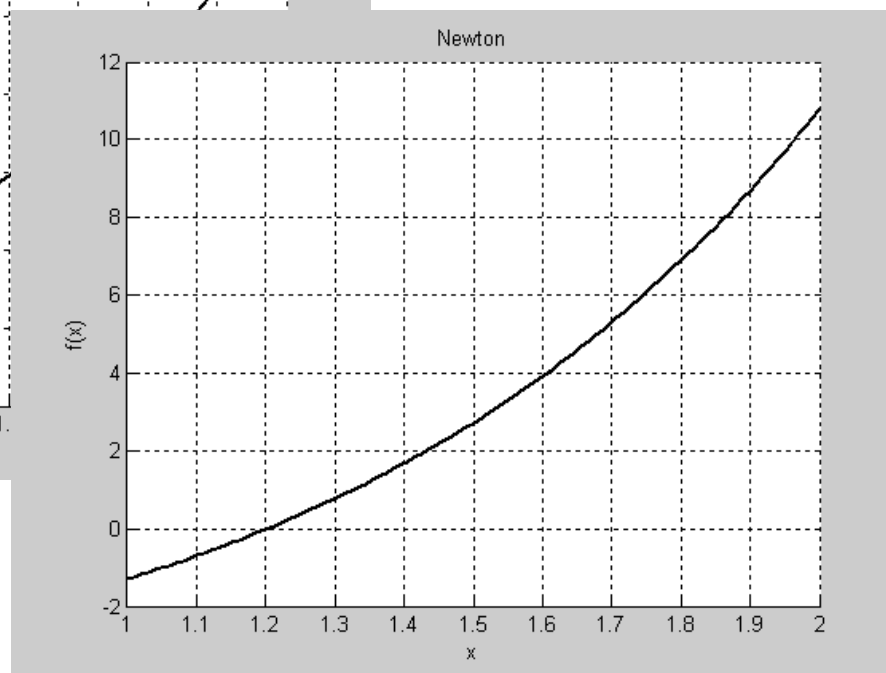
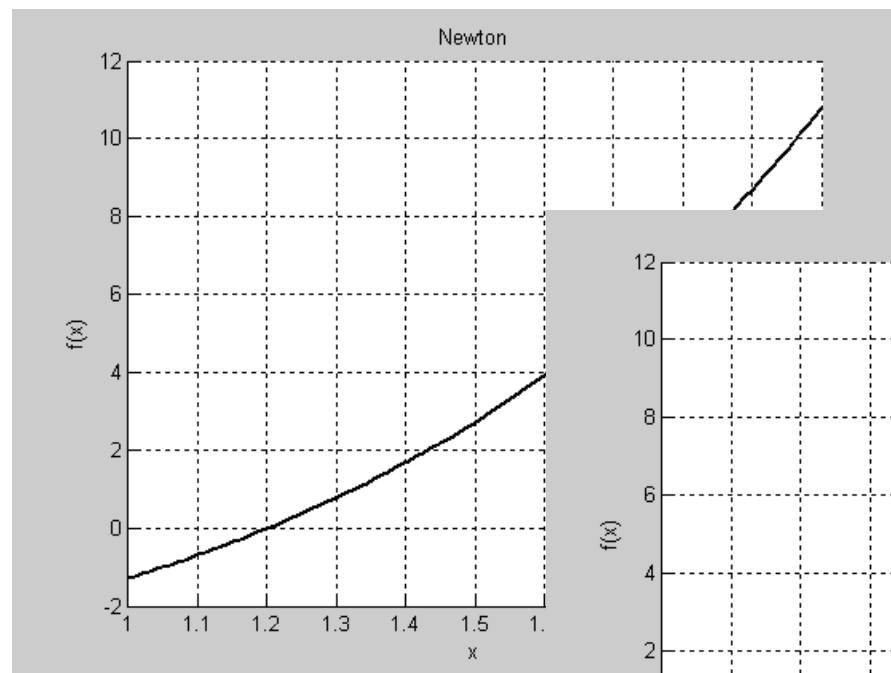
Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía



n	x_n	x_n
01	1.0000	2.0000
02	1.2358	1.5138
03	1.2030	1.2618
04	1.2022	1.2047
05	1.2022	1.2022





Métodos con convergencia cúbica

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- Halley
$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{2F(x^{(n)})\left(F'(x^{(n)})\right)^2}{2\left(F'(x^{(n)})\right)^3 - F(x^{(n)})F''(x^{(n)})}$$
- Householder
$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{F(x^{(n)})}{F'(x^{(n)})} - \frac{F''(x^{(n)})}{2F'(x^{(n)})} \left(\frac{F(x^{(n)})}{F'(x^{(n)})} \right)^2$$
- Aslam Noor
 - Predictor
$$y^{(n)} = x^{(n)} - \frac{F(x^{(n)})}{F'(x^{(n)})} \wedge z^{(n)} = -\frac{F''(x^{(n)})}{2F'(x^{(n)})} (y^{(n)} - x^{(n)})^2 \quad F'(x^{(n)}) \neq 0$$
 - Corrector
$$x^{(n+1)} = y^{(n)} - \frac{F''(x^{(n)})}{2F'(x^{(n)})} (y^{(n)} + z^{(n)} - x^{(n)})^2$$
 - Predictor
$$y^{(n)} = x^{(n)} - \frac{F(x^{(n)})}{F'(x^{(n)})} \wedge z^{(n)} = F'(x^{(n)}) \left[1 + \frac{F(x^{(n)})^2}{F(y^{(n)})} \right] \quad F'(x^{(n)}) \neq 0$$
 - Corrector
$$x^{(n+1)} = y^{(n)} - z^{(n)} \frac{F(y^{(n)})}{F'(x^{(n)})} - (z^{(n)})^2 \frac{F^2(y^{(n)})}{F(x^{(n)})F'(x^{(n)})}$$



Variaciones del método de Newton

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- Withaker

- Hace una derivación aproximada para evitar el cálculo de la derivada

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)h}{F(x_n+h) - F(x_n)}$$

- Problemas de estabilidad numérica

- Secante

- Aproxima la derivada por la secante en dos puntos sucesivos.
- No se puede tratar como un método de punto fijo
- Velocidad de convergencia superlineal
- Al ser una recta, la actualización de valores tiene una fórmula similar a la de “Regula Falsi”

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})}$$





Müller funcional

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- También toma una aproximación cuadrática
- Procedimiento
 - Utilizar tres puntos (x_0, x_1, x_2) para calcular la parábola $P_2(x)=ax^2+bx+c$
 - Obtener las raíces r de la parábola

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

- tomar aquella en que ambos términos del denominador tienen el mismo signo
 - Tomar como nueva terna (x_1, x_2, r)
- Ventajas: convergencia superlineal: 1.85
- Inconvenientes: cálculos más complejos



Raíces múltiples

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- ¡La convergencia deja de ser cuadrática!

- $F(x)$ tiene una raíz α de multiplicidad n

$$f(x) = (x - \alpha)^n h(x) : h(\alpha) \neq 0 \rightarrow g'(\alpha) = 1 - \frac{1}{n}$$

[Demo](#)

- Soluciones alternativas

- Si se conoce la multiplicidad $G(x) = x - n \frac{F(x)}{F'(x)}$

- Si no se conoce $G(x) = x - \frac{\psi(x)}{\psi'(x)}$

Donde $\psi(x)$ es una función que tiene las mismas raíces que $F(x)$, pero simples, y se obtiene mediante

$$\psi(x) = \frac{F(x)}{F'(x)}$$

[Demo](#)



Ventajas en inconvenientes

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- Métodos de intervalo
 - Exigen las condiciones del teorema de Bolzano
 - Sólo son válidos para encontrar raíces simples
 - Acotan el error de la raíz y no sólo el de la función
 - La longitud del intervalo “suele” tender a cero
 - Velocidades de convergencia lineales y superlineales
- Métodos de iteración funcional
 - Exigen las condiciones de punto fijo.
 - Puede ser complicado encontrar la función que las verifique
 - Son válidos para raíces de cualquier multiplicidad
 - No acotan el error de la raíz
 - Velocidades de convergencia lineales y cuadráticas
 - Hay métodos para acelerar la velocidad



Características

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

Nombre	Tipo	Orden	Descripción
Bisección	Intervalo	Lineal	Punto medio
R. Falsi	Intervalo	Superlineal	Aproximación lineal a la raíz
Müller	Intervalo	Superlineal	Aproximación parabólica a la raíz
P.Fijo	Funcional	Lineal o superior	
Newton	Funcional	Cuadrática (lineal)	Tangentes a la curva
Secante	Funcional	Superlineal	Secantes a la curva
Müller	Funcional	Superlineal	Aproximación parabólica a la raíz



Ecuaciones polinómicas

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- T^{ma} fundamental del Álgebra
 - Una ecuación polinómica de grado n tiene exactamente n raíces (reales o complejas), considerando que cada raíz cuenta de acuerdo con su multiplicidad.
- Identificar y acotar las mismas
 - ¿cuántas son reales y cuantas complejas?
 - ¿cuántas hay positivas?
 - ¿en que intervalo están las raíces reales?
 - ¿cuál es el máximo módulo de las raíces complejas?
 - Etc.
- Derivar polinomios

$$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x - \alpha) + R \rightarrow P_n(\alpha) = R$$

$$P'_n(x) = P'_{n-1}(x)(x - \alpha) + P_{n-1}(x) \rightarrow P'_n(\alpha) = P_{n-1}(\alpha)$$

$$P''_n(x) = P''_{n-1}(x)(x - \alpha) + P'_{n-1}(x) \rightarrow P''_n(\alpha) = P'_{n-1}(\alpha)$$



Acotación I

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

- Acotación

- Separación

- Métodos

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Los módulos de todas las raíces r_n de $P_n(x)$ satisfacen la desigualdad

$$|r_k| < 1 + \frac{\max_i |a_i|}{|a_n|}$$

- Sea $P_n(x)$ donde $a_n > 0$, y sean a_k el coeficiente negativo de mayor grado y B el coeficiente negativo mayor en valor absoluto, entonces las raíces positivas de $P_n(x)$ satisfacen la desigualdad

$$|r_i| < 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{a_n}}$$

- Ejemplo $P_n(x) = (x+7)(x+2)(x-3)(x-4)(x-5)^2 =$
 $= x^6 - 8x^5 - 32x^4 + 430x^3 - 857x^2 - 1430x + 4200$

$$|r_k| < 1 + \frac{\max_i |a_i|}{|a_n|} = 1 + \frac{4200}{1} = 4201 \quad |r_i| < 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[1]{\frac{1430}{1}} \approx 1431$$



Acotación II

Una obtenida una cota superior de las raíces reales positivas, se hallan las cotas del resto de las raíces (suponiendo que existan) mediante las relaciones

		entonces	es cota	de las raíces	
Si R es cota superior de	$P_n(-x)$	$-R$	inferior	negativas	de $P_n(x)$
	$x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right)$	$1/R$	inferior	positivas	
	$x^n P_n\left(\frac{-1}{x}\right)$	$-1/R$	superior	negativas	

DEMOSTRACIONES

$$P_n(-x) = x^6 + 8x^5 - 32x^4 - 430x^3 - 857x^2 + 1430x + 4200 \quad |r_i| < 1 + \sqrt[2]{\frac{857}{1}} \approx 30.27$$

$$x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - 8x - 32x^2 + 430x^3 - 857x^4 - 1430x^5 + 4200x^6 \quad |r_i| < 1 + \sqrt[1]{\frac{1430}{4200}} \approx 1.34$$

$$x^n P_n\left(\frac{-1}{x}\right) = 1 + 8x - 32x^2 - 430x^3 - 857x^4 + 1430x^5 + 4200x^6 \quad |r_i| < 1 + \sqrt[2]{\frac{857}{4200}} \approx 1.45$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

- Acotación

- Separación

- Métodos

Ejercicios

Bibliografía



Acotación III

- Regla de Laguerre Thibault

Condición suficiente para que $R > 0$ sea una cota superior de las raíces positivas de $P(x)=0$ es que los coeficientes y el resto de dividir $P(x)$ por $(x-R)$ sean no negativos o no positivos

	1	-8	-32	430	-857	-1430	4200
10		10	20	-120	3100	22430	210000
	1	2	-12	310	2243	21000	214200
	1	-8	-32	430	-857	-1430	4200
11		11	33	11	4851	43934	467544
	1	3	1	441	3994	42504	471744

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

- Acotación

- Separación

- Métodos

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía



Acotación IV

● Regla de Newton

Condición suficiente para que $R > 0$ sea una cota superior de las raíces positivas de $P(x)=0$ es la evaluación del polinomio y sus derivadas en R sean no negativos o no positivos

$P_n(7)$	1	-8	-32	430	-857	-1430	4200
7		7	-7	-273	1099	1694	1848
$P'_n(7)$	1	-1	-39	157	242	264	6048
7		7	42	21	1246	10416	
$P''_n(7)$	1	6	3	178	1488	10680	
7		7	91	658	5852		
$P'''_n(7)$	1	13	94	836	7340		
7		7	140	1638			
$P_n^{(iv)}(7)$	1	20	234	2474			
7		7	189				
$P_n^{(v)}(7)$	1	27	423				
7		7					
$P_n^{(vii)}(7)$	1	34					

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

- Acotación

- Separación

- Métodos

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía



Separación I

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

- Acotación

- Separación

- Métodos

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- Regla de Descartes

El número de raíces reales positivas de un polinomio es igual o inferior en un número par al de cambios de signo de sus coeficientes

- Variación de signo

Se dice que el conjunto finito de números reales $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ presenta una variación de signo, si dos términos consecutivos tienen signos opuestos. El número de variaciones del conjunto se denotará por $V(a_0, a_1, \dots, a_n)$

- Teorema de Boudan-Fourier

El número de raíces reales distintas (contada cada una tantas veces como indique su orden de multiplicidad) del polinomio $P(x)$ en el intervalo (a, b) siendo $P(a) \cdot P(b) \neq 0$ es igual o inferior en un número par a las variaciones de signo del polinomio y sus derivadas en ambos extremos, esto es, $|V(P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)) - V(P(b), \dots, P^{(n)}(b))|$

$$P_6(x) = (x + 7)(x + 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)^2$$

$$V = \{P_6(x), P_6'(x), P_6''(x), P_6'''(x), P_6^{(iv)}(x), P_6^{(v)}(x), P_6^{(vi)}(x)\}$$

$$x = 2 \rightarrow \{648, -1170, 555, 14, -52, 4, 1\} \rightarrow V\{a\} = 4$$

$$x = 7 \rightarrow \{6048, 10680, 7340, 2474, 423, 34, 1\} \rightarrow V\{b\} = 0$$



Separación II

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

- Acotación

- Separación

- Métodos

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- Teorema de Hua

En una ecuación polinómica de coeficientes reales y raíces reales se cumple que el cuadrado de cada coeficiente no extremo es mayor que el producto de los coeficientes adyacentes

- Corolario: si se tiene $a_k a_{k+1} \leq a_{k-1} a_{k+2}$ la ecuación tiene al menos dos raíces complejas

- Encontrar polinomio con las mismas raíces, pero simples

$$P_n(x) = \alpha (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} (x - x_3)^{k_3} \cdots (x - x_m)^{k_m} \rightarrow n = \sum_{i=1}^m k_i$$

$$P'_n(x) = \alpha (x - x_1)^{k_1-1} (x - x_2)^{k_2-1} (x - x_3)^{k_3-1} \cdots (x - x_m)^{k_m-1} Q(x) / Q(x_i) \neq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$R(x) = \alpha (x - x_1)^{k_1-1} (x - x_2)^{k_2-1} (x - x_3)^{k_3-1} \cdots (x - x_m)^{k_m-1} \text{ es m.c.d.}(P_n(x), P'_n(x))$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{P_n(x)}{R(x)} \text{ mismas raíces pero simples}$$

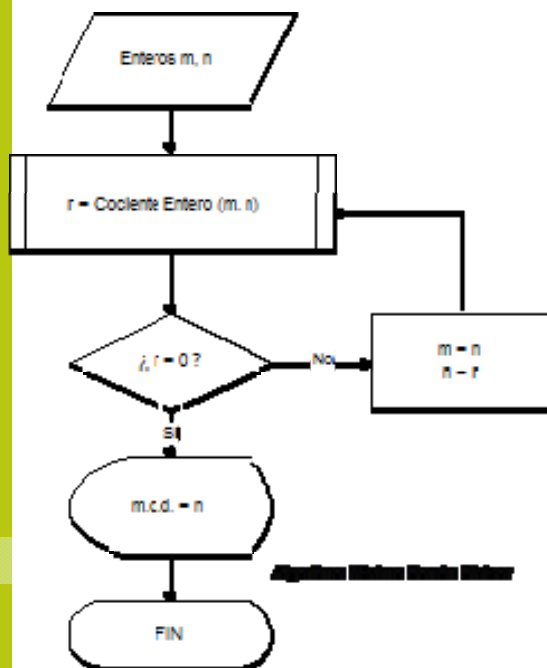
Métodos

Polinomios de Sturm (Algoritmo de Euclides)



Separación III

- Algoritmo de Euclides (m.c.d.) $D(x) = d(x)c(x) + r(x)$



$$D(x) = 3(x+3)^2(x-1)^3(x-4) = 3x^6 - 3x^5 - 54x^4 + 42x^3 + 183x^2 - 279x + 108$$

$$d(x) = 18x^5 - 15x^4 - 216x^3 + 126x^2 + 366x - 279$$

$$D(x) = d(x)\left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{36}\right) + \left(\frac{-221}{12}x^4 + 15x^3 + \frac{251}{2}x^2 - \frac{667}{3}x + \frac{401}{4}\right)$$

$$D(x) = 18x^5 - 15x^4 - 216x^3 + 126x^2 + 366x - 279$$

$$d(x) = \frac{-221}{12}x^4 + 15x^3 + \frac{251}{2}x^2 - \frac{667}{3}x + \frac{401}{4}$$

$$D(x) = d(x)\left(\frac{-216}{221}x + \frac{239}{12970}\right) + \left(\frac{-19004}{203}x^3 - \frac{19004}{203}x^2 + \frac{17787}{38}x - \frac{2022}{72}\right)$$

$$D(x) = \frac{-221}{12}x^4 + 15x^3 + \frac{251}{2}x^2 - \frac{667}{3}x + \frac{401}{4}$$

$$d(x) = \frac{-19004}{203}x^3 - \frac{19004}{203}x^2 + \frac{17787}{38}x - \frac{20221}{72}$$

$$D(x) = d(x)\left(\frac{673}{3421}x - \frac{136}{381}\right) + (0)$$

$$Q(x) = \frac{P_n(x)}{R(x)} = \frac{3x^6 - 3x^5 - 54x^4 + 42x^3 + 183x^2 - 279x + 108}{\frac{-19004}{203}x^3 - \frac{19004}{203}x^2 + \frac{17787}{38}x - \frac{20221}{72}} =$$

$$= \frac{3(x+3)^2(x-1)^3(x-4)}{\frac{-19004}{203}(x+3)(x-1)^2} = \frac{-190}{5929}x^3 + \frac{229}{3573}x^2 + \frac{190}{539}x - \frac{458}{1191}$$

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

- Acotación

- Separación

- Métodos

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía



Métodos específicos para raíces polinómicas

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

- Acotación

- Separación

- Métodos

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía

- Método de Birge-Vietta
 - Es el método de Newton particularizado para polinomios
- Método de Bairstow
 - Obtiene factores cuadráticos.
- Método QD
 - Obtiene una aproximación a todas las raíces sin realizar la división sintética
- Método de Lobachesky-Greaffe
 - Utiliza la elevación al cuadrado de la raíz para obtener raíces reales separadas y “complejas”
- Método de Bernuilli
 - Obtiene la raíz real de mayor módulo



Bairstow

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

- Acotación

- Separación

- Métodos

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía



Q-D

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Polinomios

- *Acotación*

- *Separación*

- *Métodos*

DEMOSTRACIONES

Ejercicios

Bibliografía



Anexos

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

Ejercicios

Bibliografía

- Demostraciones y desarrollos



Demostración Teoremas

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

Ejercicios

Bibliografía

• Teorema I

$$F(x) \in C[a, b] / F(a) \cdot F(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in [a, b] / F(c) = 0$$

Hipótesis : sean $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ y $c = \frac{1}{2}(a + b)$

si $F(c) = 0$ c.q.d.

sino $F(c) > 0$ se repite con el intervalo $[a, c]$

ó $F(c) < 0$ se repite con el intervalo $[c, b]$

[Volver](#)

• Teorema II

$$F(x) \in C^1(a, b) / F(a) \cdot F(b) < 0 \wedge \forall x \in (a, b) : F'(x) \neq 0 \Rightarrow \exists! c \in [a, b] / F(c) = 0$$

Hipótesis : $\exists c_1 \neq c_2 : F(c_1) = F(c_2) = 0$

$$0 = F(c_1) - F(c_2) \stackrel{TVM}{=} F'(\zeta)(c_1 - c_2) \neq 0 \Rightarrow \text{Absurdo} \rightarrow \text{Hipótesis Errónea}$$

[Volver](#)

• Teorema III

$$F(x) \in C^1[a, b] / \exists c_1 < c_2 : F'(c_1) = F'(c_2) = 0 \wedge \forall x \in (c_1, c_2) : F'(x) \neq 0$$

$\Rightarrow F(x)$ tiene 0 o 1 raíz en $[c_1, c_2]$

Hipótesis : $\exists x_1 \neq x_2 \in [c_1, c_2] : F(x_1) = F(x_2) = 0 \stackrel{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists c \in [x_1, x_2] \subset [c_1, c_2] / F'(c) = 0$

$\Rightarrow$ Absurdo porque son raíces consecutivas $\rightarrow$ Hipótesis Errónea

[Volver](#)



Demostración: Acotaciones de punto fijo

CONDICIONES

$$g(x) \in C[a, b] \wedge g'(x) \in C(a, b) \quad \forall x \in [a, b]: g(x) \in [a, b] \quad \forall x \in (a, b): |g'(x)| \leq k < 1$$

HIPÓTESIS

$$\alpha \text{ punto fijo de } g(x) \rightarrow \alpha \in [a, b]: g(\alpha) = \alpha \quad \text{Sucesión: } x_n = g(x_{n-1})$$

$$|\alpha - x_n| = |g(\alpha) - g(x_{n-1})| \stackrel{T^{\text{aVM}}}{=} |g'(\xi)(\alpha - x_{n-1})|_{\xi \in (\alpha, x_{n-1})} = |g'(\xi)| |\alpha - x_{n-1}| \leq k |\alpha - x_{n-1}|$$

Aplicando inducción

$$|\alpha - x_n| \leq k^n |\alpha - x_0| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha - x_n| = \left| \alpha - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n |\alpha - x_0| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

Repitiendo el proceso anterior, se tiene $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$, y tomando $m > n$

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m \pm x_{m-1} \pm x_{m-2} \cdots \pm x_{n+1} - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq \\ &\leq k^{m-1} |x_1 - x_0| + k^{m-2} |x_1 - x_0| + \cdots + k^{n+1} |x_1 - x_0| + k^n |x_1 - x_0| \leq \\ &\leq |x_1 - x_0| (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{m-2} + k^{m-1}) \leq |x_1 - x_0| \frac{k^n - k^{m-1} \cdot k}{1 - k} \leq |x_1 - x_0| \frac{k^n - k^m}{1 - k} \end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_m - x_n| = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} x_m - x_n \right| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(|x_1 - x_0| \frac{k^n - k^m}{1 - k} \right) \leq |x_1 - x_0| \frac{k^n - \lim_{m \rightarrow \infty} k^m}{1 - k} \Rightarrow$$

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|$$

[Volver](#)

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

Ejercicios

Bibliografía



Demostración: Método de Aitken

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

Ejercicios

Bibliografía

Método con convergencia lineal: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x^{(n+1)}|}{|\alpha - x^{(n)}|} = \lambda$

Se supone:

$\Rightarrow n$ "suficientemente grande"

$\Rightarrow$ el numerador y denominador tienen el mismo signo

$$\frac{\alpha - x^{(n+1)}}{\alpha - x^{(n)}} \approx \lambda \approx \frac{\alpha - x^{(n+2)}}{\alpha - x^{(n+1)}} \rightarrow (\alpha - x^{(n+1)})(\alpha - x^{(n+1)}) \approx (\alpha - x^{(n)})(\alpha - x^{(n+2)}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha (x^{(n+2)} - 2x^{(n+1)} + x^{(n)}) \approx x^{(n)} x^{(n+2)} - x^{(n+1)} x^{(n+1)}$$

$$\rightarrow \alpha \approx \frac{x^{(n)} x^{(n+2)} - x^{(n+1)} x^{(n+1)}}{x^{(n+2)} - 2x^{(n+1)} + x^{(n)}}$$

Operando para simplificar

$$\alpha \approx \frac{x^{(n)} x^{(n+2)} - x^{(n+1)} x^{(n+1)} \mp x^{(n)} 2x^{(n+1)} \pm x^{(n)} x^{(n)}}{x^{(n+2)} - 2x^{(n+1)} + x^{(n)}} = x^{(n)} + \frac{-x^{(n+1)} x^{(n+1)} + x^{(n)} 2x^{(n+1)} - x^{(n)} x^{(n)}}{x^{(n+2)} - 2x^{(n+1)} + x^{(n)}}$$

$$\alpha \approx x^{(n)} - \frac{(x^{(n+1)} - x^{(n)})^2}{(x^{(n+2)} - x^{(n+1)}) - (x^{(n+1)} - x^{(n)})}$$

[Volver](#)



Demostración: Newton con raíces múltiples

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

Ejercicios

Bibliografía

$$F(x) = (x - \alpha)^n h(x) : h(\alpha) \neq 0$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \frac{F(x)}{F'(x)} = x - \frac{(x - \alpha)^n h(x)}{\alpha \cdot (x - \alpha)^{n-1} h(x) + (x - \alpha)^n h'(x)} = \\ &= x - \frac{(x - \alpha) \cdot h(x)}{n \cdot h(x) + (x - \alpha) \cdot h'(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{[h(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h'(x)][n \cdot h(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h'(x)]}{[n \cdot h(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h'(x)]^2} \\ &\quad + \frac{\cancel{(x - \alpha)} \cdot h(x)[(n + 1) \cdot h'(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h''(x)]}{[n \cdot h(x) + \cancel{(x - \alpha)} \cdot h'(x)]^2} \end{aligned}$$

$$g'(\alpha) = 1 - \frac{[h(\alpha)][n \cdot h(\alpha)]}{[n \cdot h(\alpha)]^2} = 1 - \frac{1}{n}$$



Demostración: raíces simples

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

Ejercicios

Bibliografía

$$F(x) = (x - \alpha)^n h(x) : h(\alpha) \neq 0$$

$$\psi(x) = \frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{(x - \alpha) \cdot h(x)}{n \cdot h(x) + (x - \alpha) \cdot h'(x)}$$

$$\psi'(x) = \frac{\left[h(x) + \cancel{(x - \alpha) \cdot h'(x)} \right] \left[n \cdot h(x) + \cancel{(x - \alpha) \cdot h'(x)} \right]}{\left[n \cdot h(x) + \cancel{(x - \alpha) \cdot h'(x)} \right]^2} + \frac{\cancel{(x - \alpha) \cdot h(x)} \left[(n + 1) \cdot h'(x) + \cancel{(x - \alpha) \cdot h''(x)} \right]}{\left[n \cdot h(x) + \cancel{(x - \alpha) \cdot h'(x)} \right]^2}$$

$$\psi'(\alpha) = \frac{\left[h(\alpha) \right] \left[n \cdot h(\alpha) \right]}{\left[n \cdot h(\alpha) \right]^2} = \frac{1}{n} \neq 0$$



Ejercicios Propuestos

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

Ejercicios

Bibliografía



1 (+RF) – 3 – 4 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13



Bibliografía comentada

Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

Mét. Intervalo

Met. Iter. Funcional

Met. Newton y otros

Resumen

Demostraciones

Ejercicios

Bibliografía