



Titulación: Ingeniero Geólogo
Asignatura: Análisis Numérico
Autor: César Menéndez

Ultima actualización: 03/10/2008

Preliminares

Planificación:

1 Teoría+0.5 Prácticas+1.5 Lab.Inf.

Materiales:

MATLAB

Conocimientos previos:

T^{mas}. básicos de Cálculo y Álgebra



Descripción

Descripción

Objetivos

Temario

Bibliografía

- Repaso de conceptos de análisis
 - Convergencia
 - Continuidad
 - Derivabilidad
- Se introducen definiciones y consecuencias del trabajo con matemática finita, esto es, las asociadas a las limitaciones de almacenamiento de los ordenadores
- Se define el concepto de algoritmo y estabilidad



Objetivos

Descripción

Objetivos

Temario

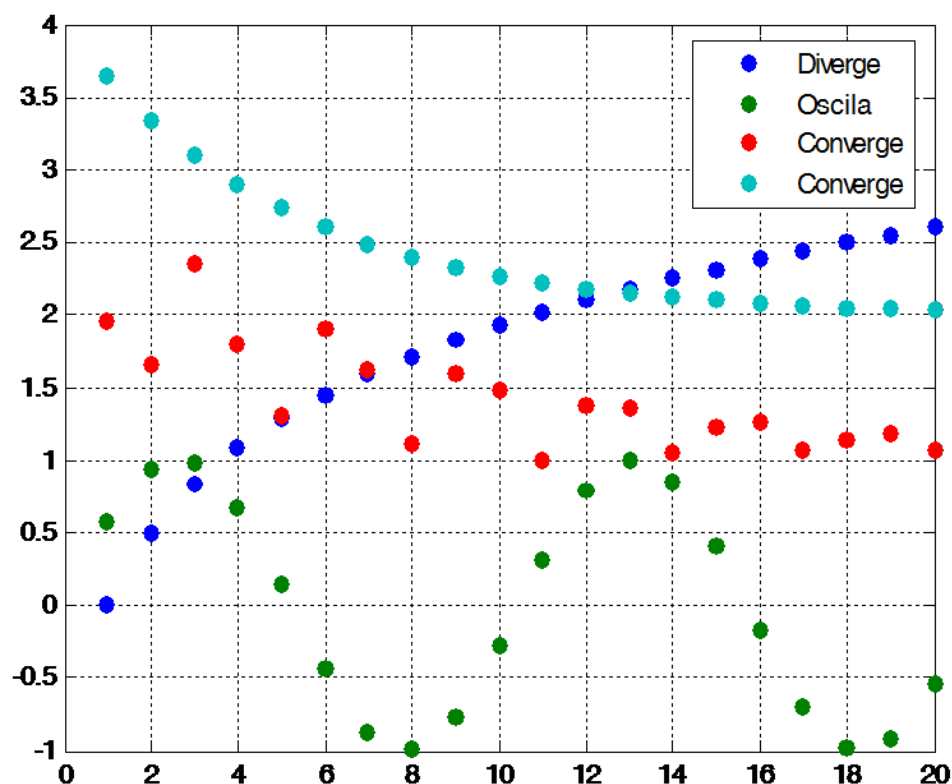
Bibliografía

- Recordar conceptos de análisis anteriores.
- Entender el concepto de algoritmo y la medida de su eficiencia.
- Comprender la importancia de las técnicas iterativas y su estabilidad.
- Apreciar el significado de la velocidad de convergencia.
- Aprender a utilizar los diagramas de flujo y pseudocódigos.
- Entender la diferencia entre error de truncamiento y de redondeo.
- Entender el concepto de cifras significativas.
- Conocer la diferencia entre exactitud y precisión.
- Apreciar la utilidad del error relativo y de las cotas de error.
- Aprender a relacionar el error relativo con las cifras significativas.
- Saber diferenciar el condicionamiento de un problema del condicionamiento de un algoritmo.



Convergencia

Definición: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) / n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión infinita de números reales o complejos. Se dice que la sucesión converge al número L cuando para cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo $N(\varepsilon)$ tal que cuando $n > N(\varepsilon)$ se tiene que $|L - x_n| < \varepsilon$.



Repaso de Análisis

Convergencia

Continuidad

Diferenciabilidad

Tmas Continuidad

Tmas Derivación

Tmas Integración

Tmas Desarrollos

Matemática Finita

Algoritmos

Bibliografía



Límites y continuidad

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis

Convergencia

Continuidad

Diferenciabilidad

Tmas Continuidad

Tmas Derivación

Tmas Integración

Tmas Desarrollos

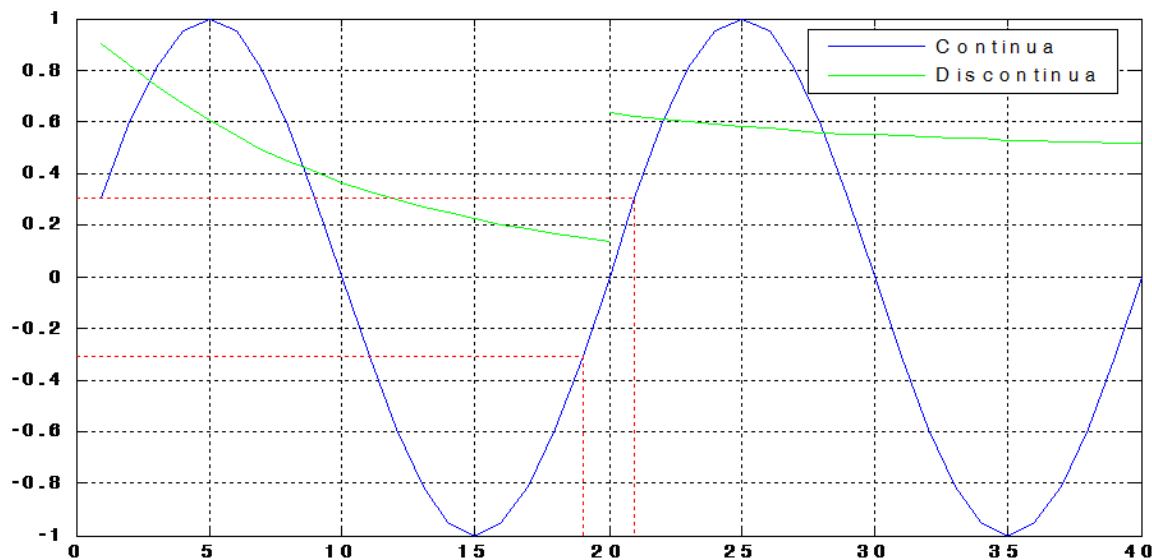
Matemática Finita

Algoritmos

Bibliografía

Definición: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta / |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Sea $f(x)$ una función definida en un conjunto X de números reales. Se dice que $f(x)$ tiene como límite a L en el punto $a \in X$ cuando para cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe otro número real δ tal que siempre que $x \in X$ y $|x - a| < \delta$ se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Definición:

Sea $f(x)$ una función definida en un conjunto X de números reales. Se dice que f es continua en $a \in X$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

La función f es continua en X cuando lo es en cada punto de X .



Diferenciabilidad

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis

Convergencia

Continuidad

Diferenciabilidad

Tmas Continuidad

Tmas Derivación

Tmas Integración

Tmas Desarrollos

Matemática Finita

Algoritmos

Bibliografía

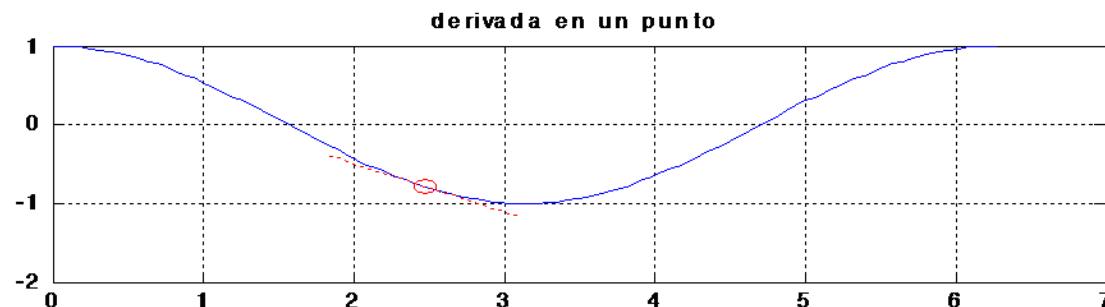
Definición:

Si f es una función definida en un intervalo X abierto que contiene al punto a , se dice que f es diferenciable en a si existe el valor

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La función f es diferenciable en X cuando lo es en cada punto de X .

Se denota por $C^n(X)$ al conjunto de funciones que tienen n derivadas continuas en X





Teoremas Continuidad

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis

Convergencia

Continuidad

Diferenciabilidad

Tmas Continuidad

Tmas Derivación

Tmas Integración

Tmas Desarrollos

Matemática Finita

Algoritmos

Bibliografía

Teorema del valor intermedio:

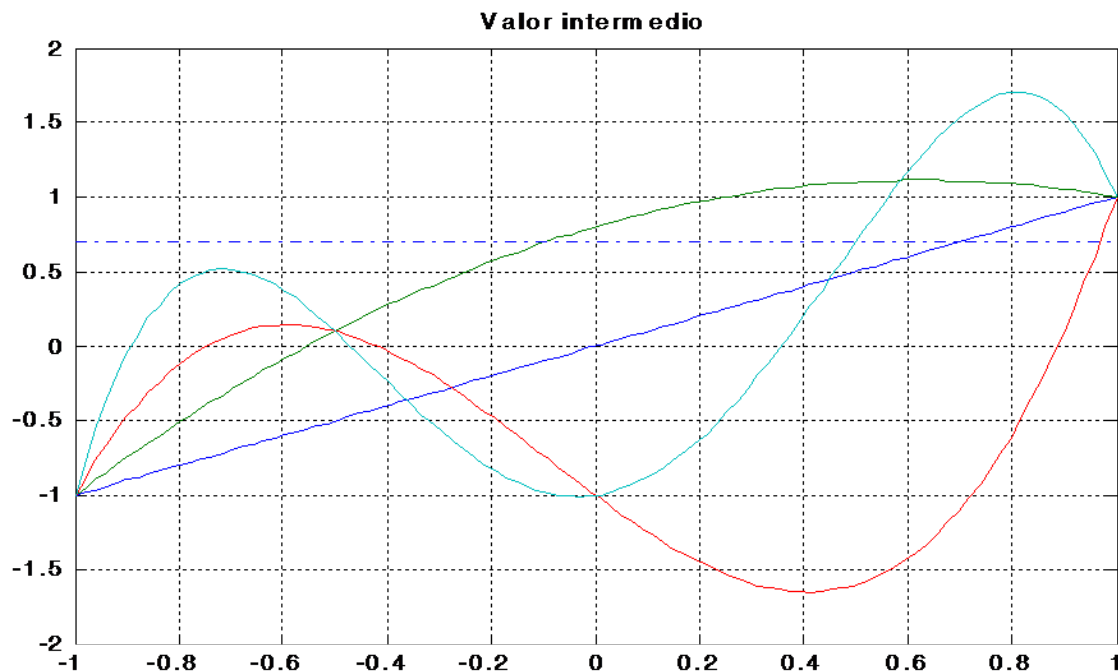
Sea $f(x) \in C([a, b])$ y K un valor cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un punto $c \in [a, b]$ en que la función toma el valor dado, $f(c)=K$.

Teorema de Bolzano

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ con valores de signos opuestos en los extremos, entonces existe un punto c en $[a, b]$ en que la función se anula.

Teorema del Valor Extremo

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, entonces alcanza su máximo M y su mínimo m en $[a, b]$, esto es, existen en el intervalo dos puntos c y d tales que $f(c)=M$ y $f(d)=m$ de forma que para todo valor $x \in [a, b]$ se tiene $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$.





Teoremas Continuidad y Diferenciabilidad

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis

Convergencia

Continuidad

Diferenciabilidad

Tmas Continuidad

Tmas Derivación

Tmas Integración

Tmas Desarrollos

Matemática Finita

Algoritmos

Bibliografía

Teorema del valor medio:

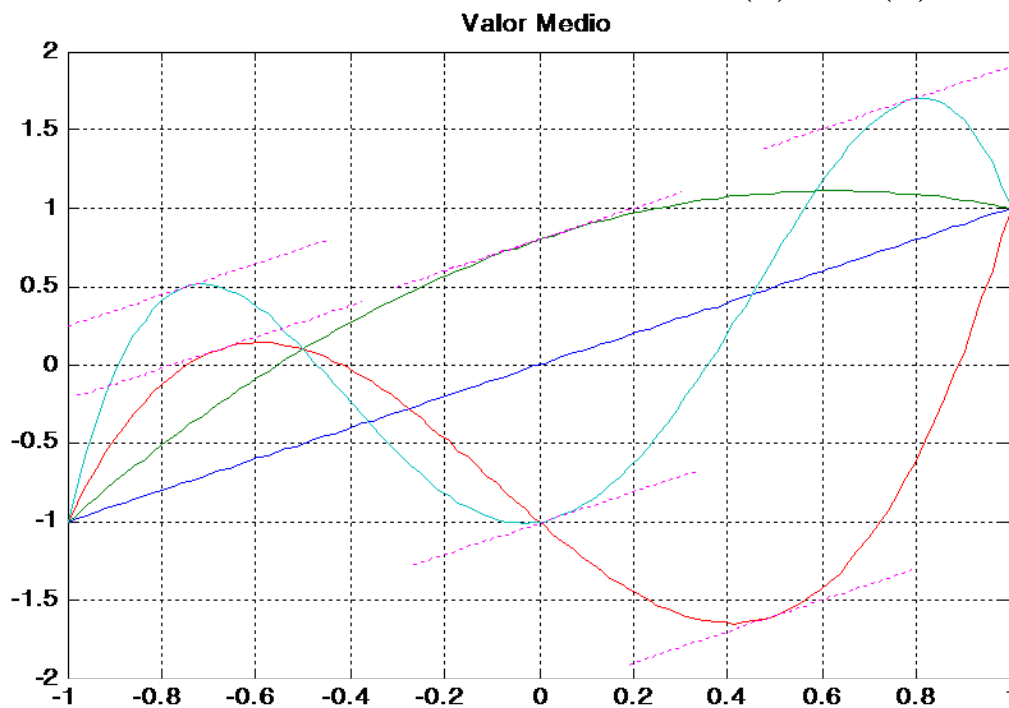
Sea $f(x) \in C[a, b]$ y $f(x) \in C^1(a, b)$ entonces existe un punto c en (a, b) cuya pendiente coincide con la de la recta que une los extremos, esto es

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema del valor medio: generalizado (Cauchy)

Sean $f(x), g(x) \in C[a, b]$ y $f(x), g(x) \in C^1(a, b)$ entonces existe al menos un punto c en (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$





Teoremas Diferenciabilidad

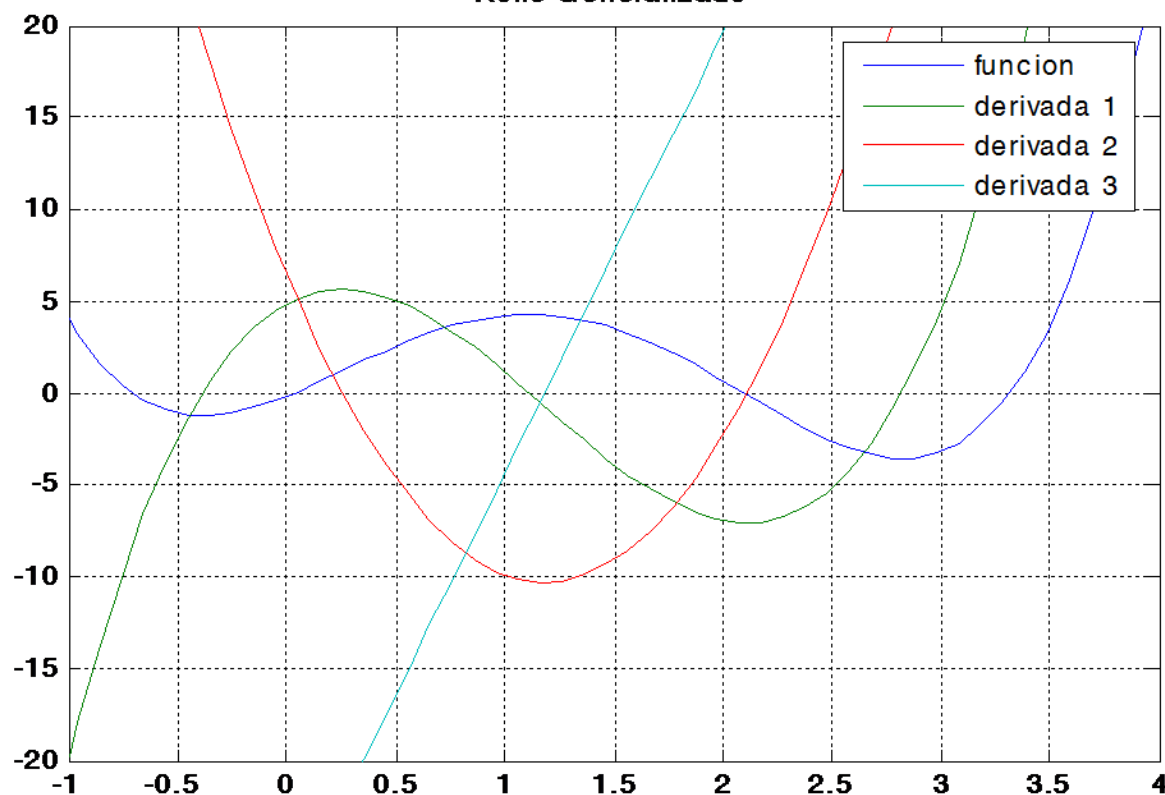
Teorema de Rolle

Sea $f(x) \in C[a, b]$ y $f(x) \in C^1(a, b)$ tal que se anula en sus extremos, entonces existe un punto c en (a, b) que anula su derivada. $f'(c) = 0$

Teorema de Rolle Generalizado

Sea $f(x) \in C^{n-1}[a, b]$ y $f(x) \in C^n(a, b)$ tal que se anula en $(n+1)$ puntos distintos, entonces existe un punto c en (a, b) que anula su derivada n -ésima $f^{(n)}(c) = 0$

Rolle Generalizado



Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis

Convergencia

Continuidad

Diferenciabilidad

Tmas Continuidad

Tmas Derivación

Tmas Integración

Tmas Desarrollos

Matemática Finita

Algoritmos

Bibliografía



Teoremas Integrabilidad

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis

Convergencia

Continuidad

Diferenciabilidad

Tmas Continuidad

Tmas Derivación

Tmas Integración

Tmas Desarrollos

Matemática Finita

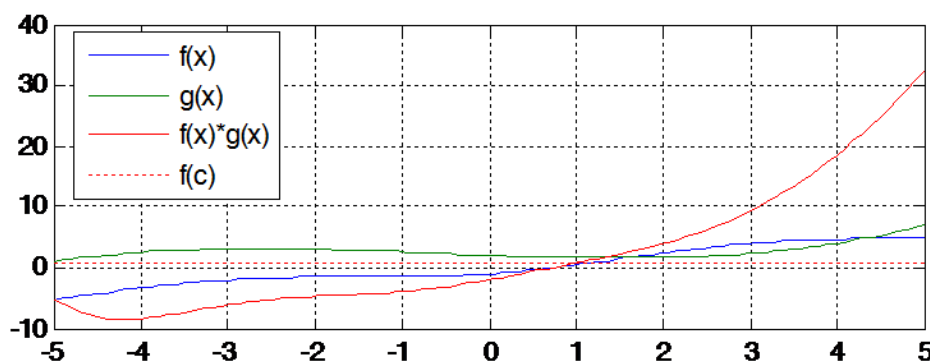
Algoritmos

Bibliografía

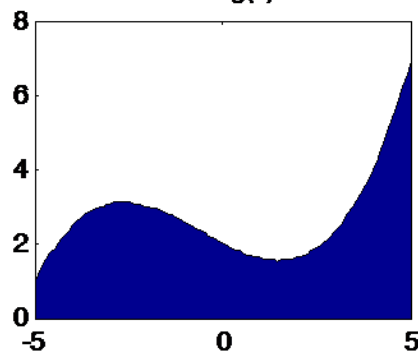
Teorema del valor medio para integrales

Sean $f(x), g(x) \in C[a, b]$ donde $g(x)$ es integrable y no cambia de signo en $[a, b]$, entonces existe un punto c en (a, b) tal que

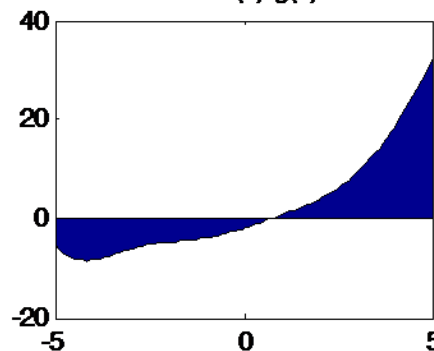
$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$



Area $g(x)$



Area $f(x) \cdot g(x)$



$$f(x) = x - \cos(x)$$

$$g(x) = \frac{2}{45}x^3 + \frac{7}{90}x^2 - \frac{47}{90}x + 2$$

$$\int_{-5}^5 f(x) \cdot g(x) dx = 18.8623$$

$$\int_{-5}^5 g(x) dx = 26.4815$$

$$\frac{18.8623}{26.4815} = 0.7123 = f(1.1347)$$



Teoremas de desarrollo en serie

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis

Convergencia

Continuidad

Diferenciabilidad

Tmas Continuidad

Tmas Derivación

Tmas Integración

Tmas Desarrollos

Matemática Finita

Algoritmos

Bibliografía

Teorema del Taylor para funciones de una variable

Sea $f(x) \in C^{(n+1)}[a, b]$ y un punto $c \in (a, b)$, entonces para cualquier punto $x \in (a, b)$ existe un valor $\xi_x \in (c, x)$ tal que $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ donde

$$P_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Teorema del Taylor para funciones de varias

Sea $f(x, y) \in C^{(n+1)}D=[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ y un punto $(c, d) \in D$, entonces para cualquier punto $(x, y) \in D$ existe un par valor $(\xi_x, \xi_y) \in [c, x] \times [d, y]$ tales que $f(x, y) = P_n(x, y) + R_n(x, y)$ donde

$$\begin{aligned} P_n(x, y) = & f(c, d) + \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(c, d) \frac{(x-c)}{1!} + \frac{\partial f}{\partial y}(c, d) \frac{(y-d)}{1!} \right\} + \\ & + \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c, d) \frac{(x-c)^2}{2!} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c, d) \frac{(x-c)(y-d)}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c, d) \frac{(y-d)^2}{2!} \right\} + \cdots \\ & + \left\{ (x-c) \frac{\partial}{\partial x} + (y-d) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^n f(c, d) \end{aligned}$$

$$R_n(x, y) = \left\{ (x-c) \frac{\partial}{\partial x} + (y-d) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^{n+1} f(\xi_x, \xi_y)$$



Ejemplo: desarrollo $\cos(x)$ en $x=2$

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis

Convergencia

Continuidad

Diferenciabilidad

Tmas Continuidad

Tmas Derivación

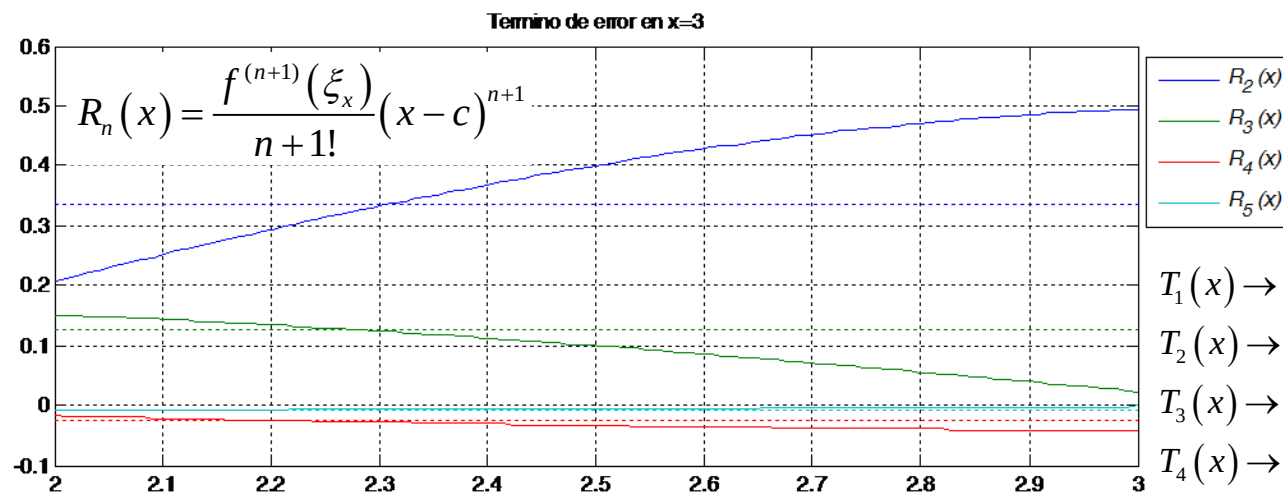
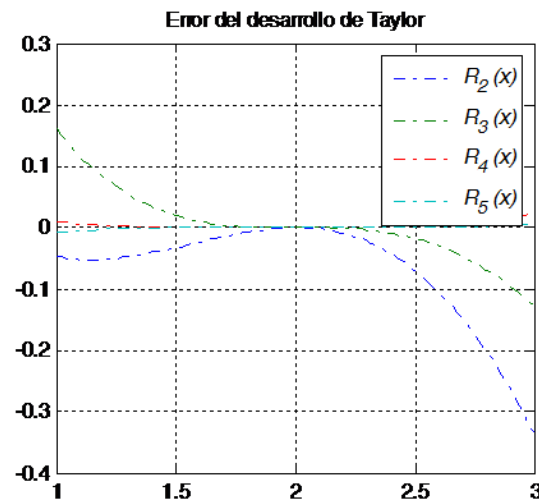
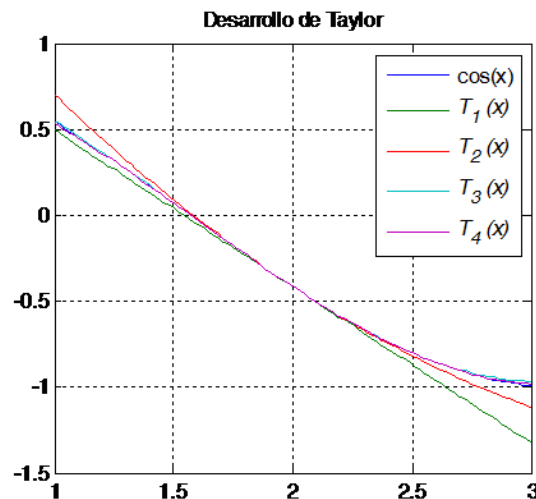
Tmas Integración

Tmas Desarrollos

Matemática Finita

Algoritmos

Bibliografía





Códigos numéricos y representación

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis

Matemática Finita

Definiciones

Representación

Errores

Algoritmos

Bibliografía

- Notación posicional: $777 = 7 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 7$
- Códigos enteros y reales (base 10)
 - $123.45 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$
 - Forma normalizada de un número real
 - $X = m \times b^e$ con $b^0 \leq m < b^{-1}$
 - $123.45 = 1.2345 \times 10^2 = 12345 \times 10^{-2} = 0.12345 \times 10^3$
- Hay errores en la representación de los valores en el ordenador debido a la limitación de almacenamiento
 - Truncamiento: Se almacenan N decimales y se pierde el resto
 - Redondeo: Se suma media unidad al decimal N y se trunca

4 dígitos	Truncamiento	Redondeo
1'414 21256...	$0'1414 \times 10^1$	$0'1414 \times 10^1$
2'645 751311...	$0'2645 \times 10^1$	$0'2646 \times 10^1$



Exactitud y precisión

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis
Matemática Finita

Definiciones

Representación

Errores

Algoritmos

Bibliografía

- Se denomina **exactitud** de un proceso, método, fórmula o cálculo a la bondad con que el resultado obtenido representa el valor real que queríamos calcular.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left\{ f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b) \right\} \quad \text{exacta para } P_2(x)$$

- Un número x aproxima a r con n **dígitos significativos (cifras)** si n es el natural más grande tal que

$$\left| \frac{x-r}{r} \right| < 5 \cdot 10^{-n}$$

$$\sqrt{2} (1'414213562...) \approx 1'41421256.$$

$$\frac{\|\sqrt{2} - 1'41421256\|}{\sqrt{2}} = 7'... \times 10^{-7} \Rightarrow \text{Aproxima con 6 dígitos}$$

- Se denomina **precisión** de una representación a la exactitud que se obtendría si todas las cifras calculadas fueran significativas
 - Cálculo de $\sqrt{2} = 1'41421\mathbf{256}$
 - Precisión de 9 cifras..



Representación Decimal (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis

Matemática Finita

Definiciones

Representación

Errores

Algoritmos

Bibliografía

- Punto fijo:
 - Los dígitos de almacenamiento se reparten para la parte entera y la parte decimal
 - Ejemplo: 8 dígitos con 3 decimales
 - $fl(123.456)=00123456$
 - $fl(12345.6)=12345600$
 - $fl(1.23456)=00001235$
- Punto flotante:
 - Se representa de forma normalizada, repartiéndose los dígitos para la mantisa y el exponente
 - Ejemplo: 8 dígitos con 2 de exponente
 - $fl(123.456)=03123456$
 - $fl(12345.6)=05123456$
 - $fl(1.23456)=01123456$
 - Normalmente se hace un cambio de escala en el exponente para incluir exponentes negativos, convirtiendo el $[0,99]$ en $[-49,50]$ (restando $99/2$)
 - Binaria 32 bits: IEEE 754



Representación Decimal (II)

- Características de la representación elegida
 - Rango de representación:
 - Punto fijo con 8 dígitos y 3 decimales
 $[0.001, 99999.999]$
 - Punto flotante con 8 dígitos y 2 de exponente
 $0.1 \times 10^{-44}, 0.999999 \times 10^{45}$
 - Precisión: 1-8 (PF) ó 6 (PF)
 - Cifras significativas:
 - Punto fijo con 8 dígitos y 3 decimales
Depende del valor: desde 1 hasta 8
 - Punto flotante con 8 dígitos y 2 de exponente
6 cifras

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis
Matemática Finita

Definiciones

Representación

Errores

Algoritmos

Bibliografía



Errores

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis Matemática Finita

Definiciones

Representación

Errores

Algoritmos

Bibliografía

- **Error absoluto:** diferencia entre el valor real y el valor calculado.
- **Error relativo:** cociente entre el error absoluto y el valor real. Habitualmente ambos se toman en valor absoluto

$$E_x = |x - \tilde{x}| \quad e_x = \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right|$$

- **Error absoluto (relativo) de representación** del valor x es el error absoluto (relativo) entre el valor real x y su representación $\text{float}(x)$ o $\text{fl}(x)$ (¿cifras significativas?)
 - Trabajando con 4 decimales $\text{fl}(1/3)=0.3333$

$$E_x = \left| \frac{1}{3} - 0.3333 \right| = \frac{1}{3} 10^{-4} \quad e_x = \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| = \frac{\frac{1}{3} 10^{-4}}{\frac{1}{3}} = 10^{-4}$$

- Se denomina **unidad de redondeo** de un ordenador al menor número positivo en punto flotante δ tal que $\text{float}(1+\delta) > 1$.
 - Trabajando con 4 decimales y
 - Redondeo: $\text{float}(1.0005)=1.001$ $\text{float}(1.0004)=1.000$
 - Truncamiento: $\text{float}(1.001)=1.001$ $\text{float}(1.0009)=1.000$



Error de representación

- El error relativo de representación con k dígitos de un valor no nulo x en base b viene acotado $\underline{b^{1-k}}$ o $\underline{\frac{1}{2}b^{1-k}}$ para las aproximaciones por truncamiento o por redondeo respectivamente

	Valor	Aprox.	Error	Relativo
Tr.	1'414212...	$0'1414 \times 10^1$	$0'212... \times 10^{-3}$	$0'151... \times 10^{-3}$
Tr.	2'645751...	$0'2645 \times 10^1$	$0'751... \times 10^{-3}$	$0'283... \times 10^{-3}$
Rd.	1'414212...	$0'1414 \times 10^1$	$0'212... \times 10^{-3}$	$0'151... \times 10^{-3}$
Rd.	2'645751...	$0'2646 \times 10^1$	$-0'246... \times 10^{-3}$	$-0'939... \times 10^{-4}$

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis
Matemática Finita

Definiciones
Representación

Errores

Algoritmos

Bibliografía



Error de operaciones (I)

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis
Matemática Finita

Definiciones

Representación

Errores

Algoritmos

Bibliografía

- Operaciones elementales (suma, resta, multip., división)

$$\tilde{x} = fl(x) = x - \alpha = x(1 - e_x) \quad \tilde{y} = fl(y) = y - \beta = y(1 - e_y)$$

$$x \circ y - fl(x \circ y) = x \circ y - \tilde{x} \bullet \tilde{y} = (x \circ y - \tilde{x} \circ \tilde{y}) + (\tilde{x} \circ \tilde{y} - \tilde{x} \bullet \tilde{y})$$

$$= \text{Error Propagado} + fl(\tilde{x} \circ \tilde{y})$$

Operación	Suma	Resta	Multip.	División
Absoluto	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$	$y\alpha + x\beta - \alpha\beta$	$\frac{\alpha - \beta}{y - \beta} \times \frac{x}{y}$
Relativo	$\frac{x}{x+y}e_x + \frac{y}{x+y}e_y$	$\frac{x}{x-y}e_x - \frac{y}{x-y}e_y$	$e_x + e_y + e_x e_y$	$\frac{e_x - e_y}{1 - e_y}$

- Funciones elementales

$$y = f(\vec{x}) = f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$fl(y) = y + E_y = fl(f(x_0 + E_0, x_1 + E_1, x_2 + E_2, \dots, x_n + E_n))$$

$$|E_y| \leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} E_k \right| \quad |e_y| \leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{x_k}{y} e_k \right|$$



Error de operaciones (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis
Matemática Finita

Definiciones

Representación

Errores

Algoritmos

Bibliografía

• Ejemplo de resta

$$x = \pi$$

$$y = \frac{22}{7}$$

$$x - y = -1.2645... \cdot 10^{-3}$$

$$fl(x) = 3.1416$$

$$fl(y) = 3.1429$$

$$fl(x - y) = -0.0013$$

$$E_x \leq 7.35 \cdot 10^{-6}$$

$$E_y \leq 4.29 \cdot 10^{-5}$$

$$E_{x-y} \leq 3.55 \cdot 10^{-5}$$

$$e_x \leq 2.34 \cdot 10^{-6}$$

$$e_y \leq 1.36 \cdot 10^{-5}$$

$$e_{x-y} \leq 2.8 \cdot 10^{-2}$$

• Ejemplo de cociente

$$x = \frac{22}{7}$$

$$y = \frac{1}{3000}$$

$$x \div y = 9.4286 \cdot 10^3$$

$$fl(x) = 3.1429$$

$$fl(y) = 3.3333 \cdot 10^{-4}$$

$$fl(x \div y) = 9.4300 \cdot 10^3$$

$$E_x \leq 1.4286 \cdot 10^{-4}$$

$$E_y \leq 3.3333 \cdot 10^{-8}$$

$$E_{x-y} \leq 1.4286$$

$$e_x \leq 4.5455 \cdot 10^{-5}$$

$$e_y \leq 1.0 \cdot 10^{-4}$$

$$e_{x-y} \leq 1.5152 \cdot 10^{-4}$$

• Ejemplo de función

$$y = \log_a(x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x \ln(a)} \\ \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{-y}{a \ln(a)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_y \leq \left| \frac{1}{x \ln(a)} \right| E_x + \left| \frac{-y}{a \ln(a)} \right| E_a \\ e_y \leq \frac{e_x}{|\ln x|} + \frac{e_a}{|\ln a|} \end{cases}$$



Fuentes de error en el modelado matemático

- Problema físico: trayectoria de un proyectil

$$m \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = \underbrace{-mgk}_{\text{GRAVEDAD}} - \underbrace{b \frac{dr(t)}{dt}}_{\text{ROZAMIENTO}}$$

- Modelado matemático con hipótesis y simplificaciones
 - Efectos atmosféricos (lluvia, contaminación, vientos)
 - Se desprecia el giro terrestre (fuerzas de Coriolis)
 - Se considera que el rozamiento sólo depende del aire.
- Errores debido al desconocimiento de los datos físicos (inexactitudes de las medidas o imposibilidad).
- Errores del Método de Resolución:
 - Algoritmo de predicción-corrección para ecuaciones diferenciales con el error provocado al aproximar la derivada por la secante
- Errores de Implementación en el ordenador
 - Equivocaciones (errores de programación, cambios inadvertidos de signos, etc.)
 - Errores debidos a la aritmética del ordenador (errores de representación, etc.).

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis
Matemática Finita

Definiciones

Representación

Errores

Algoritmos

Bibliografía



Algoritmos

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis
Matemática Finita

Algoritmos

Condicionamiento
Estabilidad

Bibliografía

- **Algoritmo:** Procedimiento que describe sin ninguna ambigüedad una sucesión de pasos a realizar en un orden específico

Clasificación	{ No numéricos: Listas Alfabéticas		
	{ Numéricos: { Finitos Álgebra		
	{ Euclides (m.c.d.) { Infinitos Análisis		

- **Algoritmo Numérico:** Conjunto de instrucciones para efectuar operaciones matemáticas con números que conducen al valor o valores solución de un problema dado.



Algoritmos: ejemplo

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis
Matemática Finita

Algoritmos

Condicionamiento
Estabilidad

Bibliografía

- Algoritmos Infinitos: sucesión infinita pero numerable de operaciones

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$$

- Sucesión de aproximaciones a la solución

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-x)^k$$

– Convergencia

- Condiciones: $|x| < 1$

- Velocidad $b_n = \sum_{k=0}^n (-x)^k + \frac{(-x)^{n+1}}{x+1}$

- Acotación del error $E_n = \left| \frac{1}{1+x} - a_n \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (-x)^k$

- Eficiencia: número de operaciones

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$\begin{cases} P = a_0 \\ P = P + a_k x^k, k = 1, \dots, n \end{cases} \quad \begin{cases} P = a_n \\ P = P \cdot x + a_k, k = n-1, \dots, 0 \end{cases}$$

- Alg.1: $n+1$ $n \times n-1$ potencias
- Alg.2: $n+1$ $n \times 0$ potencias



Condicionamiento

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis
Matemática Finita
Algoritmos

Condicionamiento
Estabilidad

Bibliografía

- El condicionamiento de un problema mide la sensibilidad de la solución a cambios pequeños en los parámetros del problema.
 - Problema bien condicionado: pequeñas variaciones de los datos dan lugar a pequeñas variaciones en los resultados.
 - Resolución numérica requiere problemas bien condicionadas, ya que la representación de los datos y la aritmética del ordenador perturban los datos.
- Obtener las raíces del siguiente polinomio al añadirle 1 milésima al término de grado 9

$$P_{10}(x) = \prod_{k=1}^{10} (x - k) = \sum_{k=0}^{10} a_k x^k = x^{10} - 55x^9 + 1320x^8 + \dots + 3628800$$

$$\tilde{P}_{10}(x) = P_{10}(x) - 0.001x^9 = x^{10} - 55.001x^9 + 1320x^8 + \dots + 3628800$$

Raíces: $\{1., 1.9999, 3.0019, 3.9476, 5.1376 \pm 0.59304i, 7.2317 \pm 1.5827i, 10.155 \pm 1.14887i\}$

$$E_P \approx \frac{\partial P}{\partial a_9} E_{a_9} = x^9 \cdot 10^{-3} \Rightarrow e_P \approx \frac{\partial P}{\partial a_9} \frac{E_{a_9}}{P} = \frac{x^9}{P_{10}(x)} 10^{-3}$$



Estabilidad numérica

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis
Matemática Finita
Algoritmos

Condicionamiento
Estabilidad

Bibliografía

- Un algoritmo es estable cuando un error inicial se propaga decreciendo o creciendo linealmente con las iteraciones. Es inestable cuando el crecimiento es exponencial.

$$E_0 \rightarrow \begin{cases} \text{Estable} & \begin{cases} E_n = C \cdot E_0 \\ C < 1 \end{cases} \\ \text{Inestable} & E_n = C^n \cdot E_0 \end{cases}$$

- Problema mal condicionado: inestable para cualquier algoritmo.
- Problema bien condicionado: estable o inestable dependiendo del algoritmo

- Ejemplo: calcular $\{p_n\} = \left\{ \frac{1}{3^n} \right\}$ usando aritmética con 5 cifras

- Nota: $\frac{1}{3} = 0,33333 + \varepsilon$ con $\varepsilon = \frac{1}{3}10^{-5}$

- Algoritmo I: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} \frac{1}{3} \end{cases}$

$$E_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n - 0,33333^n = (0,33333 + \varepsilon)^n - 0,33333^n \approx n(0,33333)^{n-1} \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0 \Rightarrow \text{Estable}$$



Estabilidad numérica

– Algoritmo II:
$$\begin{cases} b_0 = 1; & b_1 = 1/3 \\ b_n = \left(\frac{10}{3}\right)b_{n-1} - b_{n-2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

- Autovalores $\lambda_1 = 1/3 \quad \lambda_2 = 3$
- Solución $b_n = \alpha \left(1/3\right)^n + \beta 3^n$

$$\begin{cases} b_0 = 1 = \alpha \left(1/3\right)^0 + \beta (3)^0 \\ b_1 = 0,33333 = \alpha \left(1/3\right)^1 + \beta (3)^1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 + 0,125 \times 10^{-5} \\ \beta = -0,125 \times 10^{-5} \end{cases}$$

$$E_n = 0,125 \times 10^{-5} \left\{ \left(1/3\right)^n + 3^n \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \infty \Rightarrow \text{Inestable}$$

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis
Matemática Finita
Algoritmos

Condicionamiento

Estabilidad

Bibliografía



Bibliografía Comentada

 **Descripción**

 **Objetivos**

 **Temario**

 **Bibliografía**

- Chapra, S.C. & Canale, R.P.
 - Realiza, de forma simple y sucinta, el desarrollo de programas y su aplicación en el Análisis Numérico. En este entorno, tras mostrar con ejemplos el uso de los diagramas de flujo. En el capítulo tercero se dedica al estudio del error, matizando sus diferentes fuentes.
- Burden, R.L. & Faires, J.D.
 - Comienza con una revisión de conceptos y teoremas del Algebra y el Análisis. A continuación estudia la representación numérica, sobre todo en punto flotante, desarrollando varios ejemplos clarificadores en binario. Asimismo hace un estudio del error que desemboca en el concepto de estabilidad de un algoritmo. Finalmente oferta interesantes ejercicios para verificar la comprensión alcanzada.