

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 1 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- Dada la función $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

- Obtener el polinomio de interpolación de Taylor de segundo grado $T_2(x)$ en torno al punto $x=4$. ¿Qué error se comete con esa aproximación al evaluar $f(5)$? Acotar el error que se comete al usar dicho polinomio para interpolar en el punto $x=5$ y en todo el intervalo $[0,9]$.
- Obtener el polinomio de interpolación de Lagrange $P_2(x)$ tomando $\{0,4,9\}$ como puntos de soporte. ¿Qué error se comete con esa aproximación al evaluar $f(5)$? Acotar el error que se comete al usar dicho polinomio para interpolar en el punto $x=5$ y en todo el intervalo $[0,9]$.
- Determinar el número de puntos equiespaciados necesarios para poder asegurar que la interpolación segmentaria lineal tiene un error inferior a 0'001 para todo el intervalo.

Apartado (a) Polinomio de interpolación de Taylor

La aproximación de una función en el punto $x=c$ mediante el polinomio de Taylor viene expresada como

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$$

donde

$$T_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \quad \text{con } \xi_x \in (x, c)$$

Particularizando para $c=4$ y $n=2$

$$f(x) = f(4) + \frac{f'(4)}{1!}(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-4)^3 \quad \text{con } \xi_x \in (x, 4)$$

$$f(x) = (1+x)^{-2} \quad f'(x) = -2(1+x)^{-3} \quad f''(x) = 6(1+x)^{-4} \quad f'''(x) = -24(1+x)^{-5}$$

$$f(4) = \frac{1}{25} \quad f'(4) = -\frac{2}{125} \quad f''(4) = \frac{6}{625}$$

Por tanto

$$T_2(x) = \frac{1}{25} - \frac{2}{125}(x-4) + \frac{3}{625}(x-4)^2 = \frac{113}{625} - \frac{34}{625}x + \frac{3}{625}x^2$$

$$T_2(5) = \frac{1}{25} - \frac{2}{125}(5-4) + \frac{3}{625}(5-4)^2 = \frac{25-10+3}{625} = \frac{18}{625}$$

y el error real vendrá dado por

$$|f(5) - T_2(5)| = \left| \frac{1}{(1+5)^2} - \frac{18}{625} \right| = \frac{23}{22500} \approx 0.001$$

y la cota del error mediante

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 2 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$|f(5) - T_2(5)| = \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!} (5-4)^3 \right| \leq \max_{\xi_x \in (4,5)} \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!} \right| = \max_{\xi_x \in (4,5)} \left| \frac{24}{6(1+x)^5} \right| = \left| \frac{4}{5^5} \right| = 0.0013$$

Para acotar el error en todo el intervalo, se tiene que

$$\max_{x \in [0,9]} |f(x) - T_2(x)| = \max_{x \in [0,9]} \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!} (x-4)^3 \right| \leq \max_{x \in [0,9]} \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!} \right| \max_{x \in [0,9]} |(x-4)^3| = \left| \frac{24}{6(1+0)^5} \right| |(9-4)^3| = 500$$

Apartado (b) Polinomio de interpolación de Lagrange en $\{x_0, x_1, x_2\} = \{0, 4, 9\}$

El polinomio de interpolación de Lagrange se puede calcular en su forma canónica (resolviendo el sistema), como combinación de los polinomios de Lagrange o en forma de diferencias divididas. En cualquier caso, se tiene que

$$f(x) = P_n(x) + E_{n+1}(x)$$

donde

$$E_{n+1}(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x-x_k) \quad \text{con } \xi_x \in (x_0, x_n)$$

Su expresión mediante diferencias divididas viene dada por

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^2 f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x-x_k) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

y mediante polinomios de Lagrange por

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i) L_i^n(x) \quad \text{donde } L_i^n(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

Comenzamos calculando la tabla de diferencias divididas

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
0	$f[0] = \frac{1}{(1+0)^2} = 1$		
4	$f[4] = \frac{1}{(1+4)^2} = \frac{1}{25}$	$f[0,4] = \frac{f[4] - f[0]}{4-0} = \frac{-6}{25}$	
9	$f[9] = \frac{1}{(1+9)^2} = \frac{1}{100}$	$f[4,9] = \frac{f[9] - f[4]}{9-4} = \frac{-3}{500}$	$f[0,4,9] = \frac{13}{500}$

Por tanto

$$P_2(x) = 1 - \frac{6}{25}(x-0) + \frac{13}{500}(x-0)(x-4)$$

Si el cálculo se realiza con polinomios de Lagrange

$$P_2(x) = 1 \frac{(x-4)(x-9)}{(0-4)(0-9)} + \frac{1}{25} \frac{(x-0)(x-9)}{(4-0)(4-9)} + \frac{1}{100} \frac{(x-0)(x-4)}{(9-0)(9-4)}$$

En cualquier caso $P_2(5) = -\frac{7}{100}$ y el error real vendrá dado por

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 3 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$|f(5) - P_2(5)| = \left| \frac{1}{(1+5)^2} - \frac{-7}{100} \right| = \frac{22}{225} \approx 0.0978$$

y la cota del error en ese punto mediante

$$|f(5) - P_2(5)| = \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!} (5-0)(5-4)(5-9) \right| \leq \max_{x \in [0,9]} \left| \frac{24}{3!(1+x)^5} \right| 20$$

puesto que la función es positiva y monótona decreciente

$$\max_{x \in [0,9]} \left| \frac{24}{3!(1+x)^5} \right| \leq \left| \frac{4}{(1+0)^5} \right| \Rightarrow |f(5) - P_2(5)| = 4 \times 20 = 80$$

Para acotar el error todo el intervalo, se tiene que

$$\max_{x \in [0,9]} |f(x) - P_2(x)| \leq \max_{x \in [0,9]} \left| \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} \prod_{k=0}^2 (x - x_k) \right| \leq \max_{x \in [0,9]} \left| \frac{24}{3!(1+x)^5} \right| \max_{x \in [0,9]} |(x-0)(x-4)(x-9)|$$

Se debe acotar también el valor del polinomio, para lo cual lo evaluamos en los extremos del intervalo y en aquellos valores que anulan su derivada (extremos relativos).

$$p(x) = x(x-4)(x-9) \quad p'(x) = 3x^2 - 26x + 36 = 0 \rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{61}}{3} \approx \{6.9367, 1.7299\}$$

$$\max_{x \in [0,9]} |p(x)| = \max \left\{ |p(0)|, |p(9)|, \left| p\left(\frac{13+\sqrt{61}}{3}\right) \right|, \left| p\left(\frac{13-\sqrt{61}}{3}\right) \right| \right\} = \max \left\{ 0, 0, -\frac{182-122\sqrt{61}}{61}, \frac{182+122\sqrt{61}}{61} \right\} \approx 42.0315$$

y por tanto

$$\max_{x \in [0,9]} |f(x) - P_2(x)| \leq 42.04 \times 4 = 168.16$$

Apartado (c) Número de puntos de interpolación lineal segmentaria

En el caso de interpolación lineal segmentaria con puntos equiespaciados una distancia h se tiene

$f(x) = P_1^k(x) + E^k(x)$ con $x \in [x_{k-1}, x_k]$ y $x_k = x_0 + kh$ donde

$$P_1^k(x) = f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_k](x - x_{k-1}) \quad \text{y} \quad E^k(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!} (x - x_{k-1})(x - x_k); \xi_x \in (x_{k-1}, x_k)$$

Así pues

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,9]} |f(x) - P(x)| &= \max_{k=1, \dots, n} \left(\max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x) - P_1^k(x)| \right) \leq \max_{k=1, \dots, n} \left(\max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \left| \frac{f''(\xi_x)}{2!} (x - x_{k-1})(x - x_k) \right| \right) \leq \\ &\leq \max_{k=1, \dots, n} \left(\max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \left| \frac{f''(\xi_x)}{2!} \right| \right) \max_{k=1, \dots, n} |(x - x_{k-1})(x - x_k)| \end{aligned}$$

como

$$\max_{k=1, \dots, n} \left(\max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \left| \frac{f''(\xi_x)}{2!} \right| \right) = \max_{x \in [0,9]} \left| \frac{f''(x)}{2!} \right| \leq \max_{x \in [0,9]} \left| \frac{3}{(1+x)^4} \right| = 3$$

$$\forall k: \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |(x - x_{k-1})(x - x_k)| = \frac{h^2}{4}$$

para asegurar el error pedido es preciso que

$$\max_{x \in [0,9]} |f(x) - P(x)| \leq 3 \frac{h^2}{4} \leq 0.001 \Rightarrow h \leq 0.0365,$$

y el número de intervalos vendrá dado como

$$n \geq \frac{b-a}{h} = \frac{9-0}{0.0365} = 246.47,$$

con lo que el número de puntos debe ser 248.

Ejercicio 2.- Se conoce la siguiente tabla de valores de una función $f(x)$:

x	1	-1	2	-2
$f(x)$	-2	-3	$\frac{3}{5}$	$-\frac{13}{5}$

- Obtener el polinomio de interpolación en la forma de Newton.
- Obtener los polinomios de interpolación de Lagrange $\{l_0(x), l_1(x), l_2(x), l_3(x)\}$ y la expresión del polinomio de interpolación en la forma de Lagrange.
- Obtener el polinomio de interpolación en la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ y la matriz de paso entre ambas bases.
- Evaluar el polinomio de interpolación y su derivada en el punto $x=1$ utilizando la regla de Horner. Obtener la regla numérica de derivación numérica que genera el mismo resultado.
- Demostrar que el polinomio de interpolación tiene al menos una raíz real positiva.

Apartado (a) Polinomio de Interpolación

Recordamos de teoría que $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}]}{x_{i+k-1} - x_{i+k}}$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+3}]$
1	-2			
-1	-3	$\frac{1}{2}$		
2	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{10}$	
-2	$-\frac{13}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$P_4(x) = -2 + 0.5(x-1) + 0.7(x-1)(x+1) + 0.1(x-1)(x+1)(x-2)$$

Apartado (b) Interpolación de Lagrange

Los polinomios de Lagrange vienen dados por $l_k^{(n)}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$, y en este caso serán

$$l_0(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(1+1)(1-2)(1+2)} = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{-6}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 5 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(-1-1)(-1-2)(-1+2)} = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{6}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(2-1)(2+1)(2+2)} = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{12}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{(-2-1)(-2+1)(-2-2)} = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{-12}$$

Y el polinomio de interpolación se escribe como

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) = -2l_0(x) - 3l_1(x) + \frac{3}{5}l_2(x) - \frac{13}{5}l_3(x) = \\ &= -2 \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{-6} - 3 \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{6} + \frac{3}{5} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{12} - \frac{13}{5} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{-12} \end{aligned}$$

Apartado (c) Polinomio de interpolación en la base canónica

Puesto que el polinomio de interpolación es único, lo único que varía es la forma de representarlo, la obtención del polinomio en la base canónica puede obtenerse a partir de las formas de Newton o Lagrange:

Forma de Newton

$$P_4(x) = -2 + (x-1)(0.5 + (x+1)(0.7 + 0.1(x-2))) = 0.1x^3 + 0.5x^2 + 0.4x - 3$$

Forma de Lagrange

$$\begin{aligned} P_4(x) &= x^3 \left(\frac{2}{6} + \frac{-3}{6} + \frac{1}{20} + \frac{13}{60} \right) + x^2 \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{20} + \frac{-26}{60} \right) + x \left(\frac{-8}{6} + \frac{12}{6} + \frac{-1}{20} + \frac{-13}{60} \right) + \left(\frac{-8}{6} + \frac{-12}{6} + \frac{-2}{20} + \frac{26}{60} \right) = \\ &= \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{5}x - 3 \end{aligned}$$

Otra posibilidad hubiera sido a partir del sistema lineal generado al hacer:

$$P_4(x_i) = \alpha_3(x_i)^3 + \alpha_2(x_i)^2 + \alpha_1(x_i) + \alpha_0 = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 1 & (-1) & (-1)^2 & (-1)^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & (-2) & (-2)^2 & (-2)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2.6 \\ -1.2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

La obtención de la matriz de paso se obtiene a partir de la relación:

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{13}{30} & -\frac{13}{60} & -\frac{13}{30} & \frac{13}{60} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 6 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$P_4(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = \beta_0 l_0(x) + \beta_1 l_1(x) + \beta_2 l_2(x) + \beta_3 l_3(x) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -2 & -\frac{1}{10} & \frac{13}{30} \\ -\frac{4}{3} & 2 & -\frac{1}{20} & -\frac{13}{60} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & -\frac{13}{30} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{20} & \frac{13}{60} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Así pues, si

Apartado (d) Horner y derivación numérica

1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	-3
		$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	1
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	1	-2
		$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	
	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{17}{10}$	

$$P_4(1) = -2 \text{ y } P_4'(1) = \frac{17}{10}.$$

La regla numérica se obtiene fácilmente derivando la forma de Lagrange del polinomio

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) = f(x_0) l_0(x) + f(x_1) l_1(x) + f(x_2) l_2(x) + f(x_3) l_3(x)$$

$$P_4'(x) = f(x_0) l_0'(x) + f(x_1) l_1'(x) + f(x_2) l_2'(x) + f(x_3) l_3'(x) \text{ y}$$

$$P_4'(x_0) = f(x_0) l_0'(x_0) + f(x_1) l_1'(x_0) + f(x_2) l_2'(x_0) + f(x_3) l_3'(x_0)$$

operando

$$l_0(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{-6} \rightarrow l_0'(x) = \frac{3x^2 + 2x - 4}{-6} \rightarrow l_0'(x_0) = \frac{-1}{6}$$

$$l_1(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{6} \rightarrow l_1'(x) = \frac{3x^2 - 2x - 4}{6} \rightarrow l_1'(x_0) = \frac{-1}{2}$$

$$l_2(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{12} \rightarrow l_2'(x) = \frac{3x^2 + 4x - 1}{12} \rightarrow l_2'(x_0) = \frac{1}{2}$$

$$l_3(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{-12} \rightarrow l_3'(x) = \frac{3x^2 - 4x - 1}{-12} \rightarrow l_3'(x_0) = \frac{1}{6}$$

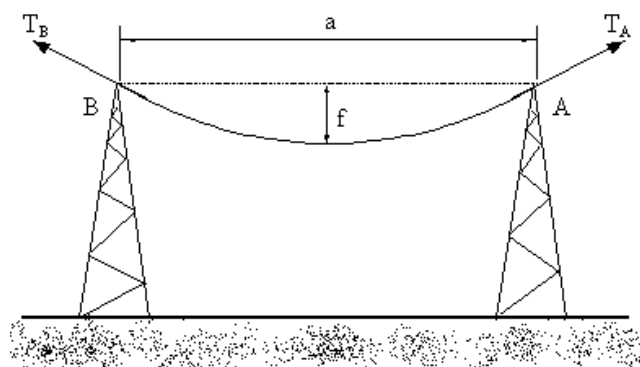
$$P_4'(x_0) = -\frac{1}{6} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2) + \frac{1}{6} f(x_3) = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{10} + \frac{-13}{30} = \frac{17}{10}$$

Apartado (e) Raíz real positiva

Tenemos que $P_4(x_i) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Además $P_4(x_i) = f(x_i)$, y puesto que $f(1)f(2) < 0$, aplicando el Teorema del valor intermedio, existe al menos un punto en ese intervalo en que la función se anula.

Ejercicio 3.- Las torres de soporte de una línea de alta tensión tienen un vano de 400m. Se ha medido la altura a que se encuentra el cable¹ en distintas partes del recorrido obteniéndose los siguientes valores²

Distancia (m)	0	120	230	310	400
Altura (m)	50	43.28	42.18	44.42	50.00



- Obtener la forma de Newton del polinomio de interpolación y utilizarla para obtener la flecha máxima (punto medio de la catenaria).
- Utilizando el método de los coeficientes indeterminados, obtener una regla numérica que permita calcular la pendiente en el punto medio.

Apartado (a) Forma de Newton del polinomio de interpolación

Recordamos de teoría que
$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}]}{x_{i+k-1} - x_{i+k}}$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+4}]$
0	50				
120	43.28	-0.056			
230	42.18	-0.01	0.0002		
310	44.42	0.028	0.0002	0	
400	50	0.062	0.0002	0	0

Representando el polinomio de interpolación de forma encajada, se obtiene

$$P(x) = 50 + x(-0.056 + (x-120)(0.0002 + (x-230)(0 + (x-310)0)))$$

El resultado es razonable, ya que la ecuación del cable es una catenaria, pero se puede aproximar con buenos resultados por una parábola cuando el vano es menor de 1000m. Para obtener la flecha

¹

²

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 8 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

(diferencia de alturas respecto a los apoyos) debemos comenzar calculando la altura en el punto medio

$$P(200) = 50 + x(-0.056 + (200 - 120)0.0002) = 42$$

La flecha máxima es de 8m.

Apartado (b) Método de los coeficientes indeterminados

Se desea obtener una regla numérica de la forma

$$f'(\beta) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k) \rightarrow f'(200) = \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(120) + \alpha_3 f(230) + \alpha_4 f(310) + \alpha_5 f(400)$$

Para obtener los coeficientes $\alpha_k, k=1,2,\dots,5$ exigimos que la fórmula sea exacta para el mayor número posible de funciones de la base canónica de los polinomios, esto es

$$f(x) = 1 \rightarrow 0 = \alpha_1 1 + \alpha_2 1 + \alpha_3 1 + \alpha_4 1 + \alpha_5 1$$

$$f(x) = x \rightarrow 1 = \alpha_1 0 + \alpha_2 120 + \alpha_3 230 + \alpha_4 310 + \alpha_5 400$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow 2 \cdot 200 = \alpha_1 0^2 + \alpha_2 120^2 + \alpha_3 230^2 + \alpha_4 310^2 + \alpha_5 400^2$$

$$f(x) = x^3 \rightarrow 3 \cdot 200^2 = \alpha_1 0^3 + \alpha_2 120^3 + \alpha_3 230^3 + \alpha_4 310^3 + \alpha_5 400^3$$

$$f(x) = x^4 \rightarrow 4 \cdot 200^3 = \alpha_1 0^4 + \alpha_2 120^4 + \alpha_3 230^4 + \alpha_4 310^4 + \alpha_5 400^4$$

Planteamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 120 & 230 & 310 & 400 \\ 0 & 120^2 & 230^2 & 310^2 & 400^2 \\ 0 & 120^3 & 230^3 & 310^3 & 400^3 \\ 0 & 120^4 & 230^4 & 310^4 & 400^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \cdot 200 \\ 3 \cdot 200^2 \\ 4 \cdot 200^3 \end{pmatrix}$$

La matriz del sistema es de tipo Vandermonde, y por tanto será un sistema mal condicionado. Resolviéndolo

$$f'(200) = 10^{-3} [0.5388 f(0) - 7974 f(120) + 3.488 f(230) + 4.716 f(310) - 0.7680 f(400)] \\ = -1.80410^{-16}$$

Comparando este resultado con el obtenido mediante el polinomio de interpolación

$$P'(x) = -0.056 + 0.0002(x + (x - 120))$$

$$P'(200) = -0.056 + 0.0002(200 + (200 - 120)) = 0$$

La diferencia es debida a las imprecisiones numéricas de las operaciones.

Ejercicio 4.- Se deposita una bola en la superficie de un fluido y se suelta, dejándola hundirse mientras se toman medidas. Al cabo de un segundo, se ha hundido 2.8383m, y 7.5458 al cabo de dos segundos.

- (a) Obtener el polinomio de interpolación, considerando que en el instante inicial la bola tiene velocidad nula y está sometida a la aceleración de la gravedad ($g=9.81\text{m/s}^2$).

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 9 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

- (b) Sabiendo que la solución exacta es $S(t) = \frac{g(2t-1+e^{-2t})}{4}$, indicar el error que se comete al utilizar el polinomio de interpolación.
- (c) Se desea saber cuánto tarda la bola en alcanzar los 100m. Utilizando la solución exacta, ¿cuál es el método de intervalo más adecuado para calcular el tiempo?. Justifíquese la respuesta y realicé 2 iteraciones..
- (d) Obténgase una función de punto fijo y un intervalo que cumplan las condiciones de convergencia y sirvan para solucionar la ecuación planteada en el apartado anterior. Realizar dos iteraciones a partir del valor $t=25$.

Apartado (a) Polinomio de interpolación

Poniendo en forma tabular los datos, se tiene que

t	$S(t)$	$S'(t)$	$S''(t)$
0	0m	0m	9.81m
1	2.8383m		
2	7.5458m		

Lo que indica que debemos utilizar la forma de diferencias divididas generalizadas del polinomio de interpolación, donde

$$f[z_0, \dots, z_n] = \begin{cases} \frac{f[z_1, \dots, z_n] - f[z_0, \dots, z_{n-1}]}{z_n - z_0} & z_0 \neq z_n \\ \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} & z_0 = z_n \end{cases}$$

Comencemos aplicando diferencias divididas generalizadas:

	$f(z_k)$	$f[z_k, z_{k+1}]$	$f[z_k, \dots, z_{k+2}]$	$f[z_k, \dots, z_{k+3}]$	$f[z_k, \dots, z_{k+4}]$
$z_0 = 0$	0				
$z_1 = 0$	0	$f'(0) = 0$			
$z_2 = 0$	9.81	$f'(0) = 0$	$\frac{f''(0)}{2!} = 4.9050$		
$z_3 = 1$	2.8383	2.8383	2.8383	-2.0667	
$z_4 = 2$	7.5458	4.7075	0.9346	-0.9518	0.5574

Puesto que, utilizando la forma de diferencias divididas generalizadas, se tiene que

$$f(t) = \sum_{k=0}^N f[z_0, \dots, z_k] \prod_{i=0}^{k-1} (t - z_i) + f[z_0, \dots, z_N, x] \prod_{i=0}^N (t - z_i)$$

el polinomio de interpolación pedido será

$$P_4(t) = 0 + 0(t-0) + 4.9050(t-0)^2 - 2.0667(t-0)^3 + 0.5574(t-0)^3(t-1)$$

cuyo error viene dado por

$$E_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!} (t-0)^3(t-1)(t-2)$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 10 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Apartado (b) Error de interpolación

Dado que $S(t) = \frac{g(2t-1+e^{-2t})}{4}$, entonces $S^{(v)}(t) = \frac{-1962}{25}e^{-2t}$ y $E_4(t) = -0.654e^{-2\xi}t^3(t-1)(t-2)$

Apartado (c) Métodos de intervalo

Se debe resolver $S(t) = \frac{g(2t-1+e^{-2t})}{4} = 100 \rightarrow F(t) = \frac{g(2t-1+e^{-2t})}{4} - 100$ mediante un método de intervalo. Utilizamos Bolzano para asegurar la existencia de la raíz

$$F(20) = \frac{9.81(40-1+e^{-40})}{4} - 100 = -4.3525 \quad F(25) = \frac{9.81(50-1+e^{-50})}{4} - 100 = 20.1725$$

Existe una raíz en $[20,25]$, pero para esos valores de t , tenemos que

$$\frac{g(2t-1+e^{-2t})}{4} - 100 \approx \frac{g(2t-1)}{4} - 100, \text{ que es la ecuación de una recta. Por tanto el método más}$$

adecuado será “Regula Falsi”, que aproxima por una recta la función. **Aunque sólo es necesario realizar las iteraciones con el método seleccionado**, lo comprobamos con todos métodos estudiados:

Bisección: $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

$$x_1 = \frac{20 + 25}{2} = 22.5 \rightarrow f(22.5) > 0$$

$$x_2 = \frac{20 + 22.5}{2} = 21.25 \rightarrow f(21.25) > 0$$

Bisección	Iteración	a	f(a)	b	f(b)	x	f(x)
	1	20.0000	-	25.0000	+	22.5000	+
	2	20.0000	-	22.5000	+	21.2500	+
	3	20.0000	-	21.2500	+	20.6250	-
	4	20.6250	-	21.2500	+	20.9375	+
	5	20.6250	-	20.9375	+	20.7813	-
	6	20.7813	-	20.9375	+	20.8594	-
	7	20.8594	-	20.9375	+	20.8984	+
	8	20.8594	-	20.8984	+	20.8789	-
	9	20.8789	-	20.8984	+	20.8887	+

Regula Falsi: $x_n = a_n - f(a_n) \frac{a_n - b_n}{f(a_n) - f(b_n)}$

$$x_1 = 20 - f(20) \frac{20 - 25}{f(20) - f(25)} = 20 - (-4.3525) \frac{20 - 25}{-4.3525 - 20.1725} = 20.8874 \rightarrow f(20.8874) = 1.7664 \cdot 10^{-8}$$

No es necesario realizar más iteraciones

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 11 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Regula Falsi Modificada

La sucesión se genera igual que la anterior, por lo que obtendremos el mismo resultado

Muller

En este caso, la aproximación de la función se hace mediante un polinomio de segundo grado que pasa por tres puntos $\{a, b, m\}$. Se comienza calculando los coeficientes de la parábola

$\alpha_2(x-m)^2 + \alpha_1(x-m) + \alpha_0$ mediante el sistema

$$\begin{pmatrix} (a-m)^2 & a-m & 1 \\ (b-m)^2 & b-m & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \\ f(m) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = f(m) \\ \begin{pmatrix} (a-m)^2 & a-m \\ (b-m)^2 & b-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) - f(m) \\ f(b) - f(m) \end{pmatrix} \end{cases}, \text{ y por tanto}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases} \text{ con } \Delta = \begin{vmatrix} (a-m)^2 & a-m \\ (b-m)^2 & b-m \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} (a-m)^2 & f(a) - f(m) \\ (b-m)^2 & f(b) - f(m) \end{vmatrix} \text{ y } \Delta_2 = \begin{vmatrix} f(a) - f(m) & a-m \\ f(b) - f(m) & b-m \end{vmatrix}$$

Una vez obtenidos los coeficientes, se calculan los puntos de corte con el eje X utilizando la fórmula alternativa

$$r = m - \frac{2\alpha_0}{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}$$

y eligiendo el signo de la raíz de forma que el valor absoluto del denominador sea lo mayor posible. La raíz así calculada estará entre m y uno de los extremos a ó b ; si está entre m y a (respectivamente b), se sustituye b (respectivamente a) por m y m por r .

Comenzamos el algoritmo añadiendo a los dos extremos, el punto medio

$$m = \frac{b-a}{2} = 22.5 \rightarrow f(m) = 7.91$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2.5^2 & -2.5 \\ 2.5^2 & 2.5 \end{vmatrix} = 31.25 \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2.5^2 & -12.2625 \\ 2.5^2 & 12.2625 \end{vmatrix} = 153.2812 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -12.2625 & -2.5 \\ 12.2625 & 2.5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha_0 = 7.91 \quad \alpha_1 = \frac{153.2812}{31.25} = 4.9050 \quad \alpha_2 = \frac{0}{31.25} = 0$$

Se observa que la parábola ha degenerado en una recta, y al aplicar la fórmula se obtiene el mismo valor que con Regula Falsi

$$r = 22.5 - \frac{2 \cdot 7.91}{-4.9050 - \sqrt{4.9050^2 - 4 \cdot 0 \cdot 7.91}} = 20.8874 \rightarrow f(r) = 1.7664 \cdot 10^{-8}$$

Apartado (d) Método de iteración funcional

Para emplear los métodos de punto fijo, se debe seleccionar adecuadamente la función de forma que $\forall x \in (a, b): g(x) \in (a, b) \wedge \|g'(x)\| < 1$. Aunque en la mayoría de los casos, esa selección no es simple, sí lo es en el ejemplo, puesto que a la vista del apartado anterior sabemos que la función se comporta

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 12 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

de forma casi lineal en el intervalo que la contiene. Por tanto, $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$, donde m es la pendiente en el intervalo, es una buena elección de la función de iteración.

En este caso se tiene que $F'(t) = \frac{g(2 - 2e^{-2t})}{4}$ y $F'(20) \approx F'(25) = \frac{g}{2} = 4.905$. Por tanto, la función de iteración será

$$g(t) = t - \frac{2F(t)}{g} = t + \frac{200}{g} - \frac{1}{2}(2t - 1 + e^{-2t}) = \frac{200}{g} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Comprobamos que cumple las hipótesis

$$1. \quad g(x) \in C[a, b]$$

Al ser combinación de sumas y exponenciales

$$2. \quad \forall x \in [a, b]: g(x) \in [a, b]$$

$$g(20) = \frac{200}{g} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-40} \approx 20.8874 \approx g(25)$$

$$3. \quad \forall x \in [a, b]: |g'(x)| \leq k < 1$$

$$g'(t) = e^{-2t} < e^{-40} < 1$$

Realizamos las iteraciones pedidas, probando con ambos extremos

$$x_0 = 20 \quad x_1 = g(x_0) = g(20) = 20.8874 \quad x_2 = g(x_1) = g(20.8874) = 20.8874$$

$$x_0 = 25 \quad x_1 = g(x_0) = g(25) = 20.8874 \quad x_2 = g(x_1) = g(20.8874) = 20.8874$$

También se habría podido despejar de la función inicial

$$F(t) = \frac{g(2t - 1 + e^{-2t})}{4} - 100 \rightarrow \begin{cases} g_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{400}{g} + 1 - e^{-2t}\right) \\ g_2(t) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{400}{g} + 1 - 2t\right) \end{cases}$$

Analizando por separado cada función para valores positivos del tiempo

$$g_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{400}{g} + 1 - e^{-2t}\right) \rightarrow g_1'(t) = e^{-2t}$$

$g_1(t)$ es positiva y monótona creciente acotada por $[g_1(0), g_1(\infty)] = \left[\frac{200}{g}, \frac{200}{g} + \frac{1}{2}\right]$. Tomamos un intervalo que incluya la imagen, por ejemplo el $[20, 25]$.

$g_1'(t)$ es positiva y monótona decreciente acotada superiormente en por $[20, 25]$ por $g_1'(20) < 5 \cdot 10^{-18}$.

Así pues la función $g_1(t)$ verifica las condiciones de punto fijo. Realizamos las iteraciones

$$x_0 = 20 \quad x_1 = g_1(x_0) = g_1(20) = 20.8874 \quad x_2 = g_1(x_1) = g_1(20.8874) = 20.8874$$

$$x_0 = 25 \quad x_1 = g_1(x_0) = g_1(25) = 20.8874 \quad x_2 = g_1(x_1) = g_1(20.8874) = 20.8874$$

$$F(t) = \frac{g(2t - 1 + e^{-2t})}{4} - 100 \rightarrow \begin{cases} g_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{400}{g} + 1 - e^{-2t}\right) \\ g_2(t) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{400}{g} + 1 - 2t\right) \end{cases}$$

$$g_2(t) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{400}{g} + 1 - 2t\right) \rightarrow g_2'(t) = \frac{1}{\frac{400}{g} + 1 - 2t}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 13 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$g_2(t)$ es monótona creciente acotada inferiormente por $g_2(0) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{400}{g} + 1\right) \approx -1.8661$ y su dominio es $\left[0, \frac{200}{g} + \frac{1}{2}\right]$. Antes de seleccionar el intervalo, comprobamos la condición sobre la derivada.

$g'_2(t)$ es positiva y monótona creciente hasta la discontinuidad en $t = \frac{200}{g} + \frac{1}{2}$. Esta acotada por la unidad cuando $t < \frac{200}{g}$. Pero $g_2\left(t < \frac{200}{g}\right) = 0$, y por tanto no hay ningún intervalo que verifique las condiciones.

Ejercicio 5.- Dados los siguientes pares de valores $\{(0,1), (1,2), (3,0)\}$, obtener el polinomio de interpolación segmentaria siguiente:

- (a) Cuadrático con condición natural en el extremo izquierdo ($f'(0)=0$).
- (b) Cuadrático con condición sujeta en el extremo derecho ($f'(3)=1$).
- (c) Cúbico con condiciones naturales.
- (d) Cúbico con condiciones sujetas ($f'(0)=0$ y $f'(3)=1$).

Apartado (a) Polinomio de interpolación segmentaria cuadrático con condiciones naturales

Recordando la teoría, el polinomio de interpolación segmentaria $S(x)$ de grado k viene definido

mediante $S(x) = \{P_k(x) \text{ con } x \in I_k\}$ con $[a, b] = \bigcup_{k=1}^n I_k = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k]$, donde el soporte está

ordenado $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ y $S(x)$ verifica $S(x_k) = P_k(x_k) = P_{k+1}(x_k) = f(x_k)$ y $S(x) \in C^{k-1}[a, b]$.

En este caso el polinomio es cuadrático, por tanto

$$P_k(x) = a_k(x - x_{k-1})^2 + b_k(x - x_{k-1}) + c_k \quad \text{con } x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$$

Al imponer las condiciones de continuidad de la función y su derivada,

$$P_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1}) \wedge P_k(x_k) = f(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$P'_k(x_k) = P'_{k+1}(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

se llega a

$$a_k = \frac{b_{k+1} - b_k}{2(x_k - x_{k-1})} = \frac{b_{k+1} - b_k}{2h_k} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$c_k = f(x_{k-1}) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$2f[x_k, x_{k-1}] = b_k + b_{k+1} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Que, planteado matricialmente conduce al sistema

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 14 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} f[x_0, x_1] \\ f[x_1, x_2] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ f[x_{n-1}, x_n] \end{pmatrix}$$

Imponiendo la condición $f'(0) = \alpha$, se tiene $b_1 = \alpha$, lo que conduce a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2f[x_0, x_1] \\ 2f[x_1, x_2] \\ \vdots \\ 2f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ 2f[x_{n-1}, x_n] \end{pmatrix}$$

Particularizando para el ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2f[x_0, x_1] \\ 2f[x_1, x_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 2 \\ b_3 = -2 - b_2 \rightarrow b_3 = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{b_2 - b_1}{2(x_2 - x_1)} = \frac{2 - 0}{2(1 - 0)} = 1 \\ a_2 = \frac{b_3 - b_2}{2(x_3 - x_2)} = \frac{-4 - 2}{2(3 - 1)} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Los polinomios de interpolación vienen dados por

Intervalo	Polinomio
[0,1]	$P_1(x) = 1(x-0)^2 + 0(x-0) + 1 = x^2 + 1$
[1,3]	$P_2(x) = \frac{-3}{2}(x-1)^2 + 2(x-1) + 2 = \frac{-3}{2}x^2 - 5x - \frac{3}{2}$

Resolución alternativa

Se pueden aplicar las condiciones a cada intervalo, lo que no exige llegar a plantear el sistema.

Primer intervalo [0,1]:

$$P_1(x) = a_1(x-0)^2 + b_1(x-0) + c_1 \quad P_1'(x) = 2a_1(x-0) + b_1$$

Condiciones

$$P_1(0) = f(0) \rightarrow c_1 = 1$$

$$P_1'(0) = f'(0) \rightarrow b_1 = 0$$

$$P_1(1) = f(1) \rightarrow a_1 + b_1 + c_1 = 2 \rightarrow a_1 = 1$$

Segundo intervalo [1,3]:

$$P_2(x) = a_2(x-1)^2 + b_2(x-1) + c_2 \quad P_2'(x) = 2a_2(x-1) + b_2$$

Condiciones

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 15 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$P_2(1) = f(1) \rightarrow c_2 = 2$$

$$P_2'(1) = P_1'(1) \rightarrow b_2 = 2 \cdot 1(1-0) + 0 = 2$$

$$P_2(3) = f(3) \rightarrow a_2 \cdot 4 + b_2 \cdot 2 + c_2 = 0 \rightarrow a_2 = -\frac{3}{2}$$

Apartado (b) Polinomio de interpolación segmentaria cuadrático con condiciones sujetas

Repitiendo el proceso visto en el apartado anterior, se llega al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} b_1 = 2 - b_2 \rightarrow b_1 = 5 \\ b_2 = -2 - b_3 \rightarrow b_2 = -3 \\ b_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{b_2 - b_1}{2(x_2 - x_1)} = \frac{-3 - 5}{2(1 - 0)} = -4 \\ a_2 = \frac{b_3 - b_2}{2(x_3 - x_2)} = \frac{1 - (-3)}{2(3 - 1)} = 1 \end{cases}$$

Los polinomios de interpolación vienen dados por

Intervalo	Polinomio
[0,1]	$P_1(x) = -4(x-0)^2 + 5(x-0) + 1 = -4x^2 + 5x + 1$
[1,3]	$P_2(x) = 1(x-1)^2 + (-3)(x-1) + 2 = x^2 - 5x + 6$

Resolución alternativa

Se pueden aplicar las condiciones a cada intervalo, comenzando por el último, lo que no exige llegar a plantear el sistema global.

Segundo intervalo [1,3]:

$$P_2(x) = a_2(x-1)^2 + b_2(x-1) + c_2 \quad P_2'(x) = 2a_2(x-1) + b_2$$

Condiciones

$$P_2(1) = f(1) \rightarrow c_2 = 2$$

$$\left. \begin{aligned} P_2(3) = f(3) &\rightarrow a_2 \cdot 4 + b_2 \cdot 2 + c_2 = 0 \\ P_2'(3) = 1 &\rightarrow 2a_2 \cdot 2 + b_2 = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} b_2 = -3 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Primer intervalo [0,1]:

$$P_1(x) = a_1(x-0)^2 + b_1(x-0) + c_1 \quad P_1'(x) = 2a_1(x-0) + b_1$$

Condiciones

$$P_1(0) = f(0) \rightarrow c_1 = 1$$

$$\left. \begin{aligned} P_1(1) = f(1) &\rightarrow a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 1 + c_1 = 2 \\ P_1'(1) = P_2'(1) &\rightarrow 2a_1 \cdot 1 + b_1 = -3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} b_1 = 5 \\ a_1 = -4 \end{cases}$$

Apartado (c) Polinomio de interpolación segmentaria cúbica con condiciones naturales

Recordando la teoría, el polinomio de interpolación segmentaria cúbica viene definido mediante

$$P_k(x) = a_k(x-x_{k-1})^3 + b_k(x-x_{k-1})^2 + c_k(x-x_{k-1}) + d_k \quad \text{con } x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$$

Al imponer las condiciones de continuidad de la función y sus derivadas,

$$P_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1}) \wedge P_k(x_k) = f(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 16 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$P'_k(x_k) = P'_{k+1}(x_k) \quad k=1, 2, \dots, n-1$$

$$P''_k(x_k) = P''_{k+1}(x_k) \quad k=1, 2, \dots, n-1$$

se llega a

$$a_k = \frac{b_{k+1} - b_k}{3(x_k - x_{k-1})} = \frac{b_{k+1} - b_k}{3h_k} \quad k=1, 2, \dots, n$$

$$c_k = f[x_k, x_{k-1}] - \frac{b_{k+1} + 2b_k}{3} h_k \quad k=1, 2, \dots, n$$

$$d_k = f(x_{k-1}) \quad k=1, 2, \dots, n$$

$$3(f[x_{k+1}, x_k] - f[x_k, x_{k-1}]) = b_k h_k + 2b_{k+1}(h_k + h_{k+1}) + b_{k+2} h_{k+1} \quad k=1, 2, 3, \dots, n-1$$

Que, planteado matricialmente conduce al sistema

$$\begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) & h_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2] \\ \vdots \\ f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}] \end{pmatrix}$$

Imponiendo las condiciones naturales $S''(a) = S''(b) = 0 \Rightarrow b_1 = b_{n+1} = 0$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 & & 0 & & \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & \cdots & 0 & & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} & & & \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) & & & \\ & & & & 1 & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ f[x_2, x_3] - f[x_1, x_0] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}] - f[x_{n-3}, x_{n-2}] \\ f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ 0 \end{pmatrix}$$

Particularizando para el ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = -1 \\ b_3 = 0 \end{cases}$$

Recuperando los valores del resto de los coeficientes

$$a_1 = \frac{b_2 - b_1}{3h_1} = \frac{-1 - 0}{3} = -\frac{1}{3} \quad c_1 = f[x_2, x_1] - \frac{b_2 + 2b_1}{3} h_1 = 1 - \frac{-1 + 2 \cdot 0}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$$

$$a_2 = \frac{b_3 - b_2}{3h_2} = \frac{0 - (-1)}{6} = \frac{1}{6} \quad c_2 = f[x_3, x_2] - \frac{b_3 + 2b_2}{3} h_2 = -1 - \frac{0 + 2(-1)}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

Los polinomios de interpolación vienen dados por

Intervalo Polinomio

$$[0,1] \quad P_1(x) = -\frac{1}{3}(x-0)^3 + 0(x-0)^2 + \frac{4}{3}(x-0) + 1 = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x + 1$$

$$[1,3] \quad P_2(x) = \frac{1}{6}(x-1)^3 + (-1)(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1) + 2 = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{1}{2}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 17 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Resolución alternativa

Se pueden aplicar las condiciones a cada intervalo, lo que exige finalmente plantear el sistema global

Primer intervalo [0,1]:

$$P_1(x) = a_1(x-0)^3 + b_1(x-0)^2 + c_1(x-0) + d_1$$

$$P_1'(x) = 3a_1(x-0)^2 + 2b_1(x-0) + c_1 \quad P_1''(x) = 6a_1(x-0) + 2b_1$$

Condiciones sobre valores conocidos

$$P_1(0) = f(0) \rightarrow d_1 = 1 \quad P_1''(0) = 0 \rightarrow b_1 = 0 \quad P_1(1) = f(1) \rightarrow a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 2 \rightarrow a_1 + c_1 = 1$$

Segundo intervalo [1,3]:

$$P_2(x) = a_2(x-1)^3 + b_2(x-1)^2 + c_2(x-1) + d_2$$

$$P_2'(x) = 3a_2(x-1)^2 + 2b_2(x-1) + c_2 \quad P_2''(x) = 6a_2(x-1) + 2b_2$$

Condiciones sobre valores conocidos

$$P_2(1) = f(1) \rightarrow d_2 = 2 \quad P_2(3) = f(3) \rightarrow a_2 \cdot 8 + b_2 \cdot 4 + c_2 \cdot 2 + d_2 = 0 \rightarrow 4a_2 + 2b_2 + c_2 = -1$$

$$P_2''(3) = 6a_2 \cdot 2 + 2b_2 = 0 \rightarrow 6a_2 + b_2 = 0$$

Condiciones de continuidad en ambos intervalos:

$$P_2'(1) = P_1'(1) \rightarrow c_2 = 3a_1 + 2b_1 + c_1 = 3a_1 + c_1 \quad P_2''(1) = P_1''(1) \rightarrow 2b_2 = 6a_1 + 2b_1 = 6a_1$$

Planteando el sistema global y resolviendo

$$b_1 = 1 \quad d_1 = 1 \quad d_2 = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + c_1 = 1 \\ 3a_1 + c_1 = c_2 \\ 3a_1 = b_2 \\ 6a_2 + b_2 = 0 \\ 4a_2 + 2b_2 + c_2 = -1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 1 - a_1 \\ c_2 = 2a_1 + 1 \\ b_2 = 3a_1 \\ 6a_2 + 3a_1 = 0 \rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}a_1 \\ 4(-\frac{1}{2}a_2) + 2(3a_1) + (2a_1 + 1) = -1 \rightarrow 6a_1 = -2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = -\frac{1}{3} \\ a_2 = \frac{1}{6} \\ c_1 = \frac{4}{3} \\ c_2 = \frac{1}{3} \\ b_2 = -1 \end{array} \right.$$

Apartado (d) Polinomio de interpolación segmentaria cúbica con condiciones sujetas

Repitiendo el proceso visto en el apartado anterior, se llega al sistema

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2h_1 & h_1 & & & \\ 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) \\ & & & h_n & 2h_n \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \\ b_{n+1} \end{array} \right) = 3 \cdot \left(\begin{array}{c} f[x_0, x_1] - f'(a) \\ f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ f[x_2, x_3] - f[x_1, x_0] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}] - f[x_{n-3}, x_{n-2}] \\ f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ f'(b) - f[x_{n-1}, x_n] \end{array} \right)$$

Particularizando para el ejemplo

$$\left(\begin{array}{ccc} 2h_1 & h_1 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & h_2 & 2h_2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right) = 3 \cdot \left(\begin{array}{c} f[x_0, x_1] - f'(a) \\ f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1] \\ f'(b) - f[x_1, x_2] \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ -6 \\ 6 \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{8}{3} \\ b_2 = -\frac{7}{3} \\ b_3 = \frac{8}{3} \end{array} \right.$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 18 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Recuperando los valores del resto de los coeficientes

$$a_1 = \frac{b_2 - b_1}{3h_1} = \frac{-\frac{7}{3} - \frac{8}{3}}{3} = \frac{-5}{3} \quad c_1 = f[x_2, x_1] - \frac{b_2 + 2b_1}{3} h_1 = 1 - \frac{-\frac{7}{3} + 2 \cdot \frac{8}{3}}{3} 1 = 0$$

$$a_2 = \frac{b_3 - b_2}{3h_2} = \frac{\frac{8}{3} - (-\frac{7}{3})}{6} = \frac{5}{6} \quad c_2 = f[x_3, x_2] - \frac{b_3 + 2b_2}{3} h_2 = -1 - \frac{\frac{8}{3} + 2(-\frac{7}{3})}{3} 2 = \frac{1}{3}$$

Los polinomios de interpolación vienen dados por

Intervalo	Polinomio
[0,1]	$P_1(x) = -\frac{5}{3}(x-0)^3 + \frac{8}{3}(x-0)^2 + 0(x-0) + 1 = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^2 + 1$
[1,3]	$P_2(x) = \frac{5}{6}(x-1)^3 - \frac{7}{3}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1) + 2 = \frac{5}{6}x^3 - \frac{29}{6}x^2 + \frac{15}{2}x - \frac{3}{2}$

Resolución alternativa

Se pueden aplicar las condiciones a cada intervalo, lo que exige finalmente plantear el sistema global
Primer intervalo [0,1]:

$$P_1(x) = a_1(x-0)^3 + b_1(x-0)^2 + c_1(x-0) + d_1$$

$$P_1'(x) = 3a_1(x-0)^2 + 2b_1(x-0) + c_1 \quad P_1''(x) = 6a_1(x-0) + 2b_1$$

Condiciones sobre valores conocidos

$$P_1(0) = f(0) \rightarrow d_1 = 1 \quad P_1'(0) = f'(0) \rightarrow c_1 = 0 \quad P_1(1) = f(1) \rightarrow a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 2 \rightarrow a_1 + b_1 = 1$$

Segundo intervalo [1,3]:

$$P_2(x) = a_2(x-1)^3 + b_2(x-1)^2 + c_2(x-1) + d_2$$

$$P_2'(x) = 3a_2(x-1)^2 + 2b_2(x-1) + c_2 \quad P_2''(x) = 6a_2(x-1) + 2b_2$$

Condiciones sobre valores conocidos

$$P_2(1) = f(1) \rightarrow d_2 = 2 \quad P_2(3) = f(3) \rightarrow a_2 8 + b_2 4 + c_2 2 + d_2 = 0 \rightarrow 4a_2 + 2b_2 + c_2 = -1$$

$$P_2'(3) = f'(3) \rightarrow 3a_2 4 + 2b_2 2 + c_2 = 1 \rightarrow 12a_2 + 4b_2 + c_2 = 1$$

Condiciones de continuidad en ambos intervalos:

$$P_2'(1) = P_1'(1) \rightarrow c_2 = 3a_1 + 2b_1 + c_1 = 3a_1 + 2b_1 \quad P_2''(1) = P_1''(1) \rightarrow 2b_2 = 6a_1 + 2b_1$$

Planteando el sistema global y resolviendo

$$c_1 = 1 \quad d_1 = 1 \quad d_2 = 2$$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 1 \\ 3a_1 + 2b_1 = c_2 \\ 3a_1 + b_1 = b_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_1 = 1 - a_1 \\ c_2 = a_1 + 2 \\ b_2 = 2a_1 + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{5}{3} \\ a_2 = \frac{5}{6} \\ b_1 = \frac{8}{3} \\ b_2 = -\frac{7}{3} \\ c_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 19 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 6.- Dado el punto $z=\pi/4$ y la función $f(x)=\sin(x)\cos(x)$, de la que se conoce su valor en el soporte $\{0,\pi/6,\pi/3,2\pi/3\}$:

- Obtener, escogiendo los puntos de forma óptima para interpolar en z , polinomios de interpolación de grado 1, 2 y 3 con los datos anteriores. Acotar, utilizando la fórmula de error, el error cometido en el punto z . Comparar el resultado con el error real en el punto z . {1 pto.}
- Si se usara el polinomio de interpolación segmentaria lineal en todo el intervalo ¿Cuál es el menor número de puntos suficientes para asegurar que el error es siempre inferior a 0.01? Evaluar, en ese caso, el valor en el punto z . {0,5 ptos.}
- Obtener el polinomio de interpolación segmentaria cuadrática (spline cuadrático) tomando como datos el valor de la función en $\{0,\pi/6,\pi/3\}$ y el de la derivada de la función en el extremo izquierdo. Evaluarlo en el punto z . {1,25 ptos.}

Apartado (a) Polinomio de interpolación segmentaria cuadrático con condiciones naturales

Puesto que piden polinomios de interpolación de grado creciente (1,2 y 3), eso significa que van aumentando los puntos de interpolación (2,3 y 4 respectivamente). Si bien se puede emplear cualquiera de los métodos vistos, el más adecuado es el de diferencias divididas, puesto que permite aprovechar los resultados de los cálculos previos.

Por otro lado, se ha visto que

$$f(x) = P_n(x) + E_{n+1}(x)$$

donde la expresión del polinomio de interpolación mediante diferencias divididas viene dada por

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) =$$

$$= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

y

$$E_{n+1}(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \quad \text{con } \xi_x \in (x_0, x_n)$$

Esto es,

$$\left\{ \begin{array}{l} |f(z) - P_n(z)| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_z)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (z - x_k) \right| \leq M \left| \prod_{k=0}^n (z - x_k) \right| \quad \text{con } M = \sup_{x \in (x_0, x_n)} \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \right| \\ \max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - P_n(x)| \leq \max_{x \in [x_0, x_n]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right| \leq M \max_{x \in [x_0, x_n]} \left| \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right| \end{array} \right.$$

Por tanto, a la hora de seleccionar los puntos, se deben tomar de forma que el intervalo que definen contenga el valor a interpolar y que hagan la cota lo menor posible. Como resulta obvio,

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 20 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$[x_a, x_b] \subset [x_c, x_d] \Rightarrow \begin{cases} \sup_{x \in (x_a, x_b)} \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \right| \leq \sup_{x \in (x_c, x_d)} \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \right| \\ |(z-x_a)(z-x_b)| \leq |(z-x_c)(z-x_d)| \forall z \in [x_a, x_b] \end{cases}$$

Selección de los puntos de interpolación

$$f(x) = \sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$f''(x) = -2\sin(2x) \quad f'''(x) = -4\cos(2x) \quad f^{iv}(x) = 8\sin(2x)$$

n	Puntos	M	$\left \prod_{k=0}^n (z-x_k) \right $	Cota
1	$\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right\}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$\frac{1}{144\pi^2} \approx 0.0685$	$\frac{1}{144\pi^2} \approx 0.0685$
2	$\left\{ 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right\}$	$\frac{4}{3!} \cos(0) = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{576\pi^3} \approx 0.0538$	$\frac{1}{864\pi^3} \approx 0.0359$
3	$\left\{ 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$	$\frac{8}{4!} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$	$\frac{5}{6912\pi^4} \approx 0.0705$	$\frac{5}{10368\pi^4} \approx 0.0470$

A la vista de lo anterior se puede realizar la tabla de diferencias divididas para los cuatro puntos, seleccionando posteriormente los valores adecuados.

	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 0$			
$x_1 = \frac{\pi}{6}$	$f[x_1] = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.433$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.827$		
$x_2 = \frac{\pi}{3}$	$f[x_2] = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.433$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = 0$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-9\sqrt{3}}{2\pi^2} \approx -0.7897$	
$x_3 = \frac{2\pi}{3}$	$f[x_3] = -\frac{\sqrt{3}}{4} \approx -0.433$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.827$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-3\sqrt{3}}{\pi^2} \approx -0.5265$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi^3} \approx 0.1257$

Puesto que $f(z) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, se tiene

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 21 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

n	Puntos	$P_n(x)$	$P_n(z)$	$ P_n(x) - f(x) $
1	$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$	$P_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} + 0\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.4330$	≈ 0.0670
2	$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, 0\right\}$	$P_2(x) = P_1(x) + \frac{-9\sqrt{3}}{2\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{9\sqrt{3}}{32} \approx 0.4871$	≈ 0.0129
3	$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}\right\}$	$P_3(x) = P_2(x) + \frac{9\sqrt{3}}{4\pi^3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)(x - 0)$	$\frac{71\sqrt{3}}{256} \approx 0.4804$	≈ 0.0196

Como ya se ha visto en teoría, los errores reales son menores que las cotas, y generalmente a menor cota, menor error.

Para verificar lo anterior, vamos a estudiar todo el resto de casos factible, aunque no fueran óptimos.

Puntos	$P_n(x)$	$P_n(z)$	Cota	$ f(z) - P_n(z) $
$\left\{0, \frac{\pi}{3}\right\}$	$0 + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}(x - 0)$	$\frac{3\sqrt{3}}{16} \approx 0.3248$	$\frac{\pi^2}{48} \approx 0.2056$	≈ 0.1742
$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right\}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.2887$	$\frac{5\pi^2}{144} \approx 0.3427$	≈ 0.2113
$\left\{0, \frac{2\pi}{3}\right\}$	$0 - \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}(x - 0)$	$\frac{-3\sqrt{3}}{32} \approx -0.1624$	$\frac{5\pi^2}{48} \approx 1.0281$	≈ 0.6624
$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} + 0\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{13\sqrt{3}}{48} \approx 0.4691$	$\frac{5\pi^3}{1728} \approx 0.0897$	≈ 0.0309

Apartado (b) Interpolación segmentaria lineal

Puesto que la interpolación es lineal, se tiene

$$\max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |f(x) - P_1(x)| \leq \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \left| \frac{f''(\xi_x)}{2!} \prod_{i=0}^1 (x - x_{k+i}) \right| \leq M \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{4} \quad \text{con} \quad \begin{cases} M = \sup_{x \in (x_k, x_{k+1})} \left| \frac{f''(x)}{2!} \right| \\ x_k = a + k \cdot h \end{cases}$$

siendo h la separación entre los puntos. Como esto se debe cumplir para todos los intervalos, se tiene

$$\text{que } M=1 \text{ y } 1 \frac{h^2}{4} < 0.01 \Rightarrow h < 0.2. \text{ Y dado que } n \cdot h = b - a \Rightarrow n > \frac{b-a}{h} = \frac{\frac{2\pi}{3} - 0}{0.2} = \frac{10\pi}{3} \approx 10.47$$

Así pues son necesarios 11 subintervalos, y $h = \frac{2\pi}{33}$.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 22 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Para interpolar en $z=\pi/4$, es necesario saber previamente el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ a que pertenece, para

lo cual se debe cumplir que $x_k < \frac{\pi}{4} < x_{k+1} \rightarrow k < \frac{\frac{\pi}{4} - a}{h} = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{\frac{2\pi}{33}} = \frac{33}{8} = 4.125$. Así pues el intervalo

viene dado por $[x_4, x_5] = \left[\frac{8\pi}{33}, \frac{10\pi}{33}\right]$. Aplicando diferencias divididas para calcular el polinomio e interpolar, se llega a:

	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	
$x_k = \frac{8\pi}{33}$	0.4994		$P_1(x) \approx 0.4994 - 0.1415\left(x - \frac{8\pi}{33}\right)$
$x_{k+1} = \frac{10\pi}{33}$	0.4725	-0.1415	$P_1(z) \approx 0.4961$

Apartado (c) Polinomio de interpolación segmentaria cuadrático con condiciones sujetas

Recordando la teoría, el polinomio de interpolación segmentaria $S(x)$ de grado k viene definido

mediante $S(x) = \{P_k(x) \text{ con } x \in I_k\}$ con $[a, b] = \bigcup_{k=1}^n I_k = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k]$, donde el soporte está

ordenado $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ y $S(x)$ verifica $S(x_k) = P_k(x_k) = P_{k+1}(x_k) = f(x_k)$ y $S(x) \in C^{k-1}[a, b]$.

En este caso el polinomio es cuadrático, por tanto

$$P_k(x) = a_k(x - x_{k-1})^2 + b_k(x - x_{k-1}) + c_k \quad \text{con } x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$$

Al imponer las condiciones de continuidad de la función y su derivada,

$$P_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1}) \wedge P_k(x_k) = f(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$P'_k(x_k) = P'_{k+1}(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

se llega a

$$a_k = \frac{b_{k+1} - b_k}{2(x_k - x_{k-1})} = \frac{b_{k+1} - b_k}{2h_k} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$c_k = f(x_{k-1}) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$2f[x_k, x_{k-1}] = b_k + b_{k+1} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Que, planteado matricialmente conduce al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} f[x_0, x_1] \\ f[x_1, x_2] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ f[x_{n-1}, x_n] \end{pmatrix}$$

Imponiendo la condición $f'(0) = \alpha$, se tiene $b_1 = \alpha$, lo que conduce a

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 23 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2f[x_0, x_1] \\ 2f[x_1, x_2] \\ \vdots \\ 2f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ 2f[x_{n-1}, x_n] \end{pmatrix}$$

Particularizando para el ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot 0) \\ 2f[x_0, x_1] \\ 2f[x_1, x_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} - 1 \approx 0.6540 \\ b_3 = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \approx -0.6540 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{b_2 - b_1}{2(x_1 - x_0)} = \frac{-6\pi + 9\sqrt{3}}{\pi^2} \approx -0.3304 \\ a_2 = \frac{b_3 - b_2}{2(x_2 - x_1)} = \frac{6\pi - 18\sqrt{3}}{\pi^2} \approx -1.2490 \end{cases}$$

Los polinomios de interpolación vienen dados por

Intervalo	Polinomio
$\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$	$P_1^1(x) = \frac{-6\pi + 9\sqrt{3}}{\pi^2}(x-0)^2 + 1(x-0) + 0 \approx -0.3304x^2 + x$
$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$	$P_1^2(x) = \frac{6\pi - 18\sqrt{3}}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi} - 1\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx -1.2490x^2 + 1.9620x - 0.2518$

Evaluando el segundo polinomio en el punto z , $P_1^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{9\sqrt{3} - \pi}{24} \approx 0.5186$

Resolución alternativa

Se pueden aplicar las condiciones a cada intervalo, lo que no exige llegar a plantear el sistema.

Primer intervalo $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

$$P_1(x) = a_1(x-0)^2 + b_1(x-0) + c_1 \quad P_1'(x) = 2a_1(x-0) + b_1$$

Condiciones

$$P_1(0) = f(0) \rightarrow c_1 = 0$$

$$P_1'(0) = f'(0) \rightarrow b_1 = 1$$

$$P_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow a_1\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + b_1\frac{\pi}{6} + c_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow a_1 = \frac{-6\pi + 9\sqrt{3}}{\pi^2} \approx -0.3304$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 24 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Segundo intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

$$P_2(x) = a_2 \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + b_2 \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + c_2 \quad P_2'(x) = 2a_2 \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + b_2$$

Condiciones

$$P_2\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow c_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.4330$$

$$P_2'\left(\frac{\pi}{6}\right) = P_1'\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow b_2 = 2 \cdot \frac{-6\pi + 9\sqrt{3}}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{6} - 0\right) + 1 = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} - 1 \approx 0.6540$$

$$P_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow a_2 \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + b_2 \frac{\pi}{6} + c_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow a_2 = \frac{6\pi - 18\sqrt{3}}{\pi^2} \approx -1.2490$$

Ejercicio 7.- Dadas las funciones $f_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, $f_2(x) = \ln(1+x)$ y $f_3(x) = \sqrt{x}$ y el soporte

formado por $\{0, 4, 9\}$

- Obtener la expresión de los polinomios de interpolación. (Nota: NO es necesario desarrollar las expresiones de Lagrange o Newton). {0.5 pts.}
- Evaluar el polinomio de interpolación de $f_1(x)$ en $x=5$. Comparar el valor obtenido con $f_1(5)$ y obtener el error real. Acotar el término de error obtenido cuando se usa dicho polinomio para interpolar en el punto $x=5$ y en todo el intervalo $[0, 9]$. {0.5 pts.}
- Determinar el número mínimo de puntos equiespaciados suficientes para poder asegurar que la interpolación segmentaria lineal de $f_1(x)$ entre dos consecutivos tiene un error inferior a 0'001 para todo el intervalo. {0.75 pts.}
- Obtener el polinomio de interpolación segmentaria cuadrática (spline cuadrático) tomando como datos el valor de la función $f_1(x)$ en $\{0, 4, 9\}$ y el de la derivada de la función en el extremo derecho. Evaluarlo en $x=5$. {1.0 pto.}

Apartado (a) Interpolación de varias funciones sobre un mismo soporte

Se ha visto en teoría que cuando el soporte no varía para varias funciones, el método más adecuado es la interpolación con polinomios de Lagrange, ya que al depender exclusivamente del soporte (y no de la función), su cálculo es único para todas las funciones. Se ha visto en teoría que:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \quad \xi \in I = (x_{\min}, x_{\max})$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 25 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

con $P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_n^i(x)$ donde $L_n^i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$

Particularizando

$$L_2^0(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(0-4)(0-9)} \quad L_2^1(x) = \frac{(x-0)(x-9)}{(4-0)(4-9)} \quad L_2^2(x) = \frac{(x-0)(x-4)}{(9-0)(9-4)}$$

y

$$f_1(x) = f_1(0)L_2^0 + f_1(4)L_2^1 + f_1(9)L_2^2 = \frac{1}{1^2}L_2^0 + \frac{1}{5^2}L_2^1 + \frac{1}{10^2}L_2^2$$

$$f_2(x) = f_2(0)L_2^0 + f_2(4)L_2^1 + f_2(9)L_2^2 = \ln(1)L_2^0 + \ln(5)(4)L_2^1 + \ln(10)(9)L_2^2$$

$$f_3(x) = f_3(0)L_2^0 + f_3(4)L_2^1 + f_3(9)L_2^2 = \sqrt{0}L_2^0 + \sqrt{4}L_2^1 + \sqrt{9}L_2^2$$

Aunque se indica expresamente que no es necesario desarrollar la expresión anterior, se tiene

$$f_1(x) = \frac{1}{1} \frac{(x-4)(x-9)}{36} + \frac{1}{5^2} \frac{(x-0)(x-9)}{-20} + \frac{1}{10^2} \frac{(x-0)(x-4)}{45} = \frac{13}{500}x^2 - \frac{43}{125}x + 1$$

$$\approx 0.0260x^2 - 0.3440x + 1.0000$$

$$f_2(x) = \ln(1) \frac{(x-4)(x-9)}{36} + \ln(5) \frac{(x-0)(x-9)}{-20} + \ln(10) \frac{(x-0)(x-4)}{45}$$

$$= \left(\frac{\ln(10)}{45} - \frac{\ln(5)}{20} \right) x^2 + \left(\frac{-4\ln(10)}{45} + \frac{9\ln(5)}{20} \right) x \approx -0.0293x^2 + 0.51960x$$

$$f_3(x) = \sqrt{0} \frac{(x-4)(x-9)}{36} + \sqrt{4} \frac{(x-0)(x-9)}{-20} + \sqrt{9} \frac{(x-0)(x-4)}{45} = \frac{-1}{30}x^2 + \frac{19}{30}x$$

$$= -0.03\hat{x}^2 + 0.6\hat{3}x$$

Resolución alternativa

También se puede realizar usando diferencias divididas de Newton, pero el resultado sería el mismo, y el número de cálculos muy superior. Recordamos de la teoría que ahora

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \quad \text{con} \quad \begin{cases} f[x_0] = f(x_0) \\ f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] - f[x_1, \dots, x_{k-1}, x_k]}{x_0 - x_k} \end{cases}$$

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
0	$f_1[0] = 1$		
4	$f_1[4] = \frac{1}{25} = 0.04$	$f[0, 4] = \frac{-6}{25} = -0.24$	
9	$f_1[9] = \frac{1}{100} = 0.01$	$f[4, 9] = \frac{-3}{500} = -0.006$	$f[0, 4, 9] = \frac{-13}{500} = 0.026$

$$P_2(x) = 1 - \frac{6}{25}(x-0) + \frac{13}{500}(x-0)(x-4) = \frac{13}{500}x^2 - \frac{43}{125}x + 1 = 0.026x^2 - 0.344x + 1$$

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
0	$f_2[0] = 0$		
4	$f_2[4] = \ln 5 \approx 1.6094$	$f[0, 4] = \frac{\ln 5}{4} \approx 0.4024$	
9	$f_2[9] = \ln 10 \approx 2.3026$	$f[4, 9] = \frac{\ln 2}{5} \approx 0.1387$	$f[0, 4, 9] = \frac{\ln 2}{45} - \frac{\ln 5}{36} \approx -0.0293$

$$P_2(x) = 0 - \frac{\ln 5}{4}(x-0) + \left(\frac{\ln 2}{45} - \frac{\ln 5}{36}\right)(x-0)(x-4) = -0.0293x^2 + 0.51960x$$

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
0	$f_3[0] = 0$		
4	$f_3[4] = 2$	$f[0, 4] = \frac{1}{2} = 0.5$	
9	$f_3[9] = 3$	$f[4, 9] = \frac{1}{5} = 0.2$	$f[0, 4, 9] = \frac{-1}{30} = 0.0\bar{3}$

$$P_2(x) = 0 + \frac{1}{2}(x-0) - \frac{1}{30}(x-0)(x-4) = -0.0\bar{3}x^2 + 0.6\bar{3}x$$

Apartado (b) Cotas y error del polinomio de interpolación de Lagrange

Se comienza evaluando en $x=5$ tanto el polinomio de interpolación obtenido en el apartado anterior

$$P_2(5) = 1 \frac{(5-4)(5-9)}{(0-4)(0-9)} + \frac{1}{25} \frac{(5-0)(5-9)}{(4-0)(4-9)} + \frac{1}{100} \frac{(5-0)(5-4)}{(9-0)(9-4)} = -\frac{7}{100} = -0.07$$

Como la función

$$f_1(5) = \frac{1}{(1+5)^2} = \frac{1}{36} = 0.02\bar{7}$$

El error real vendrá dado por la diferencia entre ambos

$$|f(5) - P_2(5)| = \left| \frac{1}{36} - \frac{-7}{100} \right| = \frac{22}{225} \approx 0.09\bar{7}$$

Recordando la teoría

$$|f_1(x) - P_2(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} \prod_{k=0}^2 (x - x_k) \right| \leq \max_{x \in [0,9]} \left| \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} \right| |(x-0)(x-4)(x-9)|$$

, y puesto que

$$f_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} \quad f'(x) = -2(1+x)^{-3} \quad f''(x) = 3!(1+x)^{-4} \quad f'''(x) = -4!(1+x)^{-5}$$

la cota del error en el punto $x=5$ se obtiene mediante

$$|f_1(5) - P_2(5)| = \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!} (5-0)(5-4)(5-9) \right| \leq \max_{x \in [0,9]} \left| \frac{24}{3!(1+x)^5} \right| 20$$

Como la función es positiva y monótona decreciente

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 27 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\max_{x \in [0,9]} \left| \frac{24}{3!(1+x)^5} \right| \leq \left| \frac{4}{(1+0)^5} \right| \Rightarrow |f(5) - P_2(5)| = 4 \times 20 = 80$$

Para acotar el error todo el intervalo, se tiene que

$$\max_{x \in [0,9]} |f(x) - P_2(x)| \leq \max_{x \in [0,9]} \left| \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} \prod_{k=0}^2 (x - x_k) \right| \leq \max_{x \in [0,9]} \left| \frac{24}{3!(1+x)^5} \right| \max_{x \in [0,9]} |(x-0)(x-4)(x-9)|$$

Se debe acotar también el valor del polinomio, para lo cual lo evaluamos en los extremos del intervalo y en aquellos valores que anulan su derivada (extremos relativos).

$$p(x) = x(x-4)(x-9) \quad p'(x) = 3x^2 - 26x + 36 = 0 \rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{61}}{3} \approx \{6.9367, 1.7299\}$$

$$\max_{x \in [0,9]} |p(x)| = \max \left\{ |p(0)|, |p(9)|, \left| p\left(\frac{13+\sqrt{61}}{3}\right) \right|, \left| p\left(\frac{13-\sqrt{61}}{3}\right) \right| \right\} = \max \left\{ 0, 0, -\frac{182-122\sqrt{61}}{61}, \frac{182+122\sqrt{61}}{61} \right\} \approx 42.0315$$

y por tanto

$$\max_{x \in [0,9]} |f(x) - P_2(x)| \leq 42.04 \times 4 = 168.16$$

Apartado (c) Número de puntos de interpolación lineal segmentaria

En el caso de interpolación lineal segmentaria con puntos equiespaciados una distancia h se tiene

$f(x) = P_1^k(x) + E^k(x)$ con $x \in [x_{k-1}, x_k]$ y $x_k = x_0 + kh$ donde

$$P_1^k(x) = f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_k](x - x_{k-1}) \quad \text{y} \quad E^k(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x - x_{k-1})(x - x_k); \xi_x \in (x_{k-1}, x_k)$$

Así pues

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,9]} |f(x) - P(x)| &= \max_{k=1, \dots, n} \left(\max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x) - P_1^k(x)| \right) \leq \max_{k=1, \dots, n} \left(\max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \left| \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x - x_{k-1})(x - x_k) \right| \right) \leq \\ &\leq \max_{k=1, \dots, n} \left(\max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \left| \frac{f''(\xi_x)}{2!} \right| \right) \max_{k=1, \dots, n} \left(|(x - x_{k-1})(x - x_k)| \right) = \max_{x \in [0,9]} \left| \frac{f''(\xi_x)}{2!} \right| \frac{h^2}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Como } |f''(x)| \text{ es positiva y monótona decreciente, } \max_{x \in [0,9]} \left| \frac{f''(x)}{2!} \right| \leq \max_{x \in [0,9]} \left| \frac{3}{(1+x)^4} \right| = 3$$

Para asegurar el error pedido es preciso que

$$\max_{x \in [0,9]} |f(x) - P(x)| \leq 3 \frac{h^2}{4} \leq 0.001 \Rightarrow h \leq 0.0365,$$

y el número de intervalos vendrá dado como

$$n \geq \frac{b-a}{h} = \frac{9-0}{0.0365} = 246.47,$$

con lo que el número de puntos debe ser 248.

Apartado (d) Polinomio de interpolación segmentaria cuadrático con condición en el extremo derecho

Ya que se tienen dos intervalos, la spline cuadrática se compondrá de dos polinomios de segundo grado, definido cada cual sobre su respectivo intervalo.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 28 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = a_1(x - x_k)^2 + b_1(x - x_k) + c_1 & x, x_k \in [0, 4) \\ P_2(x) = a_2(x - x_{k+1})^2 + b_2(x - x_{k+1}) + c_2 & x, x_{k+1} \in [4, 9] \end{cases}$$

Las condiciones a imponer son

- Interpolación $P_1(0) = f(0) = 1$ $P_1(4) = f(4) = \frac{1}{25}$ $P_2(9) = f(9) = \frac{1}{100}$
- Continuidad $P_1(4) = P_2(4)$ $P_1'(4) = P_2'(4)$
- Contorno $P_2'(9) = f'(9) = -\frac{1}{500}$

Habitualmente se toma como referencia el extremo izquierdo del intervalo, pero se puede tomar cualquier valor para simplificar los cálculos. Puesto que la condición de contorno se aplica en el extremo derecho del intervalo total, es más sencillo tomar como referencia el extremo derecho. De esta forma se pueden aplicar las condiciones a cada intervalo, comenzando por el último, lo que no exige llegar a plantear el sistema global.

Segundo intervalo [4,9]:

$$P_2(x) = a_2(x - 9)^2 + b_2(x - 9) + c_2 \quad P_2'(x) = 2a_2(x - 9) + b_2$$

Condiciones $P_2(9) = f(9) \rightarrow c_2 = \frac{1}{100}$

$$P_2'(9) = f'(9) \rightarrow b_2 = -\frac{1}{500}$$

$$P_2(4) = f(4) \rightarrow a_2(-5)^2 + b_2(-5) + c_2 = \frac{1}{25} \rightarrow a_2 = \frac{1}{1250}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{1250}(x - 9)^2 - \frac{1}{500}(x - 9) + \frac{1}{100} = \frac{1}{1250}x^2 - \frac{41}{2500}x + \frac{58}{625} \approx 0.0008x^2 - 0.0164x + 0.0928$$

Primer intervalo [0,4]:

$$P_1(x) = a_1(x - 4)^2 + b_1(x - 4) + c_1 \quad P_1'(x) = 2a_1(x - 4) + b_1$$

Condiciones $P_1(4) = f(4) \rightarrow c_1 = \frac{1}{25}$

$$P_1'(4) = P_2'(4) \rightarrow b_1 = -\frac{1}{100}$$

$$P_1(0) = f(0) \rightarrow a_1 4^2 - b_1 4 + c_1 = 1 \rightarrow a_1 = \frac{23}{400}$$

$$P_1(x) = \frac{23}{400}(x - 4)^2 - \frac{1}{100}(x - 4) + \frac{1}{25} = \frac{23}{400}x^2 - \frac{47}{100}x + 1$$

En resumen, los polinomios de interpolación vienen dados por

Intervalo	Polinomio
[0,4]	$P_1(x) = \frac{23}{400}(x - 4)^2 - \frac{1}{100}(x - 4) + \frac{1}{25} = \frac{23}{400}x^2 - \frac{47}{100}x + 1 \approx 0.0575x^2 - 0.4700x + 1$
[4,9]	$P_2(x) = \frac{1}{1250}(x - 9)^2 - \frac{1}{500}(x - 9) + \frac{1}{100} = \frac{1}{1250}x^2 - \frac{41}{2500}x + \frac{58}{625} \approx 0.0008x^2 - 0.0164x + 0.0928$

Puesto que el punto $x=5$ pertenece al segundo intervalo, se tomará el polinomio definido en él

$$P_2(5) = \frac{1}{1250}(5 - 9)^2 - \frac{1}{500}(5 - 9) + \frac{1}{100} = \frac{77}{2500} \approx 0.0308$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 29 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Resolución alternativa 1

Igual que en el caso anterior, pero tomando como referencia el extremo izquierdo.

Segundo intervalo [4,9]:

$$P_2(x) = a_2(x-4)^2 + b_2(x-4) + c_2 \quad P_2'(x) = 2a_2(x-4) + b_2$$

Condiciones $P_2(4) = f(4) \rightarrow c_2 = \frac{1}{25}$

$$\left. \begin{aligned} P_2(9) = f(9) &\rightarrow a_2 \cdot 5^2 + b_2 \cdot 5 + c_2 = \frac{1}{100} \\ P_2'(9) = -\frac{1}{500} &\rightarrow 2a_2 \cdot 5 + b_2 = -\frac{1}{500} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} b_2 = -\frac{1}{100} \\ a_2 = \frac{1}{1250} \end{cases}$$

Primer intervalo [0,4]:

$$P_1(x) = a_1(x-0)^2 + b_1(x-0) + c_1 \quad P_1'(x) = 2a_1(x-0) + b_1$$

Condiciones $P_1(0) = f(0) \rightarrow c_1 = 1$

$$\left. \begin{aligned} P_1(4) = f(4) &\rightarrow a_1 \cdot 4^2 + b_1 \cdot 4 + c_1 = \frac{1}{25} \\ P_1'(4) = P_2'(4) &\rightarrow 2a_1 \cdot 4 + b_1 = -\frac{1}{100} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} b_1 = -\frac{47}{100} \\ a_1 = \frac{23}{400} \end{cases}$$

Los polinomios de interpolación vienen dados por

Intervalo	Polinomio
[0,4]	$P_1(x) = \frac{23}{400}(x-0)^2 - \frac{47}{100}(x-0) + 1 \approx 0.0575x^2 - 0.4700x + 1$
[4,9]	$P_2(x) = \frac{1}{1250}(x-4)^2 - \frac{1}{100}(x-4) + \frac{1}{25} = \frac{1}{1250}x^2 - \frac{41}{2500}x + \frac{58}{625}$ $\approx 0.0008x^2 - 0.0164x + 0.0928$

Puesto que el punto $x=5$ pertenece al segundo intervalo, se tomará el polinomio definido en él

$$P_2(5) = \frac{1}{1250}(5-4)^2 - \frac{1}{100}(5-4) + \frac{1}{25} = \frac{77}{2500} \approx 0.0308$$

Resolución alternativa 2

Recordando la teoría, y planteando el sistema lineal a que daba lugar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{25} \\ -\frac{3}{250} \\ -\frac{1}{500} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} b_1 = -\frac{12}{25} - b_2 \rightarrow b_1 = -\frac{47}{100} \\ b_2 = -\frac{3}{250} - b_3 \rightarrow b_2 = -\frac{1}{100} \\ b_3 = -\frac{1}{500} \end{cases}$$

Ahora se pueden recuperar el resto de los coeficientes utilizando las relaciones

$$k = 1, 2, \dots, n \quad a_k = \frac{b_{k+1} - b_k}{2(x_k - x_{k-1})} = \frac{b_{k+1} - b_k}{2h_k} \rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{b_2 - b_1}{2(x_2 - x_1)} = \frac{23}{400} \approx 0.0575 \\ a_2 = \frac{b_3 - b_2}{2(x_3 - x_2)} = \frac{1}{1250} \approx 0.0008 \end{cases}$$

$$c_k = f(x_{k-1}) \rightarrow \begin{cases} c_1 = f(0) = 1 \\ c_2 = f(4) = \frac{1}{25} \approx 0.04 \end{cases}$$

Obteniéndose los mismos polinomios de interpolación que en el caso anterior

Intervalo	Polinomio
-----------	-----------

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Cálculo Numérico	Página 30 de 30
	Tema	Interpolación (Polinómica y segmentaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{aligned}
[0,4] \quad P_1(x) &= \frac{23}{400}(x-0)^2 - \frac{47}{100}(x-0) + 1 \approx 0.0575x^2 - 0.4700x + 1 \\
[4,9] \quad P_2(x) &= \frac{1}{1250}(x-4)^2 - \frac{1}{100}(x-4) + \frac{1}{25} = \frac{1}{1250}x^2 - \frac{41}{2500}x + \frac{58}{625} \\
&\approx 0.0008x^2 - 0.0164x + 0.0928
\end{aligned}$$

2/