

Alumna: Sonia Lecina Rodríguez, DNI: 53404197Z

Asignatura: Métodos Matemáticos.

Profesor: D. Juan Perán Mazón.

- Trabajo a desarrollar: Estudio del modelo matemático del sistema *fitoplancton-zooplancton* para una región costera antártica, siendo este modelo del tipo “depredador-presa”.

1.- Planteamiento de problema

Muchos problemas planteados en *Biología* crean la necesidad de descubrir nuevas teorías matemáticas, o de potenciar y desarrollar las ya existentes. Recíprocamente, el tremendo desarrollo de la investigación básica en *Matemáticas* hace posible el estudio de problemas cada vez más complejos de la *Biología*.

Hace poco tiempo leí un artículo sobre la dinámica del sistema planctónico en la costa antártica, donde desarrollaban un modelo matemático para el sistema “*fitoplancton* (se alimenta por si mismo) - *zooplancton* (se alimenta de *fitoplancton*)” considerando como principal variable forzante a la mezcla vertical y estudiando su efecto, donde se demuestra que el sistema es estable sólo por el efecto compensatorio de la mezcla vertical que resuspende algas, utilizando para ello las siguientes ecuaciones de *Lotka-Volterra*,

$$\frac{dA}{dt} = A \cdot P_m \cdot \tanh\left(\frac{\alpha \cdot I}{P_m}\right) - R \cdot A - (c - b \cdot Z_m) \cdot A - A \cdot H \cdot q$$
$$\frac{dH}{dt} = -\mu \cdot H + q \cdot H \cdot A \cdot e_T$$

donde A representa la densidad de las algas y H la densidad de los consumidores, siendo los parámetros P_m la tasa máxima de fotosíntesis, I la intensidad de la luz, R la tasa de respiración, Z_m la profundidad de la mezcla, q un factor de eficiencia de la depredación, e_T el factor de eficiencia de asimilación del zooplancton, μ la tasa intrínseca de crecimiento del zooplancton. La función $c - b \cdot Z_m$ representa la suspensión de algas (hundimiento).

Este artículo me resultó muy interesante, y teniendo en cuenta la cantidad de aplicaciones que tienen los métodos matemáticos en el campo de la ingeniería ambiental, donde trabajan, en abundantes casos, con ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales para modelar diferentes problemas, me he decantado por el estudio del modelo “depredador-presa”. Aparte de lo anterior, este tema me llamó la atención al estudiar la asignatura, pues he podido apreciar muy claramente una importante aplicación de los métodos matemáticos a la ciencia.

El matemático italiano *Volterra*, en el año 1926, después de haberse interesado por la ecología matemática y haber sido estimulado por su amigo zoólogo *Humberto D’Ancona*, estudio los registros de las pesquerías del Mar Adriático Superior y observó que, durante y después de la 2ª Guerra Mundial, cuando la pesca había disminuido drásticamente, la proporción de los depredadores había aumentado.

La pregunta clave para el científico fue: ¿por qué una disminución de la intensidad de la pesca provoca un aumento en la población de los peces depredadores, y es, por tanto, más beneficioso para estos que para las presas?

Este hecho le llevó a estudiar ese problema de una manera más general llegando a las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dY}{dX} = a \cdot Y(X) - b \cdot Y(X) \cdot Z(X) \Leftrightarrow \frac{dZ}{dX} = -c \cdot Z(X) + d \cdot Y(X) \cdot Z(X)$$

donde Y y Z son el número de presas y depredadores, respectivamente, X representa el tiempo; los parámetros constantes a y c representan la razón de nacimiento y muerte de las dos especies; mientras que b mide la susceptibilidad de la especie presa a la depredación y d mide la habilidad de depredación de esta especie. Las constantes b y d son la proporción de encuentros perjudiciales para las presas y la correspondiente de encuentros benéficos para los depredadores, respectivamente.

Para estudiar el sistema *fitoplancton-zooplancton* se requiere conocer los parámetros concretos aplicables al caso de estudio, y para calcular exactamente esos parámetros necesitaría tomar muestras para poder hallar las medias y hacer la estimaciones oportunas, cosa que me es imposible, por lo que voy a realizar el estudio con los parámetros que recomienda el libro, siendo:

$a = P_m \cdot \tanh\left(\frac{\alpha \cdot I}{P_m}\right) - R - (c - b \cdot Z_m)$	$b = q$	$c = \mu$	$d = q \cdot e_T$
--	---------	-----------	-------------------

llamando Y a la densidad de las algas (A) e Z a la densidad de los consumidores (H).

En este trabajo voy a llevar a cabo el estudio del modelo “depredador-presa” integrando las ecuaciones anteriores de *Lotka-Volterra* con el método de *Euler* y el método de *Euler mejorado*. Al analizar el resultado obtenido, integro con otro método más exacto, el esquema de *Runge-Kutta de 4º orden* de doble precisión implementando los algoritmos con el programa *Excel*. Luego obtendré interesantes cambios en los resultados al variar las condiciones iniciales, los valores de los parámetros y el tamaño de paso. Para finalizar modificaré las ecuaciones de Lotka-Volterra acercándome más a la realidad y analizando los resultados.

Adjunto los algoritmos programados en Excel de los distintos casos.

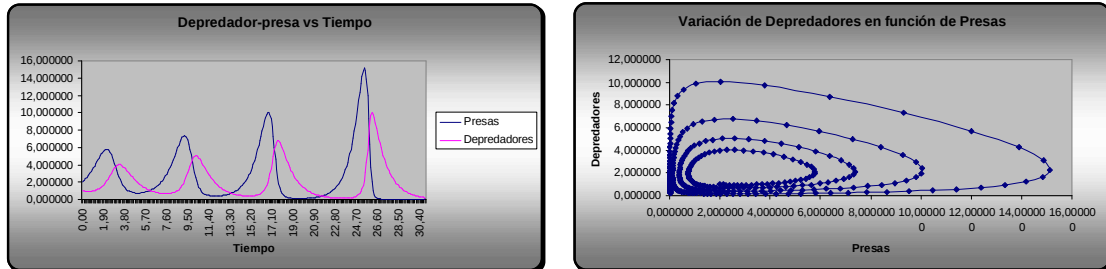
2.- Análisis del problema

2.1.-Análisis el problema con el método de Euler: Ecuaciones de Lotka-Volterra:

$\frac{dY}{dX} = a \cdot Y(X) - b \cdot Y(X) \cdot Z(X)$ $\frac{dZ}{dX} = -c \cdot Z(X) + d \cdot Y(X) \cdot Z(X)$	$Y_{n+1} = Y_n + h \cdot k_1 ; Z_{n+1} = Z_n + h \cdot l_1$ $k_1 = f(X_n, Y_n, Z_n) ; l_1 = g(X_n, Y_n, Z_n)$
--	---

donde los parámetros recomendados por el libro a , b , c y d son 1.2, 0.6, 0.8 y 0.3, respectivamente. Tomo como valores iniciales $Y(0) = 2$ y $Z(0) = 1$.

Observando las gráficas y variando el tamaño de paso h , obtengo un sistema que no es estable, llegando a la extinción:



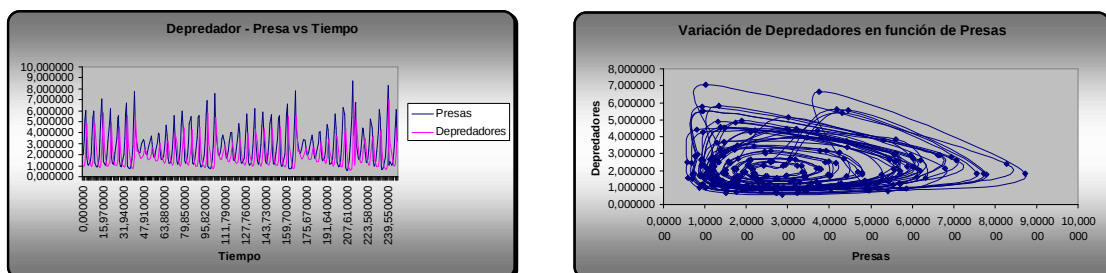
Este resultado no es el esperado debido a los errores de truncamiento que va arrastrando este método, entre otros.

2.2.- Análisis del problema con el método de Euler Modificado

Ecuaciones de Lotka-Volterra, algoritmo de Euler Modificado:

$\frac{dY}{dX} = a \cdot Y(X) - b \cdot Y(X) \cdot Z(X)$ $\frac{dZ}{dX} = -c \cdot Z(X) + d \cdot Y(X) \cdot Z(X)$	$Y_{n+1} = Y_n + h \cdot k_2$ $Z_{n+1} = Z_n + h \cdot l_2$ $k_1 = f(X_n, Y_n, Z_n)$ $l_1 = g(X_n, Y_n, Z_n)$ $k_2 = f(X_n + h/2, Y_n + h/2 \cdot k_1, Z_n + h/2 \cdot l_1)$ $l_2 = g(X_n + h/2, Y_n + h/2 \cdot k_1, Z_n + h/2 \cdot l_1)$
--	---

donde los parámetros recomendados por el libro a , b , c y d son 1.2, 0.6, 0.8 y 0.3, respectivamente. Tomo como valores iniciales $Y(0) = 2$ y $Z(0) = 1$.



Observando las gráficas, al ir modificando el tamaño de paso h , tengo un sistema donde el resultado se parece más al esperado, pero donde se siguen arrastrando demasiados errores. La gráfica va oscilando pero no tiene un mismo período. Se observa que tiende a ser estable, por lo que, como el libro indica, voy a realizar el estudio con el método de RK de 4º orden de doble precisión, que será mucho más exacto al disminuir los errores de cálculo.

2.3- Elección del modelo matemático para el análisis definitivo del problema

Voy a analizar el problema con el método de Runge-Kutta de 4º orden de doble precisión con las ecuaciones de Lotka-Volterra.

Ecuaciones de Lotka-Volterra, algoritmo RK de 4º orden de doble precisión:

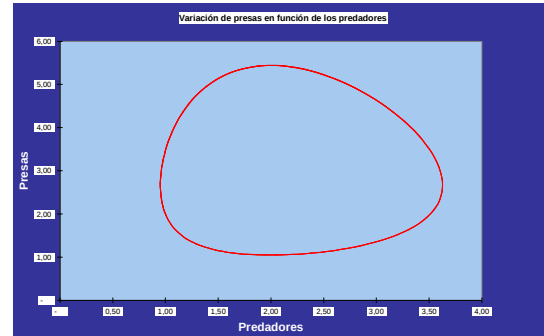
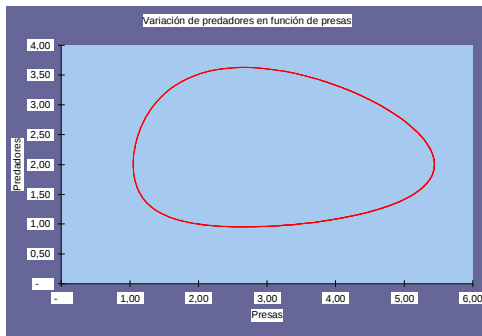
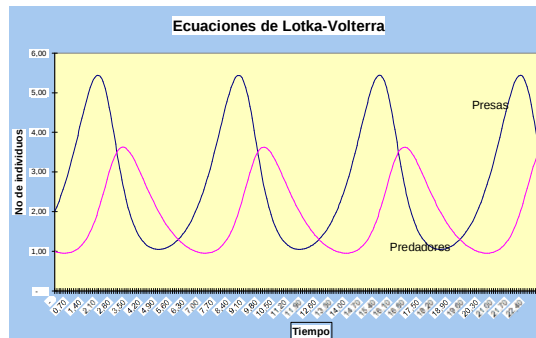
$\frac{dY}{dX} = a \cdot Y(X) - b \cdot Y(X) \cdot Z(X)$ $\frac{dZ}{dX} = -c \cdot Z(X) + d \cdot Y(X) \cdot Z(X)$	$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \cdot h$ $Z_{n+1} = Z_n + \frac{1}{6} \cdot (l_1 + 2 \cdot l_2 + 2 \cdot l_3 + l_4) \cdot h$ $k_1 = f(X_n, Y_n, Z_n)$ $l_1 = g(X_n, Y_n, Z_n)$ $k_2 = f\left(X_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h, Z_n + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot h\right)$ $l_2 = g\left(X_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot h, Z_n + \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot h\right)$ $k_3 = f\left(X_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot h, Z_n + \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot h\right)$ $l_3 = g\left(X_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot h, Z_n + \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot h\right)$ $k_4 = f(X_n + h, Y_n + k_3 \cdot h, Z_n + l_3 \cdot h)$ $l_4 = g(X_n + h, Y_n + k_3 \cdot h, Z_n + l_3 \cdot h)$
--	---

donde los parámetros recomendados por el libro a , b , c y d son 1.2, 0.6, 0.8 y 0.3, respectivamente.

3.- Obtención de la solución aproximada

3.1.- Primera integración:

Los parámetros a , b , c y d son los anteriores recomendados por el libro, $a = 1.2$, $b = 0.6$, $c = 0.8$ y $d = 0.3$, el tamaño de paso es $h = 0.1$, las condiciones iniciales son $Y = 2$, $Z = 1$ en un tiempo de $X = 0$, integrando desde $X = 0$ hasta 30, siendo el resultado:



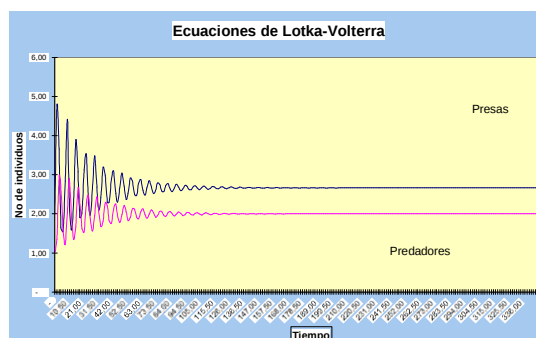
El sistema es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, y tiene diferentes tipos de soluciones, dependiendo de la situación inicial de la que se parte $Y(0)$, $Z(0)$. Obviamente, debido a la interpretación biológica de este sistema, sólo estamos interesados en aquellas soluciones $Y(t)$ y $Z(t)$ con ambas componentes no negativas para cualquier tiempo $X \geq 0$.

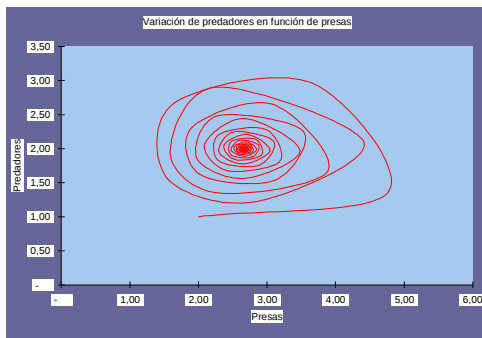
En esta interacción presa-depredador descrita en las ecuaciones anteriores, podemos observar que el tamaño de la especie presa y el de la especie depredadora, cambian periódicamente al aumentar el tiempo donde parece apreciarse que el cambio de los tamaños poblacionales de ambas especies son periódicos y el período sólo depende de a , b , c y d y del tamaño inicial de las dos especies. Se aprecia también un desfase entre los máximos y mínimos de las gráficas de los dos.

Veamos que pasa si aumentamos el tamaño de paso.

3.2.- Segunda integración donde $h = 1.5$:

Mantengo los valores de los parámetros y de las condiciones iniciales anteriores pero aumento el tamaño de paso a $h = 1.5$, siendo el resultado:





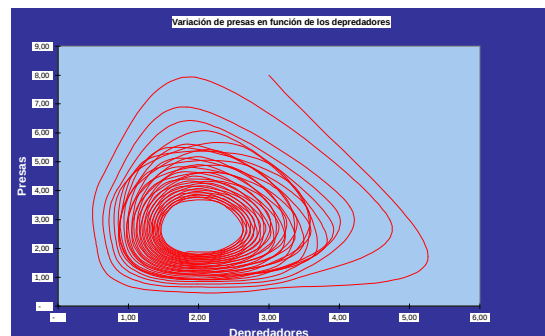
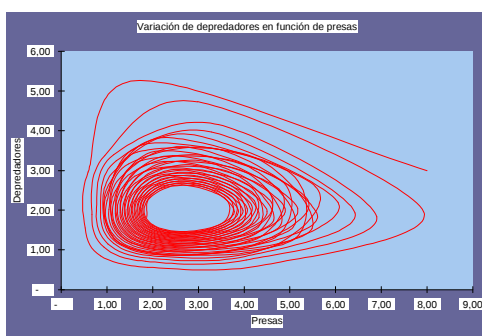
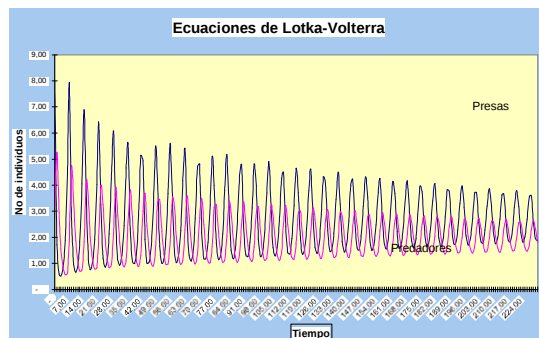
Como se esperaba y se puede observar al aumentar el paso, las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son periódicas, con el mismo período pero con distinta fase, y todas las curvas $Y-Z$ son cerradas alrededor de un punto de equilibrio. Este punto estacionario del sistema se encuentra cuando

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0, \quad \text{y como vemos en los gráficos es cuando}$$

$$(x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right) = \left(\frac{0,8}{0,3}, \frac{1,2}{0,6} \right) = (2.67, 2) \text{ que es el punto de estabilidad que se observa.}$$

3.3.- Tercera integración: cambio de condiciones iniciales

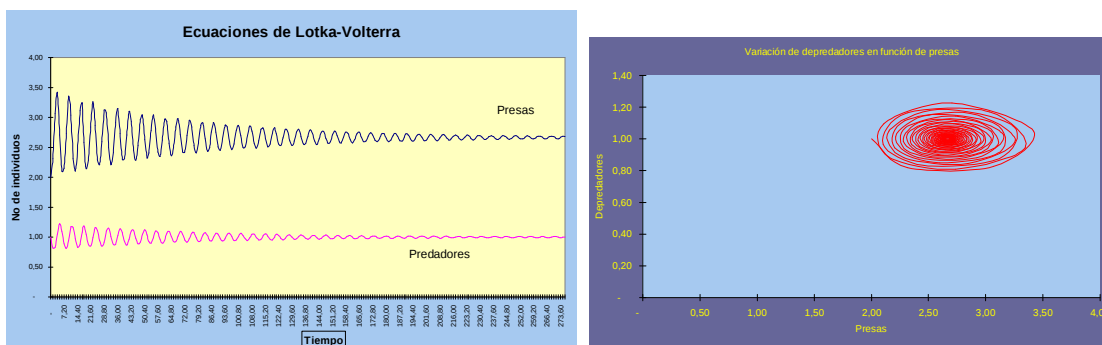
Ahora vamos a ver que ocurre si cambiamos las condiciones iniciales a $Y(0) = 8$ y $Z(0) = 3$:



Observamos que el valor promedio de $Y(t)$ es a/b y el de $Z(t)$ c/d . En consecuencia no importa como de grandes sean las poblaciones iniciales de las dos especies ni importa como sean las variaciones, el promedio en las poblaciones es siempre el mismo.

3.4.- Cambio de los parámetros

Ahora vamos a ver que ocurre al cambiar los parámetros del sistema aumentando, por ejemplo, la eficiencia de captura $b = 2$ y aumentando el paso.



Pues bien, ocurre lo que esperaba, aunque varíe algún parámetro, manteniendo constantes los demás, observamos que los valores promedios de $Y(t)$ y de $Z(t)$ siguen siendo a/b y c/d , respectivamente. En consecuencia no importa que varíen los parámetros, el promedio en las poblaciones es siempre el mismo.

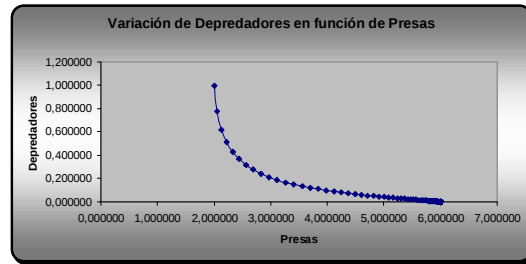
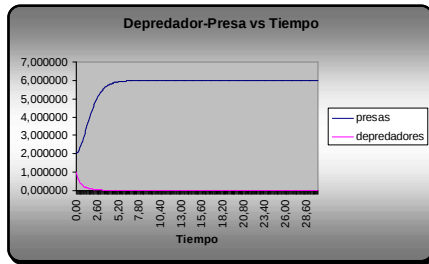
4.- Mejoras que pueden obtenerse.

La ventaja más singular del modelo de Lotka-Volterra es su simplicidad. No obstante esta simplicidad extrema se obtiene efectuando un elevado número de simplificaciones de la realidad y omitiendo muchas características de los procesos de poblaciones reales. Por ejemplo, no se han tenido en cuenta la variación del clima, las relaciones con otras especies, la presencia del ser humano, y otros factores muy importantes, que harían cambiar estos parámetros llevando a la solución esperada de estabilidad, y así a la conservación de la naturaleza. Es necesario saber hasta que grado tales omisiones son válidas, y para ello se incluirán modificaciones a este modelo en busca de un mayor realismo.

Por ejemplo, si en la elaboración de modelo básico se tiene en cuenta que las presas compiten entre ellas por su alimento (debido a que este es limitado) y que los depredadores también compiten entre ellos, debido al número limitado de presas, el modelo que surge es de la forma:

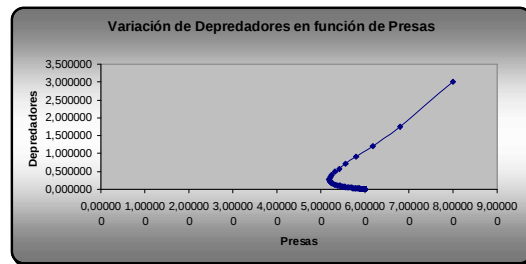
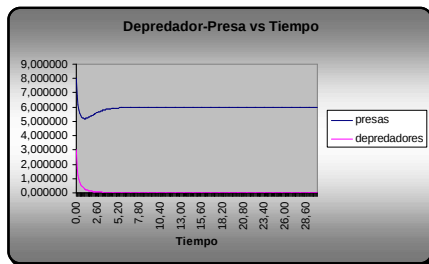
$$\frac{dY}{dX} = a \cdot Y(X) - b \cdot Y(X) \cdot Z(X) - e \cdot Y^2(X) \Leftrightarrow \frac{dZ}{dX} = -c \cdot Z(X) + d \cdot Y(X) \cdot Z(X) - f \cdot Z^2(X)$$

donde e y f son constantes positivas que reflejan, respectivamente, la intensidad de las competiciones mencionadas. Hago un análisis del modelo anterior realizando el algoritmo con Excel y obtengo, para los valores de los parámetros $a = 1.2$, $b = 0.6$, $c = 0.8$, $d = 0.3$, $e = 0.2$ y $f = 2$, tamaño de paso $h = 0.1$, condiciones iniciales $Y(0) = 2$, $Z(0) = 1$, las siguientes gráficas:



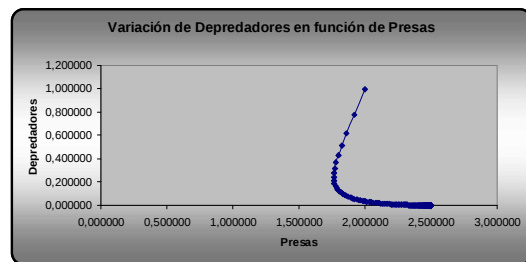
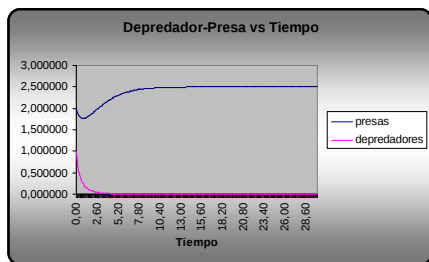
Podemos observar que la solución tiende a la solución de equilibrio $(a/e, 0) = (6,0)$, es decir, que los depredadores tienden a extinguirse cuando el tiempo crece indefinidamente, y las presas tienen a una población constante.

Veamos que ocurre si cambiamos las condiciones iniciales a $Y(0) = 8, Z(0) = 3$:



Sigue pasando lo mismo, la solución es $(6,0)$.

Analicemos ahora que pasará si cambiamos los parámetros, por ejemplo, $a = 0,5$ y las demás constantes permanecen igual, entonces obtenemos:



Vemos que ocurre exactamente lo mismo, la solución es $(a/e, 0) = (0.5/0.2, 0) = (2.5, 0)$, es decir, que el cambio de los parámetros tampoco influye en el resultado final.

Con todo lo anterior, llego a la conclusión de que para aplicar el modelo “depredador-presa” a la realidad, es necesario ser muy minuciosos al calcular los parámetros para cada caso en concreto y sus valores, e intentar hacer las menos simplificaciones posibles. También decir, que este estudio me ha llevado a entender los métodos numéricos desde una perspectiva diferente, en las aplicaciones a las necesidades del hombre y a sus estudios en la ciencia.