 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 1 de 6
	Tema	Avance de EDPs Resolución de ejemplos simples	
	Práctica	6.2	
	Autor	César Menéndez Fernández	

1 Resolución de ejemplos simples

Se va a utilizar MATLAB para resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales asociadas a problemas bidimensionales simplificados que surgen en Ingeniería mediante el método de los elementos finitos. Se pueden ver varios ejemplos generales mediante *pdedemos*. Los pasos necesarios para aplicar este método son, una vez activada la herramienta de PDE de MATLAB mediante la instrucción *pdetool*

1. Definición del tipo de problema y otras características generales (Options)
2. Definición de la geometría (Draw)
3. Imposición de las condiciones de contorno (Boundary)
4. Definición de las características de los materiales (PDE)
5. Mallado (Mesh)
6. Resolución (Solve)
7. Visualización de resultados (Plot)

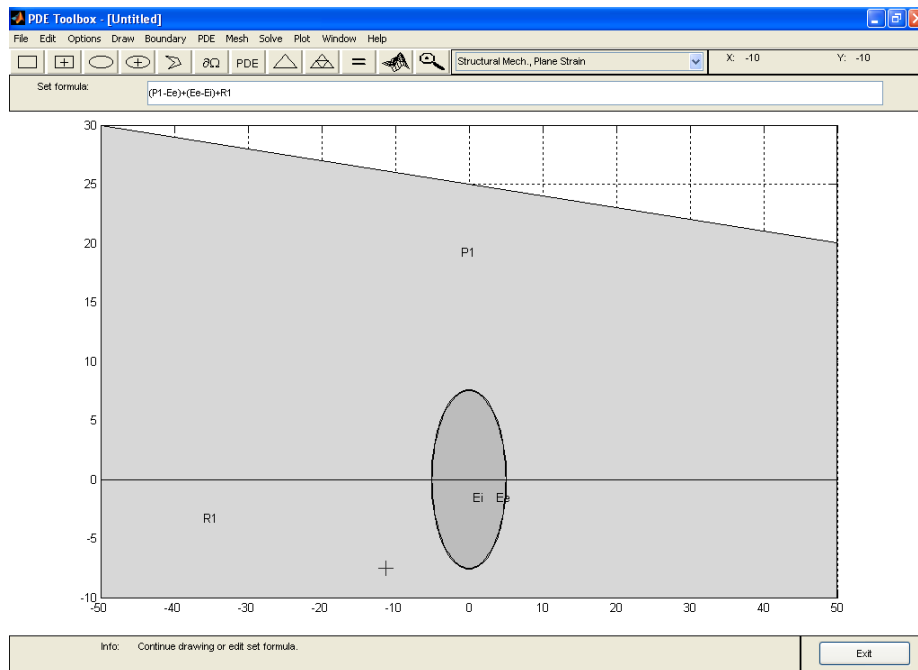
1.1 Elasticidad

Comenzaremos resolviendo un problema consistente en el cálculo de tensiones en un túnel perforado en una colina. La diferencia de altura de la colina respecto a la base del túnel a 50 metros a la izquierda y la derecha es de 30m y 20m respectivamente. El túnel tiene 10m de ancho y una altura de 7.5m, siendo de forma elíptica. Se considera que el material de la colina es homogéneo y está constituido por roca. Como material portante, esta recubierto por una estructura de acero de 10 cm.

Material	Módulo de Elasticidad (Pa)	Coeficiente de Poisson	Densidad (Kg/m ³)
Arenisca	3×10^{10}	0.27	2500
Basalto	9×10^{10}	0.25	2900
Acero	2×10^{11}	0.29	7800

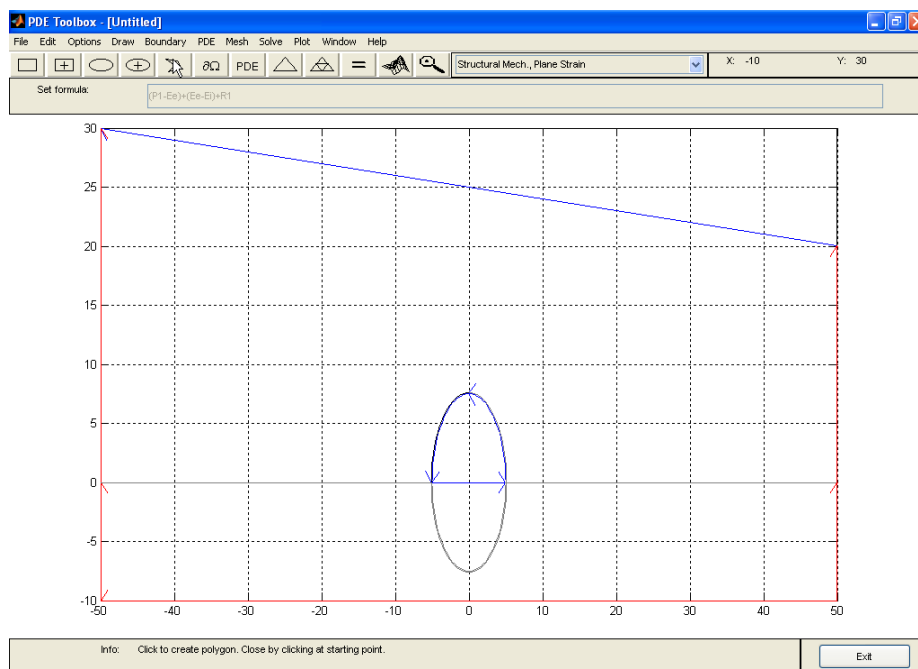
Pasos:

1. Options: Application (Plane Strain), Axis Limits([-50,50],[-10,30]), Grid, Snap
2. Draw: dibujar el rectángulo inferior (R1), trapecio superior (P1), elipse interna (Ei) y externa (Ee). Definir el volumen como: $(P1 - Ee) + (Ee - Ei) + R1$



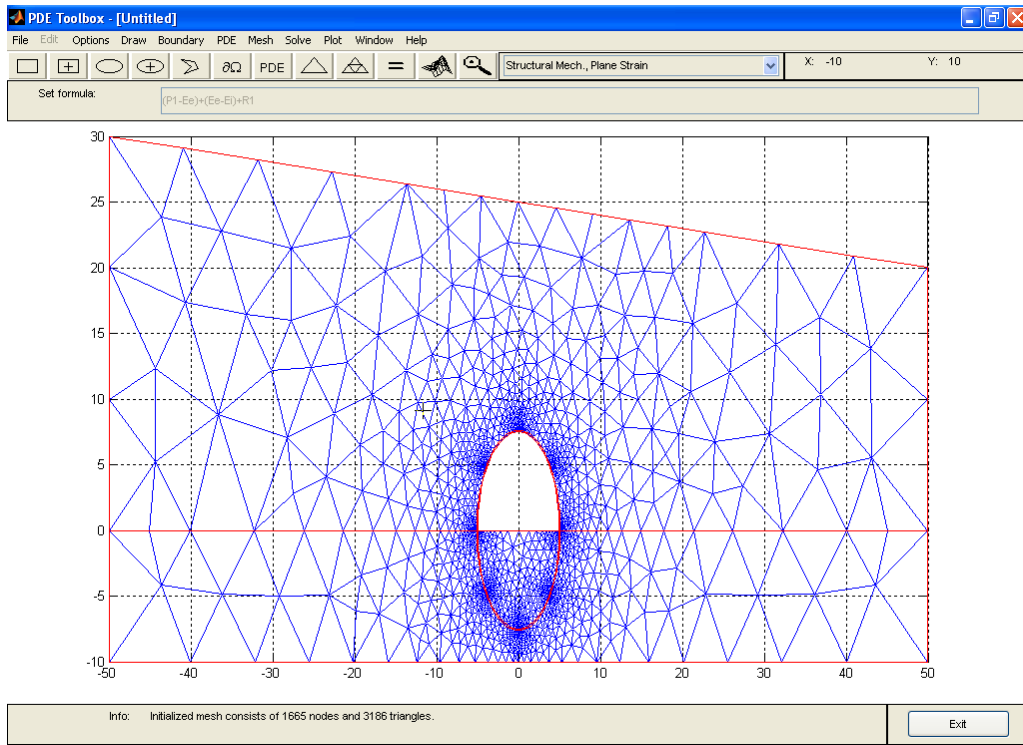
3. Boundary: Se imponen condiciones de desplazamientos horizontales nulos en ambos lados y todos nulos en la base (Dirichlet). Para el túnel y la superficie de la colina se impone la no existencia de fuerzas (Neumann). Hay que tener en cuenta que tanto desplazamientos como fuerzas vienen representados matricialmente mediante:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$$



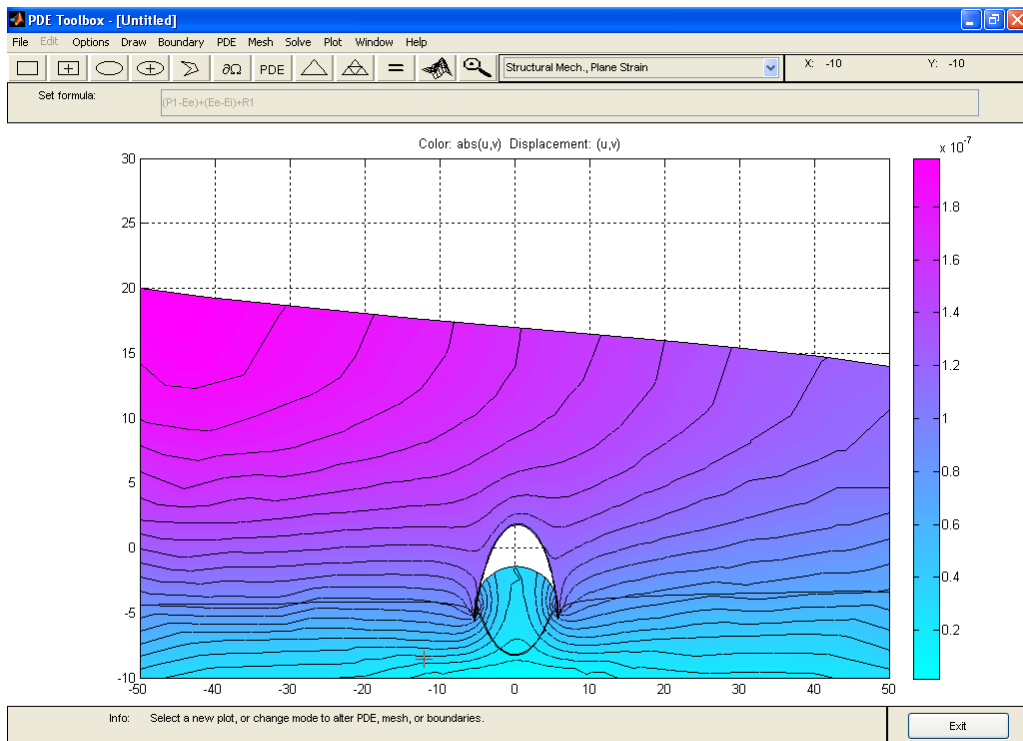
4. PDE: Asignamos la arenisca a los dominios 1,2,3 y 4, y acero al dominio 5. Resolvemos el problema elíptico (en régimen permanente) y no el de eigenmodes (frecuencias propias de resonancia). Será necesario hacer un zoom (options) para realizar la asignación de los sectores circulares. Se debe incluir el peso propio (fuerza volumétrica de $-g$ en el eje y).

5. Mesh: se realiza automáticamente. No es necesario hacer un afinado de la malla.



6. Solve: se realiza automáticamente

7. Plot: modificamos los parametros para representar el módulo de la deformación $\text{abs}(u,v)$, el contorno y la malla deformada.

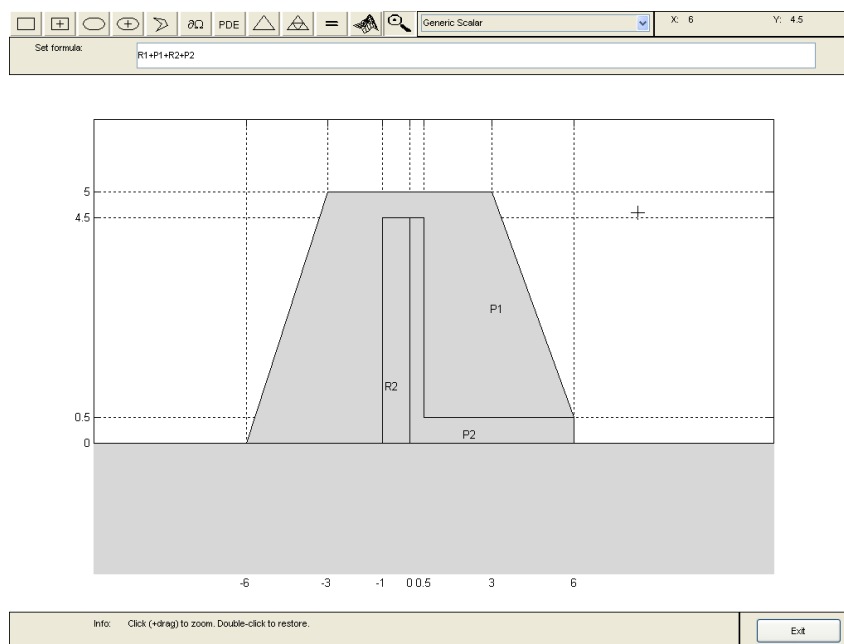


1.2 Flujos en medios porosos

A continuación se resuelve un ejemplo de flujo a través de medios porosos bajo una presa de tierra compactada con núcleo central de hormigón y drenaje. Las características de los materiales vienen dadas en la siguiente tabla

Material	Permeabilidad (k)	Coeficiente de almacenamiento (S)
Hormigón	2×10^{-10}	1×10^{-6}
Arena	4×10^{-3}	30×10^{-3}
Tierra compactada	2×10^{-6}	1×10^{-3}
Suelo	4×10^{-6}	2×10^{-3}

La geometría y dimensiones de la presa se muestran en la siguiente imagen.



Para resolver el problema se tomará el de transferencia de calor en un sólido con densidad ρ y calor específico c_p constantes, ya que ambos problemas generan el mismo tipo de ecuaciones (Poisson).

Ecuación del calor
$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} - \nabla \cdot (\vec{k} \nabla T) = \dot{q}$$

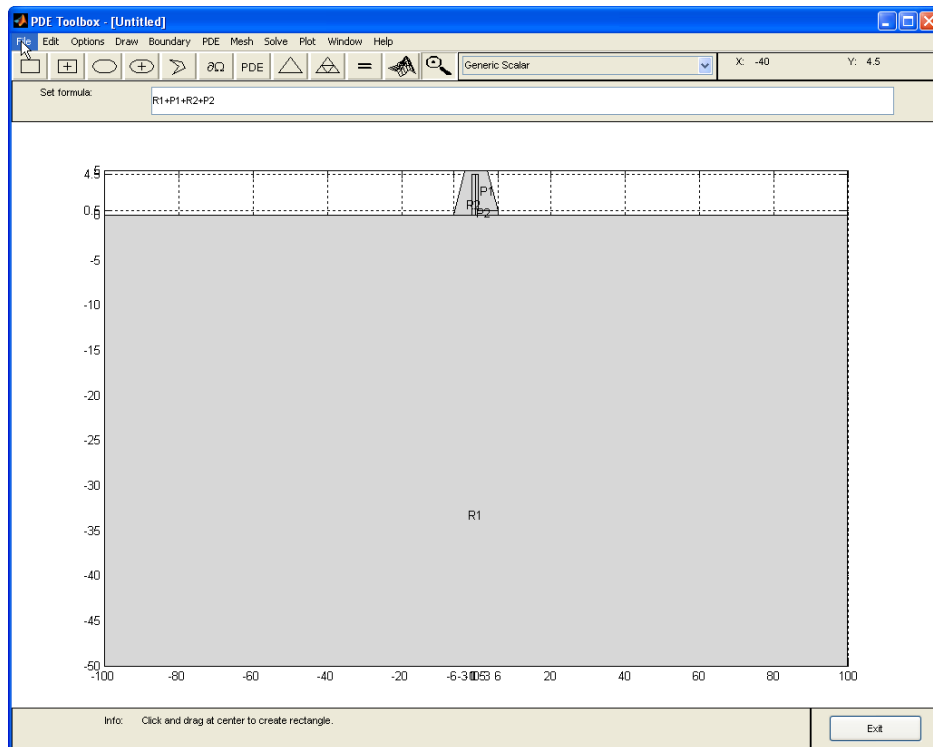
donde τ es el tiempo, $\vec{k}$ la conductividad térmica, $\dot{q}$ las fuentes internas de calor y T la temperatura.

Flujo en medios porosos
$$S \frac{\partial h}{\partial \tau} - \nabla \cdot (\vec{k} \nabla h) = R$$

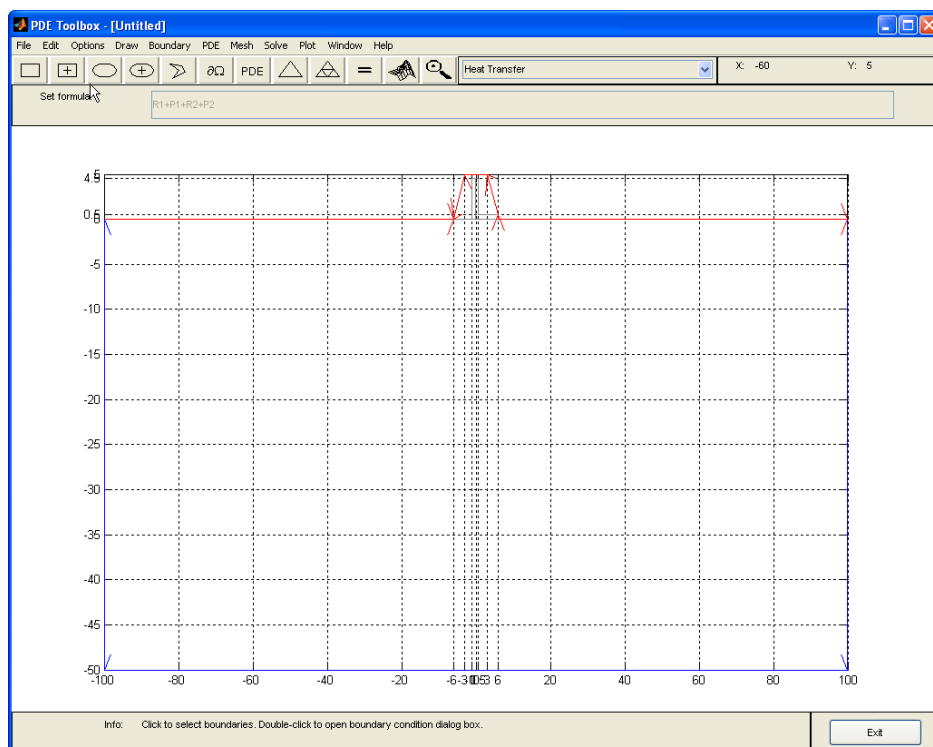
donde τ es el tiempo, S el coeficiente de almacenamiento, $\vec{k}$ la permeabilidad, R las fuentes o sumideros internos de calor y h la altura piezométrica.

Pasos:

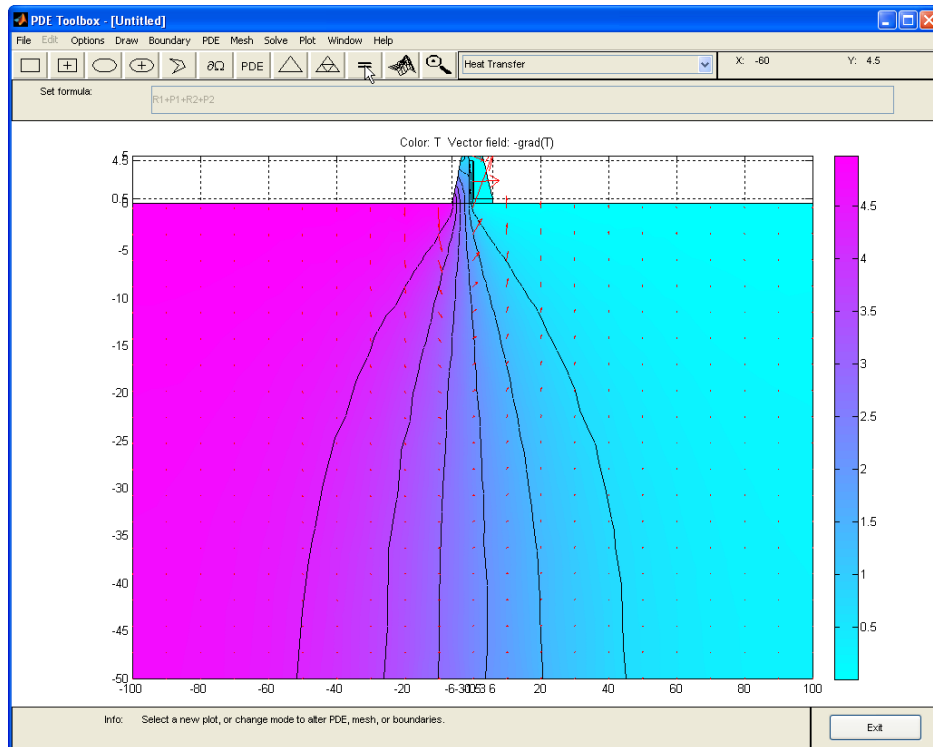
- Options: Application (Heat Transfer), Axis Limits([-100,100],[-50 5]), Grid, Snap, Grid Spacing-X grid extra ticks (-6,-3,-1,0.5,3,6), Y grid extra ticks (0.5,4.5).
- Draw: Definir ambos rectángulos y dos polilíneas



- Boundary: Se imponen condiciones de presión 5 a la izquierda de la presa y 0 a la derecha. El lateral izquierdo de la presa tiene una presión de $(5-y)$ y nula en el resto de los (Dirichlet). En los otros tres lados del terreno no hay flujo (Neumann).



4. PDE: Asignamos suelo (1), hormigón (2), arena (3) y tierra compactada (4). Consideramos el régimen permanente, eligiendo el problema elíptico. No hay fuerzas volumétricas ni coeficientes de película..
5. Mesh: se realiza automáticamente. No es necesario hacer un afinado de la malla.
6. Solve: se realiza automáticamente
7. Plot: modificamos los parametros para representar el módulo de la altura piezométrica, 6 isobaras y le dirección del flujo.



Esto ha permitido resolver el régimen permanente. La resolución del régimen transitorio exigiría (pero lleva tiempo):

1. Volver al paso 4 y seleccionar la opción de parabólico, lo que permite introducir el coeficiente de almacenamiento.
2. Afinar la malla para mejorar las condiciones de convergencia numérica.
3. Introducir en solve las condiciones iniciales (por defecto ya están en cero). Poner el tiempo entre 0 y 10000.