

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 1 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- La concentración de una bacteria contaminante C en un lago, tras un tratamiento de depuración, decrece de acuerdo a la ley $C = 80e^{-2t} + 20e^{-0.1t}$

- Selecciónese de forma justificada el método de intervalo más adecuado para determinar el tiempo requerido para que la población de bacterias se reduzca a 10. Realícense 3 iteraciones. {3 pts.}.
- Encontrar, si es posible, un intervalo y una función de punto fijo obtenida mediante despeje del tiempo en la ecuación inicial que cumpla las condiciones de punto fijo. Realice dos iteraciones tomando el punto $t=6$ como valor de partida y determine el número necesario de iteraciones para que el error sea menor que 1 segundo {4 pts.}.
- Verificar si existe algún intervalo en que se verifiquen las condiciones suficientes del método de Newton. Realizar dos iteraciones del mismo tomando el punto $t=6$ como valor de partida. {3 pts.}.

Apartado (a) Métodos de Intervalo

Se indica que el número de bacterias es fijo, por tanto la ecuación a resolver será $80e^{-2t} + 20e^{-0.1t} = 10$, esto es, $f(t) = 80e^{-2t} + 20e^{-0.1t} - 10 = 0$. Puesto que tengo exponenciales decrecientes y una constante, la función es continua, y su máximo valor se dará en el instante inicial ($f(0)=90$). Por otro lado, la función tiende a ser negativa (término constante) con el paso del tiempo. Al cumplirse las hipótesis del Teorema de Bolzano, se puede aplicar un método de intervalo.

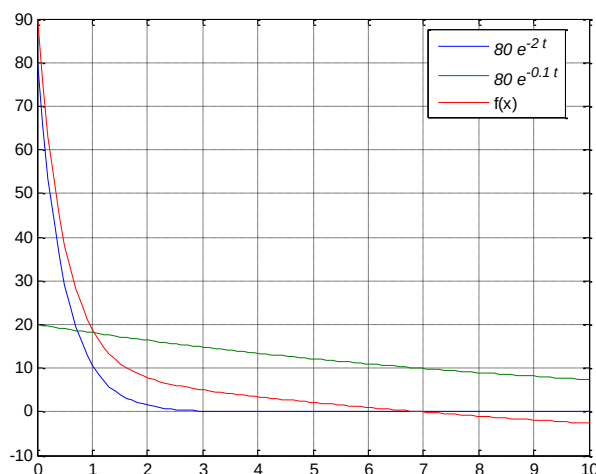


Imagen de $f(x)$ como composición de las funciones exponenciales decrecientes

Las exponenciales decrecientes son funciones cóncavas (su derivada segunda es positiva) y por tanto, al aplicar el método de Régula Falsi, su extremo izquierdo permanecerá fijo. Así pues, los métodos más adecuados serán los de Régula Falsi Modificada y Müller. El método de Müller será más rápido,

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 2 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

pero a costa de incrementar el número y complejidad de las operaciones, por lo que ambos son válidos. Realizamos iteraciones con ambos métodos y comparamos los resultados.

Régula Falsi Modificada

El método iterativo se genera aproximando la función mediante una recta, obteniéndose la sucesión

de aproximaciones a la raíz como $x_{n+1} = a_n - FA \frac{b_n - a_n}{FB - FA}$ donde

$$FA = \begin{cases} f(a_n) & \text{si } f(x_{n-1})f(x_n) > 0 \wedge f(x_n)f(a_n) < 0 \\ \frac{FA}{2} & \text{si } f(x_{n-1})f(x_n) > 0 \wedge f(x_n)f(a_n) > 0 \text{ y } FB = \frac{FB}{2} \\ f(a_n) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \begin{cases} f(b_n) & \text{si } f(x_{n-1})f(x_n) > 0 \wedge f(x_n)f(b_n) < 0 \\ \frac{FB}{2} & \text{si } f(x_{n-1})f(x_n) > 0 \wedge f(x_n)f(b_n) > 0 \\ f(b_n) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En la tabla se han destacado los puntos en que se media el valor de la función en un extremo por mantenerse el signo de la misma en dos iteraciones sucesivas.

Regula Falsi Modificada	Iter	a	f(a)	b	f(b)	x	f(x)
	1	0	90.0000	10.0000	-2.6424	9.7148	-2.4295
	2	0	90.0000	9.7148	-2.4295	9.4594	-2.2337
	3	0	45.0000	9.4594	-2.2337	9.0121	-1.8784
	4	0	22.5000	9.0121	-1.8784	8.3177	-1.2944
	5	0	11.2500	8.3177	-1.2944	7.4594	-0.5142
	6	0	5.6250	7.4594	-0.5142	6.8346	0.0974
	7	6.8346	0.0974	7.4594	-0.5142	6.9341	-0.0026
	8	6.8346	0.0974	6.9341	-0.0026	6.9316	-0.0000
	9	6.8346	0.0487	6.9316	-0.0000	6.9315	0.0000
	10	6.9315	0.0000	6.9316	-0.0000	6.9315	-0.0000

Müller

En este caso, la aproximación de la función se hace mediante un polinomio de segundo grado que pasa por tres puntos $\{a, b, m\}$. Se comienza calculando los coeficientes de la parábola

$\alpha_2(x-m)^2 + \alpha_1(x-m) + \alpha_0$ mediante el sistema

$$\begin{pmatrix} (a-m)^2 & a-m & 1 \\ (b-m)^2 & b-m & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \\ f(m) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = f(m) \\ \begin{pmatrix} (a-m)^2 & a-m \\ (b-m)^2 & b-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) - f(m) \\ f(b) - f(m) \end{pmatrix} \end{cases}, \text{ y por tanto}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases} \text{ con } \Delta = \begin{vmatrix} (a-m)^2 & a-m \\ (b-m)^2 & b-m \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} (a-m)^2 & f(a) - f(m) \\ (b-m)^2 & f(b) - f(m) \end{vmatrix} \text{ y } \Delta_2 = \begin{vmatrix} f(a) - f(m) & a-m \\ f(b) - f(m) & b-m \end{vmatrix}$$

Una vez obtenidos los coeficientes, se calculan los puntos de corte con el eje X utilizando la fórmula alternativa

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 3 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$r = m - \frac{2\alpha_0}{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}$$

y eligiendo el signo de la raíz de forma que el valor absoluto del denominador sea lo mayor posible. La raíz así calculada estará entre m y uno de los extremos a ó b ; si está entre m y a (respectivamente b), se sustituye b (respectivamente a) por m y m por r .

Comenzamos el algoritmo añadiendo a los dos extremos, el punto medio

$$m = \frac{b-a}{2} = 5 \rightarrow f(m) = 2.1342$$

La primera iteración parte pues de la terna $\{0,5,10\}$

$$\begin{pmatrix} (0-5)^2 & 0-5 & 1 \\ (10-5)^2 & 10-5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90.0000 \\ 2.6424 \\ 2.1342 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 1.6618 \\ \alpha_1 = -9.2642 \\ \alpha_2 = 2.1342 \end{cases}$$

$$r = 5 - \frac{2 \cdot 1.6618}{-9.2642 - \sqrt{9.2642^2 - 4 \cdot 1.6618 \cdot 2.1342}} = 5.2408 \rightarrow f(r) = 1.8443$$

La nueva terna para la segunda iteración será $\{5,5.2408,10\}$

$$\begin{pmatrix} (5-5.2408)^2 & 5-5.2408 & 1 \\ (10-5.2408)^2 & 10-5.2408 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1342 \\ 2.6424 \\ 5.2408 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 1.8443 \\ \alpha_1 = -1.1917 \\ \alpha_2 = 0.05232 \end{cases}$$

$$r = 5.2408 - \frac{2 \cdot 1.8443}{-1.1917 - \sqrt{1.1917^2 - 4 \cdot 0.05232 \cdot 1.8443}} = 6.9108 \rightarrow f(r) = 0.0208$$

Reiterando el proceso se obtienen los resultados mostrados en la siguiente tabla

	Iter	a	f(a)	m	f(m)	b	f(b)	r	f(r)
Müller	1	0	90.0000	5.0000	2.1342	10.0000	-2.6424	5.2408	1.8443
	2	5.0000	2.1342	5.2408	1.8443	10.0000	-2.6424	6.9108	0.0208
	3	5.2408	1.8443	6.9108	0.0208	10.0000	-2.6424	6.9314	0.0002
	4	6.9108	0.0208	6.9314	0.0002	10.0000	-2.6424	6.9315	0.0000

Tomando como criterio de parada que el error de la función o del intervalo fueran inferiores a 10^{-6} se tiene que el método de Müller finaliza un 30% antes que el de Regula Falsi Modificada.

Apartado (b) Métodos Iterativos

Debemos despejar el tiempo de la ecuación anterior para obtener una función de punto fijo. Despejando de la primera exponencial:

$$80e^{-2t} + 20e^{-0.1t} - 10 = 0 \rightarrow e^{-2t} = \frac{1-2e^{-0.1t}}{8} \rightarrow -2t = \ln\left(\frac{1-2e^{-0.1t}}{8}\right) \rightarrow t = \frac{-1}{2} \ln\left(\frac{1-2e^{-0.1t}}{8}\right) = g_1(t)$$

Despejando de la segunda exponencial, se llega a

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 4 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$80e^{-2t} + 20e^{-0.1t} - 10 = 0 \rightarrow e^{-0.1t} = \frac{1-8e^{-2t}}{2} \rightarrow -0.1t = \ln\left(\frac{1-8e^{-2t}}{2}\right) \rightarrow t = -10 \ln\left(\frac{1-8e^{-2t}}{2}\right) = g_2(t)$$

Comprobamos si alguna de estas funciones verifica las condiciones del Teorema de Punto Fijo:

Continuidad de $g(x)$ en un intervalo $[a,b]$

En ambas funciones aparece un logaritmo, que solo está definido para valores positivos. Por tanto

$$g_1(t): 1-2e^{-0.1t} > 0 \Rightarrow -0.1t < \ln \frac{1}{2} \rightarrow t > -10 \ln \frac{1}{2} \approx 6.9315$$

$$g_2(t): 1-8e^{-2t} > 0 \Rightarrow -2t < \ln \frac{1}{8} \rightarrow t > -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{8} \approx 1.0397$$

Mapeo de la función: $g(x) \in [a,b] \forall x \in [a,b]$

El argumento del logaritmo es una función positiva y creciente que comienza por valores próximos a cero y está acotada por $1/8$ y $1/2$ respectivamente. Así pues el logaritmo será asimismo una función creciente que comienza valores negativos muy altos y se va acercando a cero. Finalmente ambas funciones, debido al signo negativo, serán monótonas decrecientes y siempre positivas.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_1(t) = \frac{3}{2} \ln 2 \approx 1.0397; \quad g_1(6.9316) = 6.6720; \quad g_1(7) = 3.5330.$$

El margen para el mapeo es muy pequeño, por lo que estudiaremos primero la tercera condición antes de seguir reduciendo el intervalo.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_2(t) = 10 \ln 2 \approx 6.9315; \quad g_2(1.0398) = 94.4325; \quad g_2(2) = 8.5159; \quad g_2(10) = 6.9315.$$

En este caso la función se mapea en todo el intervalo $[1.04, \infty)$.

Contractividad de la función: $|g'(x)| < 1 \forall x \in [a,b]$

$$g'_1(t) = \frac{-1}{2} \frac{-0.1 \frac{-2}{8} e^{-0.1t}}{1-2e^{-0.1t}} = \frac{1}{10} \frac{-e^{-0.1t}}{1-2e^{-0.1t}} \quad g'_2(t) = -10 \frac{-2 \frac{-8}{2} e^{-2t}}{1-8e^{-2t}} = \frac{-160e^{-2t}}{1-8e^{-2t}}$$

que son funciones negativas y monótonas crecientes, acotadas por el valor nulo. Alcanzan por tanto su máximo, en valor absoluto, en el extremo izquierdo del intervalo.

Como $|g'_1(7)| = 7.2713$, no hay ningún intervalo para $g_1(x)$ que verifique las condiciones de punto fijo.

Por el contrario, aunque $|g'_2(2)| = 3.4336$, se tiene que $|g'_2(3)| = 0.4046$, y por tanto $g_2(x)$ verifica las condiciones del teorema en $[3, \infty)$. Realizamos dos iteraciones, a partir de $t=6$

$$t_0 = 6 \quad t_1 = g_2(t_0) = -10 \ln\left(\frac{1-8e^{-2 \cdot 6}}{2}\right) = 6.9320 \quad t_2 = g_2(t_1) = 6.9315 \quad t_3 = g_2(t_2) = 6.9315$$

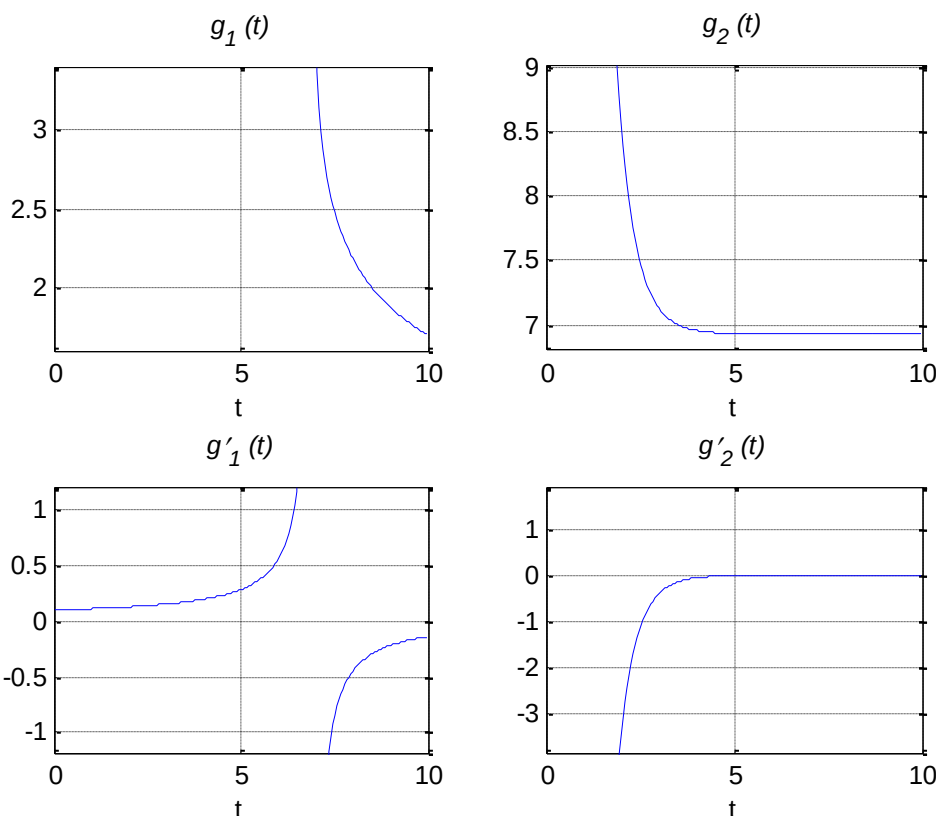
Se observa la rápida convergencia del método. Acotamos a continuación el número de iteraciones para garantizar un error menor que 1 segundo a partir de las cotas de error

$$|x - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \rightarrow \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| < 1 \Rightarrow |x - x_n| < 1$$

$$\frac{0.4046^n}{1-0.4046} |6.9320 - 6| < 1 \rightarrow n > \ln \frac{0.5954}{0.9320} = -0.4481$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 5 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Por tanto no hubiera sido necesario realizar ninguna iteración para obtener la precisión exigida



Representación de las funciones de punto fijo y sus derivadas. Se observa claramente que la primera no cumple las condiciones de punto fijo, mientras que la segunda converge muy rápidamente al ser su derivada prácticamente nula.

Apartado (c) Método de Newton

Si la función $f(t) = 80e^{-2t} + 20e^{-0.1t} - 10 = 0$ cumple las siguientes condiciones se puede asegurar la convergencia del método de Newton (son condiciones suficientes, pero no necesarias):

- | | |
|---|--|
| i). $f(x) \in C^2[a, b]$ | ✓ Cierto al ser combinación de exponenciales |
| ii). $f(a) \cdot f(b) < 0$ | ✓ $f(0) = 90$ y $f(10) = -2.6424$ |
| iii). $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ | ✓ $f'(t) = -160e^{-2t} - 2e^{-0.1t} < 0 \forall t \in [0, 10]$ |
| iv). $\forall x \in [a, b]: f''(x) \geq 0 \vee f''(x) \leq 0$ | ✓ $f''(t) = +320e^{-2t} + 0.2e^{-0.1t} > 0 \forall t \in [0, 10]$ |
| v). $\max \left\{ \left \frac{f(a)}{f'(a)} \right , \left \frac{f(b)}{f'(b)} \right \right\} \leq b - a $ | ✓ $\max \left\{ \left \frac{90}{-162} \right , \left \frac{-2.6424}{-0.7358} \right \right\} \approx 3.5914 < 10 - 0 $ |

Por tanto el método converge para cualquier valor inicial que se tome en ese intervalo. En este caso nos indican que se comience por el valor $t=6$ si bien habitualmente se elige un extremo basándose en:

- Coger el extremo donde $f(x)$ y $f''(x)$ coinciden en signo (evita imponer la condición iv).
- Coger el extremo donde $f(x)$ es menor.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 6 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$t_0 = 6 \quad t_1 = t_0 - \frac{f(t_0)}{f'(t_0)} = 6 - \frac{0.9767}{-1.0986} = 6.8891$$

$$t_2 = t_1 - \frac{f(t_1)}{f'(t_1)} = 6.8891 - \frac{0.0426}{-1.0044} = 6.9315 \quad t_3 = t_2 - \frac{f(t_2)}{f'(t_2)} = 6.9315 - \frac{0.0001}{-1.0002} = 6.9315$$

Ejercicio 2.- Se han realizado varios sondeos para diseñar adecuadamente los drenajes de un muro de carga obteniéndose un estrato superior de limos, otro intermedio de gravas y uno inferior de granito a una profundidad constante de 32m, obteniéndose los siguientes datos:

Distancia	0	20	40	50
Profundidad del limo (m)	-21.33	-21.11	-20.00	-19.21
Pendiente del estrato				0.0500

- (a) Calcular un polinomio que interpole los datos anteriores y evaluarlo en $d=45m$. {4 pts.}
- (b) Se sabe que dichos datos provienen de una función tal que $\forall x \in [0, 50]: |f^{(k)}(x)| < 5 \times 10^{-k}$, $k=1,2,3,4$. Determinar el número de sondeos equiespaciados necesarios para que la interpolación lineal entre dos puntos consecutivos produzca un error menor de 1 dm {3 pts.}
- (c) Se ha medido $f(45) = -19.54$; calcular el área del estrato de grava utilizando la regla de Simpson con dos subintervalos. ¿Cuál habría sido el máximo error cometido?. Sabiendo que $\int_0^{50} f(x) dx \approx 565.52 m^2$; comparar la cota obtenida con el valor real {3 pts.}.

Apartado (a) Polinomio de interpolación

No se puede considerar las formas de Lagrange ni de Diferencias Divididas de Newton puesto que ambos se utilizan para resolver el problema de interpolación de Lagrange (sólo se conoce la función), y en este caso también se conoce la derivada en un punto. Tampoco es un problema de Hermite al no tenerse la derivada en todos los puntos, ni splines sujetos, pues falta su derivada en el punto inicial. Sólo queda la opción de diferencias divididas generalizadas, definidas como

$$f[z_0, \dots, z_n] = \begin{cases} \frac{f[z_1, \dots, z_n] - f[z_0, \dots, z_{n-1}]}{z_n - z_0} & z_0 \neq z_n \\ \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} & z_0 = z_n \end{cases}$$

donde $\{z_k\}_{k=0}^n$ es el conjunto de puntos del soporte donde cada punto aparece repetido de forma consecutiva tantas veces como información se tiene sobre la función en él. A continuación se detallan algunos de los cálculos realizados, mostrando a continuación la tabla de las diferencias divididas generalizadas, donde aparecen sombreados los datos conocidos.

$$f[z_0, z_1] = \frac{f[z_1] - f[z_0]}{z_1 - z_0} = \frac{-21.11 - (-21.36)}{20 - 0} = 0.011 \wedge f[z_3, z_4] = f'(z_3) = 0.0500$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 7 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$f[z_0, z_1, z_2] = \frac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0} = \frac{0.0555 - (0.011)}{40 - 0} = 1.113 \times 10^{-3}$$

$$f[z_0, z_1, z_2, z_3] = \frac{f[z_1, z_2, z_3] - f[z_0, z_1, z_2]}{z_3 - z_0} = \frac{7.833 \times 10^{-4} - (1.113 \times 10^{-3})}{50 - 0} = -6.583 \times 10^{-6}$$

$$f[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{f[z_1, z_2, z_3, z_4] - f[z_0, z_1, z_2, z_3]}{z_4 - z_0} = \frac{-1.228 \times 10^{-4} - (-6.583 \times 10^{-6})}{50 - 0} = -2.324 \times 10^{-6}$$

	$f[z_k]$	$f[z_k, z_{k+1}]$	$f[z_k, \dots, z_{k+2}]$	$f[z_k, \dots, z_{k+3}]$	$f[z_k, \dots, z_{k+4}]$
$z_0=0$	-21.33				
$z_1=20$	-21.11	0.011			
$z_2=40$	-20.00	0.0555	$1.113 \cdot 10^{-3}$		
$z_3=50$	-19.21	0.079	$7.833 \cdot 10^{-4}$	$-6.583 \cdot 10^{-6}$	
$z_4=50$	-19.21	0.0500	$-2.9 \cdot 10^{-3}$	$-1.228 \cdot 10^{-4}$	$-2.224 \cdot 10^{-6}$

Tabla de diferencias divididas generalizadas

Puesto que, utilizando la forma de diferencias divididas generalizadas, se tiene que

$$f(x) = \sum_{k=0}^N f[z_0, \dots, z_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - z_i) + f[z_0, \dots, z_N, x] \prod_{i=0}^N (x - z_i)$$

el polinomio de interpolación pedido será

$$P_4(x) = -21.33 + (x-0)(0.011 + (x-20)(1.113 \times 10^{-3} + (x-40)(-6.583 \times 10^{-6} + (x-50)(-2.324 \times 10^{-6}))))$$

cuyo error viene dado por

$$E_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!} (x-0)(x-20)(x-40)(x-50)^2$$

Evaluándolo en el valor pedido

$$P_4(45) = -19.56$$

Apartado (b) Interpolación lineal

Se ha visto en teoría que $f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ con $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$.

Particularizando para el caso lineal:

$$\max_{x \in (x_k, x_{k+1})} |f(x) - P_1(x)| \leq \max_{x \in (x_k, x_{k+1})} \left| \frac{f''(x)}{2!} \right| \max_{x \in (x_k, x_{k+1})} \left| \prod_{i=0}^1 (x - x_i) \right|$$

donde $x_k = x_0 + kh$, siendo h es el equiespaciado entre los puntos. Imponiendo que

$$\max_{x \in (x_k, x_{k+1})} \left| \frac{f''(x)}{2!} \right| \max_{x \in (x_k, x_{k+1})} \left| \prod_{i=0}^1 (x - x_i) \right| < 0.1 \Rightarrow \max_{x \in (x_k, x_{k+1})} |f(x) - P_1(x)| < 0.1$$

Y puesto que

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 8 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\max_{x \in (x_k, x_{k+1})} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| = \max_{x \in (x_k, x_{k+1})} |(x - x_k)(x - x_{k+1})| = \{x - x_k = sh\} = \max_{s \in (0,1)} |sh(s-1)h| = \{s_{\max} = \frac{1}{2}\} = h^2 \frac{1}{4}$$

Se tiene

$$\frac{7 \times 10^{-3}}{2!} \frac{h^2}{4} < 0.1 \rightarrow h < \sqrt{\frac{800}{7}} \approx 10.69$$

Y el número de sondeos vendrá dado como $N > \frac{b-a}{h} + 1 = \frac{50}{10.69} + 1 = 6$

Apartado (c) Integración por Simpson

La regla de Simpson viene dada por $S(a, b) = \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$, y llamando $h = \frac{b-a}{2}$ se

tiene $\int_a^b f(x) dx = S(a, b) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta)$, con $\zeta \in [a, b]$

Se pide utilizar esta fórmula para obtener el área del estrato de grava, por tanto la función a integrar viene dada por $F(x) = -32 - f(x)$, esto es

X	0	20	40	45	50
F(X)	-10.6742	-10.8929	-12.0000	-12.4636	-12.7854

Como indica que se aplique a dos subintervalos y puesto que en cada subintervalo se debe conocer el valor de la función en los extremos y en el punto medio, tendremos que los subintervalos pedidos son el [0,40] y el [40,50], por tanto

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_0^{50} F(x) dx \right| = \left| \int_0^{40} F(x) dx + \int_{40}^{50} F(x) dx \right| \approx |S(0, 40) + S(40, 50)| = \\ &= \left| \frac{20}{3} (F(0) + 4F(20) + F(40)) + \frac{5}{3} (F(40) + 4F(45) + F(50)) \right| = \\ &= |441.6372 + 124.4| = 566.0372 \end{aligned}$$

Asimismo, la cota del error cometido vendrá dado por

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{50} F(x) dx - S(0, 40) - S(40, 50) \right| &\leq \left| \int_0^{40} F(x) dx - S(0, 40) \right| + \left| \int_{40}^{50} F(x) dx - S(40, 50) \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{h_1^5}{90} f^{(4)}(\zeta_1) \right| + \left| \frac{h_2^5}{90} f^{(4)}(\zeta_2) \right| = \frac{1}{90} (h_1^5 + h_2^5) \max_{x \in [0, 50]} |f^{(4)}(x)| = \\ &= \frac{1}{90} (20^5 + 5^5) 5 \times 10^{-4} = 17.7951 \end{aligned}$$

Comparando el resultado obtenido con el valor exacto del área

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \left| \int_0^{50} F(x) dx \right| = \left| \left(-32 - (x-40) \arctan\left(\frac{x}{10} - 4\right) + 5 \log\left(1 + \left(\frac{x}{10} - 4\right)^2\right) + 20x \right) \right|_0^{50} = \\ &= |-604.3882 - (-38.8666)| = 565.5216 \end{aligned}$$

el error cometido es aproximadamente 0.5156, valor muy inferior a la cota.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 9 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 3.-

- (a) Sabiendo que $f(x) \in C^4[\mathbf{R}]$, utilizar las formulas centradas de derivación numérica para expresar $g(x) = (2x-1)f''(x) + (3x-5)f'(x) - 9f(x)$ a partir de los valores de $f(x-h)$, $f(x)$ y $f(x+h)$. {1.0 pts.}.

- (b) Al resolver mediante diferencias finitas con equiespaciado $h = 0.25$ el problema de contorno

$$\begin{cases} (2x-1)y''(x) + (3x-5)y'(x) - 9y(x) = 2 & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 & y(1) = 0 \end{cases}, \text{ se obtiene el sistema}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{8} & -\frac{7}{8} & 0 \\ \frac{27}{16} & -\frac{25}{8} & \frac{5}{16} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{41}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Justificar los cálculos realizados para la obtención del mismo. . {1 pts.}.

- (c) Seleccionar justificadamente el método de factorización más adecuado para la resolución del sistema anterior. Resolver el sistema utilizando el método de Gauss SIN pivoteo y obtener a partir de él la factorización LU de la matriz. {4 pts.}.
- (d) Calcular las matrices asociadas al método de Jacobi y comprobar la convergencia del mismo para el sistema anterior. Realizar dos iteraciones partiendo del vector nulo. ¿Cuántas iteraciones hubieran sido necesarias para que la solución tuviera un error menor que 10^{-3} según la norma uno? ¿Cómo hubiera sido el método de Gauss-Seidel? Justificar la respuesta {4 pts.}.

Apartado (a) Expresión discreta

Ya se han obtenido en la teoría las fórmulas centradas, que vienen dadas por:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 \cdot h} - f'''(\zeta) \cdot \frac{h^2}{3!} \quad \text{con } \zeta \in (x-h, x+h) \quad (0.1)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))}{h^2} - f^{iv}(\xi) \cdot \frac{h^2}{12} \quad \text{con } \xi \in (x-h, x+h) \quad (0.2)$$

Sustituyendo las expresiones (0.1) y (0.2) en la relación inicial

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 10 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{aligned}
& (2x-1) \left(\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - f^{iv}(\xi) \cdot \frac{h^2}{12} \right) + (3x-5) \left(\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2 \cdot h} - f'''(\zeta) \cdot \frac{h^2}{3!} \right) - 9f(x) \\
&= f(x+h) \left(\frac{2x-1}{h^2} + \frac{3x-5}{2h} \right) + f(x) \left(\frac{-4x+2}{h^2} - 9 \right) + f(x-h) \left(\frac{2x-1}{h^2} - \frac{3x-5}{2h} \right) - \\
& \quad - h^2 \left((2x-1) \frac{f^{iv}(\xi)}{12} + (3x-5) \frac{f'''(\zeta)}{3!} \right)
\end{aligned}$$

La acotación del error se realiza teniendo en cuenta que $f(x) \in P_3[\mathbf{R}] \Rightarrow f^{iv}(\xi) = 0 \wedge f'''(\zeta) = 6a_3$, donde a_3 es el coeficiente de mayor grado del polinomio. Por tanto

$$\left| -h^2 \left((2x-1) \frac{f^{iv}(\xi)}{12} + (3x-5) \frac{f'''(\zeta)}{3!} \right) \right| \leq h^2 |(3x-5)| |a_3|$$

Apartado (b) Obtención del sistema

Denotando por $w_k \approx y_k = y(x_k)$ se tiene

$$w_{k-1} \left(\frac{2x_k-1}{h^2} - \frac{3x_k-5}{2h} \right) + w_k \left(\frac{-4x_k+2}{h^2} - 9 \right) + w_{k+1} \left(\frac{2x_k-1}{h^2} + \frac{3x_k-5}{2h} \right) = 2 \quad k=1,2,\dots,n$$

Y tomando $x_k = kh$ con $h=1/4$ se llega al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{8} & -\frac{9}{8} & -\frac{7}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{27}{16} & -\frac{25}{8} & \frac{5}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{41}{8} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} & -\frac{7}{8} & 0 \\ \frac{27}{16} & -\frac{25}{8} & \frac{5}{16} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{41}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Apartado (c) Factorización del sistema lineal y resolución

La matriz del sistema no es simétrica y por tanto sólo es aplicable la descomposición LU, donde L es una matriz triangular inferior de diagonal unitaria y U es triangular superior.

Para resolver por Gauss, utilizamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{9}{8} & -\frac{7}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{27}{16} & -\frac{25}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{41}{8} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{\left\{ \begin{array}{l} = \\ 2^a - \frac{3}{2} 1^a \\ = \end{array} \right\}} \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{9}{8} & -\frac{7}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{71}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{8} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{41}{8} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{\left\{ \begin{array}{l} = \\ = \\ 3^a - \frac{40}{71} 2^a \end{array} \right\}} \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{9}{8} & -\frac{7}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{71}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{2811}{568} & \frac{171}{284} \end{array} \right)$$

Resolviendo por remonte

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 11 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{cases} \frac{-9}{8} w_1 + \frac{-7}{8} w_2 = \frac{1}{4} & \frac{-9}{8} w_1 + \frac{-7}{8} \frac{-140}{937} = \frac{1}{4} & \rightarrow w_1 = \frac{-298}{2811} \approx -0.1060 \\ \frac{-71}{16} w_2 + \frac{5}{16} w_3 = \frac{5}{8} & \frac{-71}{16} w_2 + \frac{5}{16} \frac{-114}{937} = \frac{5}{8} & \rightarrow w_2 = \frac{-140}{937} \approx -0.1494 \\ \frac{-2811}{568} w_3 = \frac{171}{284} & \rightarrow w_3 = \frac{-114}{937} \approx -0.1217 \end{cases}$$

A partir del método de Gauss es inmediato obtener la factorización pedida, pues las operaciones realizadas equivalen matricialmente, como se ha visto en teoría, $PA = U \Rightarrow A = P^{-1}U$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-9}{8} & \frac{-7}{8} & 0 \\ \frac{27}{16} & \frac{-25}{8} & \frac{5}{16} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{-41}{8} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} \frac{-9}{8} & \frac{-7}{8} & 0 \\ 0 & \frac{-71}{16} & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & \frac{-2811}{568} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{40}{71} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{60}{71} & \frac{40}{71} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{40}{71} & 1 \end{pmatrix}$$

O bien

$$P^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{40}{71} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{40}{71} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{40}{71} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{40}{71} & 1 \end{pmatrix}$$

Apartado (d) Método Iterativo de Jacobi

A partir de la descomposición $A = D - L - U$, donde

$$D = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{41}{8} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{27}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene la matriz de iteración de Jacobi

$$K_J = D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{9} & 0 \\ \frac{27}{50} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{20}{41} & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & -0.7778 & 0 \\ 0.5400 & 0 & 0.1000 \\ 0 & 0.4878 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{y el vector independiente } c_J = D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{-2}{9} \\ \frac{-2}{25} \\ \frac{-2}{41} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.2222 \\ -0.0800 \\ -0.0488 \end{pmatrix}$$

Al ser la matriz de diagonal estrictamente dominante, el método de Jacobi es convergente. Esto se comprueba fácilmente observando que

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 12 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\|K_J\|_{\infty} = \max \{ |0| + |-7/9| + |0|, |27/50| + |0| + |5/50|, |0| + |20/41| + |0| \} = 7/9 \approx 0.7778 < 1.$$

Realizamos las iteraciones pedidas

$$x^{(1)} = K_J x^{(0)} + c_J = \begin{pmatrix} 0 & -7/9 & 0 \\ 27/50 & 0 & 1/10 \\ 0 & 20/41 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/9 \\ -2/25 \\ -2/41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/9 \\ -2/25 \\ -2/41 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.2222 \\ -0.08 \\ -0.04878 \end{pmatrix}$$

c.q.d.

$$x^{(2)} = K_J x^{(1)} + c_J = \begin{pmatrix} 0 & -7/9 & 0 \\ 27/50 & 0 & 1/10 \\ 0 & 20/41 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/9 \\ -2/25 \\ -2/41 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/9 \\ -2/25 \\ -2/41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/25 \\ -42/205 \\ -18/205 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.16 \\ -0.2049 \\ -0.08780 \end{pmatrix}$$

El número de iteraciones se calcula mediante $\|x - x^{(n)}\| \leq \frac{\|K\|^n}{1 - \|K\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| < \varepsilon$, lo que exige calcular

las normas de la matriz de iteración y del vector c, puesto que si $x^{(0)} = 0$ se tiene $\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \|c_J\|$.

$$\|K_J\|_1 = \max \{ 0 + \frac{27}{50} + 0, \frac{7}{9} + 0 + \frac{20}{41}, 0 + \frac{1}{10} + 0 \} = \frac{467}{369} > 1$$

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_1 = \|c_J\|_1 = |-2/9| + |-2/25| + |-2/41| = 245/698 \approx 0.3510$$

Al ser la norma mayor que uno, no es posible utilizar la relación anterior.

NOTA

Si se hubiera podido realizar de haber pedido utilizar la norma infinito, puesto que ésta es menor que la unidad. En ese caso

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty} = \|c_J\|_{\infty} = \max \{ |-2/9|, |-2/25|, |-2/41| \} = 2/9 \approx 0.2222$$

y sustituyendo

$$\frac{(2/9)^n}{1 - 2/9} < 0.001 \rightarrow n > \frac{\ln(0.001)}{\ln(7/9)} \approx 27.4865$$

Se necesitan 28 iteraciones.

Puesto que la matriz es de diagonal estrictamente dominante, el método de Gauss-Seidel también será convergente.

Ejercicio 4.- Dadas la ecuación diferencial $\begin{cases} y'(t) + ay(t) = 1 & 0 \leq t \leq 3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \text{ (I)}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \text{ (II)}$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ & 1 & \\ & 1/2 & 1/2 \end{array} \text{ (III)}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 13 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

- (a) Resolverla para $a=2$ utilizando el método de Runge Kutta dado por la tabla de Butcher I tomando $h=1$ ¿son razonables los resultados? ¿Qué harías para mejorar los resultados? ¿Es un método explícito, implícito o adaptativo? ¿Cuál? {2 pts}
- (b) Resolverla para $a=2$ utilizando el método de Runge Kutta dado por la tabla de Butcher II tomando $h=1$ ¿son razonables los resultados? ¿Es un método explícito, implícito o adaptativo? {4 pts}
- (c) Realizar un paso del método de Runge Kutta adaptativo de Euler-Heun (dado por la tabla de Butcher III) tomando $h=1$ para resolver la ecuación diferencial (II) y determinar, si es posible, el valor de a para que no haya que disminuir el tamaño del paso cuando se desea un error de truncamiento local inferior a 0.01 {4 pts}

Apartado (a) Resolver utilizando Euler

Dada la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y'(t) + ay(t) = 1 & 0 \leq t \leq 3 \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y'(t) = -2y(t) + 1 & 0 \leq t \leq 3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

El método pedido (Euler) viene dado por

$$\begin{array}{l|l} 0 & \left\{ \begin{array}{l} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = w_n + hk_1 \end{array} \right. \\ \hline 1 & \left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_n, w_n) = -2w_n + 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Aplicándolo a el caso actual

$$y(1) \approx w_1 = w_0 + h(-2w_0 + 1) = 1 + 1(-2 \cdot 1 + 1) = 0$$

$$y(2) \approx w_2 = w_1 + h(-2w_1 + 1) = 0 + 1(-2 \cdot 0 + 1) = 1$$

$$y(3) \approx w_3 = w_2 + h(-2w_2 + 1) = 1 + 1(-2 \cdot 1 + 1) = 0$$

Los resultados no son razonable, ya que se obtiene una serie alternada de 0 y 1. Para cambiar esto es suficiente con variar el tamaño del paso. Así tomando $h=1.5$, se tiene

$$y(1.5) \approx w_1 = w_0 + h(-2w_0 + 1) = 1 + 1.5(-2 \cdot 1 + 1) = -0.5$$

$$y(3) \approx w_2 = w_1 + h(-2w_1 + 1) = -0.5 + 1.5(-2 \cdot (-0.5) + 1) = 2.5$$

Obviamente, los resultados serán aún mejores tomando valores menores de h .

Apartado (b) Resolver utilizando Euler Implícito

El método pedido (Euler implícito) viene dado por

$$\begin{array}{l|l} 1 & \left\{ \begin{array}{l} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = w_n + hk_1 \end{array} \right. \\ \hline 1 & \left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_n + h, w_n + hk_1) = -2(w_n + hk_1) + 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Resolviendo la ecuación implícita $k_1 = \frac{1 - 2w_n}{1 + 2h}$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 14 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Aplicándolo a el caso actual

$$y(1) \approx w_1 = w_0 + h \left(\frac{1-2w_0}{1+2h} \right) = 1 + 1 \left(\frac{1-2 \cdot 1}{1+2} \right) = \frac{2}{3}$$

$$y(2) \approx w_2 = w_1 + h \left(\frac{1-2w_1}{1+2h} \right) = \frac{2}{3} + 1 \left(\frac{1-2 \cdot \frac{1}{3}}{1+2} \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$y(3) \approx w_3 = w_2 + h \left(\frac{1-2w_2}{1+2h} \right) = \frac{5}{9} + 1 \left(\frac{1-2 \cdot \frac{5}{9}}{1+2} \right) = \frac{5}{9} - \frac{1}{27} = \frac{14}{27}$$

Apartado (c) Resolver utilizando RK

El método pedido viene dado por

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} w_{n+1} = w_n + hk_1 \\ z_{n+1} = w_n + h \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \right) \\ k_1 = f(t_n, w_n) = (-aw_n + 1) \\ k_2 = f(t_n + h, w_n + hk_1) = (-a(w_n + hk_1) + 1) \end{array} \right.$$

Y la estimación del error de truncamiento local por $\delta_{actual} = \tau_{n+1}^k(h) = \frac{1}{h} |w_{n+1} - z_{n+1}|$

Por tanto la estimación del error en el primer paso es

$$\delta_{actual} = \tau_{n+1}(h) = \frac{1}{h} |w_1 - z_1| = \frac{1}{h} |w_1 + hk_1 - (w_1 + h(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2))| = \frac{1}{2} |k_1 - k_2|$$

Realizando los cálculos

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = (-aw_0 + 1) = (1-a) \\ k_2 = (-a(w_0 + hk_1) + 1) = (-a(1 + 1(-a+1)) + 1) = (1-a(2-a)) \\ \delta_{actual} = \frac{1}{2} |k_1 - k_2| = \frac{1}{2} |(1-a) - (1-a(2-a))| = \frac{1}{2} |(1-a) - (1-a(2-a))| = \frac{1}{2} |a(1-a)| \end{array} \right.$$

Imponiendo las condiciones

$$-0.01 < \frac{1}{2} a(1-a) < 0.01 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - a - 0.02 < 0 \rightarrow a^2 - a - 0.02 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1.08}}{2} \\ a^2 - a + 0.02 > 0 \rightarrow a^2 - a + 0.02 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{0.92}}{2} \end{array} \right.$$

La primera condición se traduce en $\frac{1-\sqrt{1.08}}{2} < a < \frac{1+\sqrt{1.08}}{2} \rightarrow -0.0196 < a < 1.0196$

La segunda impone que $a < \frac{1-\sqrt{0.92}}{2} \vee a > \frac{1+\sqrt{0.92}}{2} \rightarrow a < 0.0204 \vee a > 0.9796$

Combinando ambas condiciones:

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 15 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$a \in \left(\frac{1 - \sqrt{1.08}}{2}, \frac{1 - \sqrt{0.92}}{2} \right) \vee a \in \left(\frac{1 + \sqrt{0.92}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1.08}}{2} \right) \rightarrow a \in (-0.0196, 0.0204) \vee a \in (0.9796, 1.0196)$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 16 de 16
	Estudios	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI)	
	Prueba	Julio (Ordinaria)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Criterios de puntuación:

Ejercicio	Apartado	Criterios	Valoración
1	A (3 pts)	Selección razonada del método	1.5
		Iteraciones	1.5
	B (4 pts)	Obtención de las funciones de PF	0.5
		Comprobación de las condiciones cd PF	2.5
Iteraciones		0.5	
		Número de Iteraciones	0.5
	C (3 pts)	Condiciones de Newton	2.0
		Iteraciones	1.0
2	A (4 pts)	Seleccionar diferencias divididas generalizadas	1
		Aplicación de las DDG	2
		Expresión del polinomio	0.5
		Evaluación	0.5
	B (3 pts)	Planteamiento correcto	1.5
		Resolución	0.5
	C (3 pts)	Intervalos a aplicar	0.75
		Función a integrar	0.5
		Aplicación correcta de Simpson	1.0
		Acotación del error de Simpson y verificación	0.75
3	A (1 pts)	Sustitución y acotación del error	1.0
	B (1 pts)	Justificación	1.0
	C (4 pts)	Selección del método	0.5
		Resolución por Gauss	2.5
		Factorización LU	1.0
	D (4 pts)	Cálculo de las matrices	1.5
		Convergencia del Método	1.0
		Iteraciones	0.5+0.5
Cálculos con la norma uno y número de iteraciones		0.5	
		Convergencia de Gauss-Seidel	0.5-0.5
4	A (2 pts)	Función	0.5
		Expresión del método y aplicación	1.0
		Razonamiento	0.5
	B (4 pts)	Expresión del método y aplicación	3
		Razonamiento	1
	C (4 pts)	Expresión del primer método y aplicación	0.5
		Expresión del segundo método y aplicación	0.5
		Planteamiento del error	1.5
Desarrollo y razonamiento		1.5	