

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 1 de 9
	Tema	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI) (Evaluación Continua 1ª Prueba)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Ejercicio 1.- El análisis por fatiga cíclica de un material se realiza aplicando una presión y anotando el número de ciclos necesarios para su rotura. Los datos obtenidos en el análisis de cierto material se muestran en la siguiente tabla. 89 68 60 56 53

Ciclos($\times 10^5$)	1	3	5	6.5	8
Presión (MPa)	89	68	60	56	53

- Obtener los polinomios de interpolación de grados 1, 2, 3 ... más adecuados para calcular la máxima presión que se puede aplicar a una pieza para que resista 4×10^5 ciclos ¿Son razonables los resultados obtenidos? {1.5 pts}
- Utilizar interpolación segmentaria cuadrática para realizar el mismo cálculo sabiendo que $P'(1 \times 10^5) = -22.3$. {1.5 pts}
- Sabiendo que en una gráfica log-log de presión frente a ciclos los datos muestran una relación lineal, use la regresión por mínimos cuadrados para obtener la presión en función del número de ciclos y estime su valor para 4×10^5 ciclos. {1.5 pts}
- Para obtener el trabajo realizado en los ensayos es necesario realizar la integración de los datos anteriores. Razónese cuál es la fórmula de integración más adecuada y utilícese para estimar el trabajo. {1.5 pts}

SOLUCIÓN

Apartado (a) Interpolación clásica

Puesto que tenemos el valor de la función en cuatro puntos y nos va pidiendo polinomios de grado cada vez más elevado, nos orienta hacia el método de diferencias divididas de Newton. Aunque se podría plantear con polinomios de Lagrange, esto nos obligaría a realizar de nuevo todos los cálculos cada vez que se añade un nuevo punto. A la hora de ir añadiendo puntos para interpolar en $x=4$, deberíamos comenzar eligiendo los más próximos al punto, esto es $\{3, 5, 6.5, 1, 8\}$. Para evitar trabajar con valores muy pequeños, tomamos los valores de x en cientos de miles de ciclos ($x \times 10^5$).

Recordamos de la teoría que

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \quad \text{con} \quad \begin{cases} f[x_0] = f(x_0) \\ f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] - f[x_1, \dots, x_{k-1}, x_k]}{x_0 - x_k} \end{cases}$$

así pues sólo es necesario decidir el orden de los puntos de interpolación (lo más cercanos posibles al punto a interpolar).

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 2 de 9
	Tema	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI) (Evaluación Continua 1ª Prueba)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
3	68				
5	60	$\frac{68-60}{3-5} = -4$			
6.5	56	$\frac{60-56}{5-6.5} = -2.6$	$\frac{-4 - (-2.6)}{3-6.5} \approx 0.3810$		
1	89	$\frac{56-89}{6.5-1} = -6$	$\frac{-2.6 - (-6)}{5-1} = 0.83$	$\frac{0.3810 - 0.8333}{3-1} \approx -0.2262$	
8	53	$\frac{89-53}{1-8} \approx -5.1429$	$\frac{-6 - (-5.1429)}{6.5-8} \approx 0.5714$	$\frac{0.8333 - 0.5714}{5-8} = -0.0873$	$\frac{-0.2262 - (-0.0873)}{3-8} = 0.0278$

Por tanto

$$P_1(x) = 68 - 4(x - 3)$$

$$P_2(x) = P_1(x) + 0.3810(x - 3)(x - 5)$$

$$P_3(x) = P_2(x) - 0.2262(x - 3)(x - 5)(x - 6.5)$$

$$P_4(x) = P_3(x) + 0.0278(x - 3)(x - 5)(x - 6.5)(x - 1)$$

Evaluamos los polinomios para $x=4$

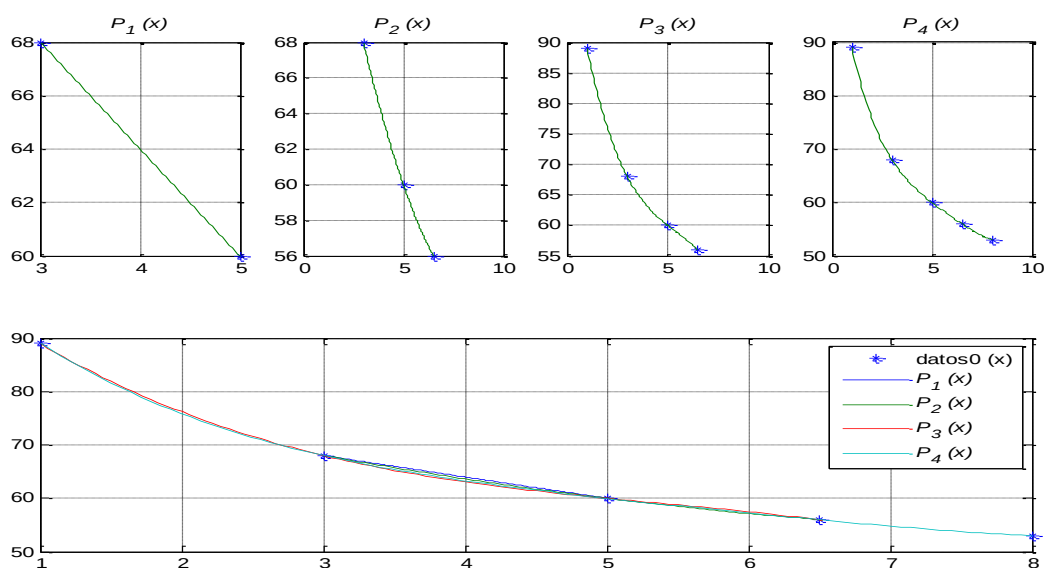
$$P_1(4) = 68 - 4(4 - 3) = 64$$

$$P_2(4) = P_1(4) + 0.3810(4 - 3)(4 - 5) \approx 63.6190$$

$$P_3(4) = P_2(4) - 0.2262(4 - 3)(4 - 5)(4 - 6.5) \approx 63.0536$$

$$P_4(4) = P_3(4) + 0.0278(4 - 3)(4 - 5)(4 - 6.5)(4 - 1) \approx 63.2619$$

Y todos los resultados numéricos son razonables. Representando los resultados



 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 3 de 9
	Tema	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI) (Evaluación Continua 1ª Prueba)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

Nota1:

Se podrían haber tomado los puntos por orden siempre que se eligieran correctamente los coeficientes

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
1	89				
3	68	-21/2=-10.5			
5	60	-4	13/8=1.625		
6.5	56	-8/3=-2.6667	8/21=0.3810	-19/84=-0.2262	
8	53	-2	2/9=0.2222	-2/63=-0.0317	1/36=0.0278

Si utilizamos polinomios de Lagrange, tendríamos que ir calculándolos para cada caso

Puntos	Polinomio
--------	-----------

{3,5}	$P_1(t) = \frac{x-5}{3-5}68 + \frac{x-3}{5-3}60$
-------	--

{3,5,6.5}	$P_2(t) = \frac{(x-5)(x-6.5)}{(3-5)(3-6.5)}68 + \frac{(x-3)(x-6.5)}{(5-3)(5-6.5)}60 + \frac{(x-3)(x-5)}{(6.5-3)(6.5-5)}56$
-----------	--

{3,5,6.5,1}	$P_3(t) = \frac{(x-5)(x-6.5)(x-1)}{(3-5)(3-6.5)(3-1)}68 + \frac{(x-3)(x-6.5)(x-1)}{(5-3)(5-6.5)(5-1)}60 + \frac{(x-3)(x-5)(x-1)}{(6.5-3)(6.5-5)(6.5-1)}56 + \frac{(x-3)(x-5)(x-6.5)}{(1-3)(1-5)(1-6.5)}89$
-------------	--

{3,5,6.5,1,8}	$P_4(t) = \frac{(x-5)(x-6.5)(x-1)(x-8)}{(3-5)(3-6.5)(3-1)(3-8)}68 + \frac{(x-3)(x-6.5)(x-1)(x-8)}{(5-3)(5-6.5)(5-1)(5-8)}60 + \frac{(x-3)(x-5)(x-1)(x-8)}{(6.5-3)(6.5-5)(6.5-1)(6.5-8)}56 + \frac{(x-3)(x-5)(x-6.5)(x-8)}{(1-3)(1-5)(1-6.5)(1-8)}89 + \frac{(x-3)(x-5)(x-6.5)(x-1)}{(8-3)(8-5)(8-6.5)(8-1)}53$
---------------	--

Y posteriormente evaluar cada uno de ellos

Apartado (b) Interpolación cuadrática segmentaria

Recordando la teoría, el polinomio de interpolación segmentaria $S(x)$ de grado k viene definido mediante $S(x) = \{P_k(x) \text{ con } x \in I_k\}$ con $[a, b] = \bigcup_{k=1}^n I_k = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k]$, donde el soporte está ordenado $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ y $S(x)$ verifica $S(x_k) = P_k(x_k) = P_{k+1}(x_k) = f(x_k)$ y $S(x) \in C^{k-1}[a, b]$.

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 4 de 9
	Tema	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI) (Evaluación Continua 1ª Prueba)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

En este caso el polinomio es cuadrático, por tanto

$$P_k(x) = a_k(x - x_{k-1})^2 + b_k(x - x_{k-1}) + c_k \quad \text{con } x \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$$

Al imponer las condiciones de continuidad de la función y su derivada,

$$P_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1}) \wedge P_k(x_k) = f(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$P'_k(x_k) = P'_{k+1}(x_k) \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

se llega a

$$a_k = \frac{b_{k+1} - b_k}{2(x_k - x_{k-1})} = \frac{b_{k+1} - b_k}{2h_k} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$c_k = f(x_{k-1}) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$2f[x_k, x_{k-1}] = b_k + b_{k+1} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Que, planteado matricialmente, conduce al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} f[x_0, x_1] \\ f[x_1, x_2] \\ \vdots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ f[x_{n-1}, x_n] \end{pmatrix}$$

Imponiendo la condición $f'(0) = \alpha$, se tiene $b_1 = \alpha$, lo que conduce a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2f[x_0, x_1] \\ 2f[x_1, x_2] \\ \vdots \\ 2f[x_{n-2}, x_{n-1}] \\ 2f[x_{n-1}, x_n] \end{pmatrix}$$

Particularizando para el ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22.3 \\ -21 \\ -8 \\ -5.3 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} b_1 = 22.3 \\ b_2 = 1.3 \\ b_3 = -9.3 \\ b_4 = 3.96 \\ b_5 = -7.96 \end{cases}$$

Los polinomios de interpolación vienen dados por

Intervalo	Polinomio
[1,3]	$P_2^1(x) = 5.9(x-1)^2 + 22.3(x-1) + 89$
[3,5]	$P_2^2(x) = -2.65(x-3)^2 + 1.3(x-3) + 68$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 5 de 9
	Tema	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI) (Evaluación Continua 1ª Prueba)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$[5, 6.5] \quad P_2^3(x) = 4.42(x-5)^2 - 9.3(x-5) + 60$$

$$[6.5, 8] \quad P_2^4(x) = -3.98(x-6.5)^2 + 3.97(x-6.5) + 56$$

Evaluando el segundo polinomio en el punto $x=4$, $P_2^2(4) \approx 66.65$

Resolución alternativa

Se pueden aplicar las condiciones a cada intervalo, lo que no exige llegar a plantear el sistema.

Primer intervalo $[1, 3]$

$$P_2^1(x) = a_1(x-1)^2 + b_1(x-1) + c_1 \quad P_2^{1'}(x) = 2a_1(x-1) + b_1$$

Condiciones

$$P_2^1(1) = f(1) \rightarrow c_1 = 89$$

$$P_2^{1'}(1) = f'(1) \rightarrow b_1 = -22.3$$

$$P_2^1(3) = f(3) \rightarrow a_1(2)^2 + b_1(2) + c_1 = 75 \rightarrow a_1 \approx 5.9$$

Segundo intervalo $[3, 5]$

$$P_2^2(x) = a_2(x-3)^2 + b_2(x-3) + c_2 \quad P_2^{2'}(x) = 2a_2(x-3) + b_2$$

Condiciones

$$P_2^2(3) = f(3) \rightarrow c_2 = 68$$

$$P_2^{2'}(3) = P_2^{1'}(3) \rightarrow b_2 = 2(5.9)(3-1) - 22.3 = 1.3$$

$$P_2^2(6) = f(6) \rightarrow a_2(2)^2 + b_2(2) + c_2 = 60 \rightarrow a_2 \approx -2.65$$

No es necesario seguir calculando valores ya que se puede obtener ya el valor en $x=4$ como $P_2^2(4)$

Apartado (c) Ajuste lineal

Recordando la teoría, se debe encontrar los coeficientes a y b tales que $E(a, b)$ sea mínimo, siendo

$$E(a, b) = \sum_{i=0}^3 (f(x_i) - y_i)^2 \quad \text{con} \quad f(x) = a + bx$$

Anulando las derivadas parciales respecto a ambos parámetros se obtiene el sistema $X^t X \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = X^t Y$

, donde (tomando por simplicidad logaritmos decimales)

$$Y^t = (\log(89) \quad \log(68) \quad \log(60) \quad \log(56) \quad \ln(53)) = (1.9494 \quad 1.8325 \quad 1.7782 \quad 1.7482 \quad 1.7243)$$

$$X^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log(10^5) & \ln(3 \times 10^5) & \ln(5 \times 10^5) & \ln(6.5 \times 10^5) & \ln(8 \times 10^5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5.477 & 5.697 & 5.813 & 5.903 \end{pmatrix}$$

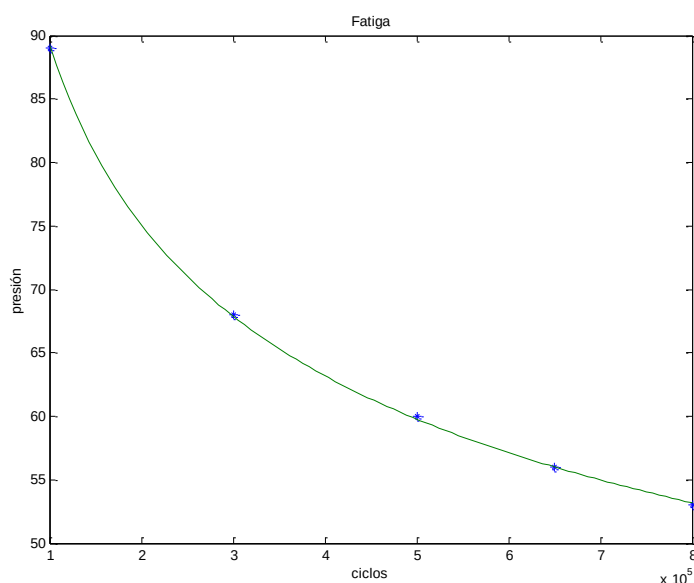
esto es

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 6 de 9
	Tema	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI) (Evaluación Continua 1ª Prueba)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{pmatrix} 5 & 27.89 \\ 27.89 & 156.11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.03 \\ 50.26 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 3.1918 \\ b = -0.2483 \end{cases}$$

Por tanto la relación viene dada por $\log(p) = 3.1918 - 0.2483 \log(c)$, donde p es la presión (en MPa) y c el número de ciclos. Para obtener la relación final aplicamos la potenciación:

$$10^{\log(p)} = 10^{3.1918 - 0.2483 \log(c)} \rightarrow p = \frac{10^{3.1918}}{10^{0.2483 \log(c)}} = \frac{1555.2}{c^{0.2483}}$$



Si se toma sin la escala se hubiera llegado a

$$\begin{pmatrix} 5 & 2.8921 \\ 2.8921 & 2.1926 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.0325 \\ 5.0955 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 1.9501 \\ b = -0.2483 \end{cases}$$

Nota1: Si se toman neperianos se obtiene el mismo resultado final

$$Y^t = (4.4886 \quad 4.2195 \quad 4.0943 \quad 4.0254 \quad 3.9703)$$

$$X^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11.5129 & 12.6115 & 13.1224 & 13.3847 & 13.5924 \end{pmatrix}$$

esto es

$$\begin{pmatrix} 5 & 64.22 \\ 64.22 & 156.11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.8 \\ 266.5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 7.3494 \\ b = -0.2483 \end{cases} \rightarrow e^{\ln(p)} = e^{7.3494 - 0.2483 \ln(c)} \rightarrow p = \frac{e^{7.3494}}{e^{0.2483 \ln(c)}} = \frac{1555.2}{c^{0.2483}}$$

Si se toma sin la escala se hubiera llegado a

$$\begin{pmatrix} 5 & 6.6593 \\ 6.6593 & 11.625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.7981 \\ 27.0158 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 4.4904 \\ b = -0.2483 \end{cases}$$

Nota2: Si se toman los datos en el orden inverso se minimiza el error de x y los resultados son diferentes (salvo en el caso de rectas)

$$X^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4.4886 & 4.2195 & 4.0943 & 4.0254 & 3.9703 \end{pmatrix}$$

$$Y^t = (11.5129 \quad 12.6115 \quad 13.1224 \quad 13.3847 \quad 13.5924)$$

esto es

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 7 de 9
	Tema	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI) (Evaluación Continua 1ª Prueba)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{pmatrix} 5 & 20.8 \\ 20.8 & 86.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64.2 \\ 266.5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 29.6 \\ b = -4.03 \end{cases}$$

$$e^{\ln(c)} = e^{29.6 - 4.03 \times \ln(p)} \rightarrow c = \frac{e^{29.6}}{e^{4.03 \ln(p)}} = \frac{e^{29.6}}{p^{4.03}} \leftrightarrow p = \frac{e^{29.6/4.03}}{c^{1/4.03}} = \frac{e^{7.35}}{c^{0.2484}}$$

Nota3: Si se toman los datos sin calcular el logaritmo no se puede aplicar una relación lineal

$$\begin{pmatrix} 5 & 23.5 \\ 23.5 & 141.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 326 \\ 1381 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 88.27 \\ b = -4.91 \end{cases}$$

Apartado (d) Integración

Las fórmulas vistas en clase se aplicaban a intervalos que tenían puntos de interpolación equiespaciados, condición que no cumple el ejemplo. Se debe plantear pues la aplicación a los subintervalos individuales. Pero puede ser la regla del trapecio a cada uno de los cuatro subintervalos individuales o también la regla de Simpson a dos subintervalos dobles. Puesto que la mejor será la de mayor orden, se utiliza la regla de Simpson.

$$\begin{aligned} T &= \int_{1 \times 10^5}^{8 \times 10^5} p(c) dc = \int_{1 \times 10^5}^{5 \times 10^5} p(c) dc + \int_{5 \times 10^5}^{8 \times 10^5} p(c) dc \approx \\ &\approx \frac{2 \times 10^5}{3} \left[f(1 \times 10^5) + 4f(3 \times 10^5) + f(5 \times 10^5) \right] + \frac{1.5 \times 10^5}{3} \left[f(5 \times 10^5) + 4f(6.5 \times 10^5) + f(8 \times 10^5) \right] \\ &\approx \frac{2 \times 10^5}{3} [89 + 4 \times 68 + 60] + \frac{1.5 \times 10^5}{3} [60 + 4 \times 56 + 53] \\ &= 4.4917 \times 10^7 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.- Dadas las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t & 0 \leq t \leq 3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{(I)} \quad \begin{cases} y'(t) + y(t) = t & 0 \leq t \leq 3 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{(II)} \quad \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \quad 0 \quad \text{(III)} \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

- Escribir la ecuación diferencial de segundo orden (I) como un sistema de primer orden {0.5 pts}
- Resolver la ecuación diferencial (II) utilizando el método de Euler con $h=1$ {1.5 pts}
- Resolver la ecuación diferencial (II) utilizando el método de Runge Kutta dado por la tabla de Butcher (III) con $h=1$ {2.0 pts}

Apartado (a) Planteamiento como sistema de primer orden

Denotando por $y_1(t) = y(t)$ $y_2(t) = y'(t)$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 8 de 9
	Tema	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI) (Evaluación Continua 1ª Prueba)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{cases} y''(t) = 2y'(t) - y(t) + t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) - y_1(t) + t \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ 2y_2(t) - y_1(t) + t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} Y'(t) = f(t, Y) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Apartado (b) Resolver utilizando Euler

Dada la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = t & 0 \leq t \leq 3 \\ y(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y'(t) = -y(t) + t & 0 \leq t \leq 3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

El método de Euler se escribe como

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_n + hf(t_n, w_n) = w_n + h(-w_n + t_n) \\ w_0 = 0 \end{cases}$$

Aplicándolo a el caso actual

$$y(1) \approx w_1 = w_0 + h(-w_0 + t_0) = 0 + 1(-0 + 0) = 0$$

$$y(2) \approx w_2 = w_1 + h(-w_1 + t_1) = 0 + 1(-0 + 1) = 1$$

$$y(3) \approx w_3 = w_2 + h(-w_2 + t_2) = 1 + 1(-1 + 2) = 2$$

Apartado (c) Resolver utilizando RK

El método pedido es el Método de Runge-Kutta de orden 2 denominado del punto medio o Euler mejorado, y viene dado por

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \begin{cases} w_{n+1} = w_n + hk_2 \\ k_1 = f(t_n, w_n) = -w_n + t_n \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, w_n + \frac{1}{2}hk_1) = -(w_n + \frac{1}{2}hk_1) + (t_n + \frac{1}{2}h) \end{cases}$$

Aplicado al caso particular

$$\begin{cases} k_1 = -w_0 + t_0 = -0 + 0 = 0 \\ k_2 = -(w_0 + \frac{1}{2}hk_1) + (t_0 + \frac{1}{2}h) = -(0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0) + (0 + \frac{1}{2} \cdot 1) = \frac{1}{2} = 0.5 \\ w_1 = w_0 + hk_2 = 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = -w_1 + t_1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = 0.5 \\ k_2 = -(w_1 + \frac{1}{2}hk_1) + (t_1 + \frac{1}{2}h) = -(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}) + (1 + \frac{1}{2} \cdot 1) = \frac{3}{4} = 0.75 \\ w_2 = w_1 + hk_2 = \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1.25 \end{cases}$$

 UNIVERSIDAD DE OVIEDO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS	Asignatura	Métodos Numéricos	Página 9 de 9
	Tema	Grado Ing. Técnicas Mineras (GITEMI) (Evaluación Continua 1ª Prueba)	
	Autor	César Menéndez Fernández	

$$\begin{cases} k_1 = -w_2 + t_2 = -\frac{5}{4} + 2 = \frac{3}{4} = 0.75 \\ k_2 = -\left(w_2 + \frac{1}{2}hk_1\right) + \left(t_1 + \frac{1}{2}h\right) = -\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4}\right) + \left(2 + \frac{1}{2} \cdot 1\right) = \frac{7}{8} = 0.875 \\ w_3 = w_2 + hk_2 = \frac{5}{4} + 1 \cdot \frac{7}{8} = \frac{17}{8} = 2.125 \end{cases}$$