

Material autorizado. Exclusivamente, un libro, que puede contener anotaciones, una calculadora no programable y material de escritura. No se permite utilizar más de un libro, ni calculadoras programables ni hojas sin encuadernar.

Calificación. Cada pregunta se puntúa de 0 a 10 y la nota del examen será la media aritmética. Los resultados que no se justifiquen, o que se obtengan por procedimientos diferentes del indicado, no puntúan. Salvo que se indique otra cosa, debe operar con toda la precisión de la calculadora.

Conteste cada pregunta donde se le indica. Excepcionalmente, si necesita más espacio, utilice papel A4. No entregue hojas de ningún otro formato. En cualquier caso, al terminar el examen, tiene que devolver las tres hojas que le han entregado.

1. Determine, acotando el error de truncamiento de la regla del trapecio, un número de segmentos n que garantice que la regla del trapecio de aplicación múltiple aproxima el valor de la integral $I = \int_0^1 48x^4 - 128x^3 + 96x^2 dx$ con un error verdadero de truncamiento menor que 0.05 . Conteste en la hoja 1 (en la que aparece la fecha).

Notas. Observe que lo importante en este ejercicio es el razonamiento que asegure que el valor de n hallado cumple el requisito pedido. Proporcionar un valor de n sin una justificación válida se puntuará con un cero. Recuerde que

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Se ha obtenido $D = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & -0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 \end{pmatrix}$ como aproximación de la inversa de

la matriz de los coeficientes del sistema $\begin{cases} u + 2v + 3w = 94 \\ 3u - 2v + w = 34 \\ 2u + v - 3w = 5 \end{cases}$. Esta matriz D se

ha utilizado para conseguir una primera aproximación de la solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & -0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 94 \\ 34 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.2 \\ 13.0 \\ 11.8 \end{pmatrix}. \text{ Pero la aproximación es}$$

poco satisfactoria, ya que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17.2 \\ 13.0 \\ 11.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78.6 \\ 37.4 \\ 12.0 \end{pmatrix}$ dista demasiado

de $\begin{pmatrix} 94 \\ 34 \\ 5 \end{pmatrix}$. Aplique tres iteraciones, $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix}$, de la *técnica*

de refinamiento iterativo para mejorar la solución.

Notas. Las únicas operaciones permitidas en este ejercicio son la multiplicación, la suma y la resta de matrices. No está permitido resolver el sistema por ningún método, ni invertir ninguna matriz (se supone que todos saben resolver un sistema 3×3). Opere con toda la precisión de su calculadora, redondeando a *tres cifras significativas* los resultados de cada iteración. Utilice esos valores redondeados en la siguiente iteración. Conteste al dorso.

3. Aplique el método del punto medio (un Runge-Kutta de segundo orden) para resolver el siguiente problema de valores iniciales desde $x = 1$ hasta $x = 1.2$, con tamaño de paso $h = 0.1$.

$$y'' + xy' + y = 6x^2 + 6x \quad ; \quad y(1) = 1 \quad ; \quad y'(1) = 7$$

Opere con toda la precisión de su calculadora y presente los resultados en una tabla, redondeándolos a *tres cifras significativas*. Utilice esos resultados redondeados en los cálculos subsiguientes. Conteste a continuación.

3. Calcule de forma aproximada todas las raíces de $P(x) = x^3 + x + 1$ aplicando una sola iteración del método de Bairstow a ese polinomio (es decir, mejorando una sola vez las estimaciones de r y s de este enunciado). Comience con $r = 0.68$, $s = -1.55$. Opere con toda la precisión de su calculadora y anote los resultados intermedios y finales con *cinco cifras significativas*. Señale claramente cuáles son sus aproximaciones finales para *todas* las raíces del polinomio. Conteste al dorso.