

Primera semana. 1. Vamos a aproximar la función $f(x) = x^4$ mediante su polinomio de Taylor P_n , de orden n , centrado en $a = 1$ (punto base). Normalmente los errores verdaderos son desconocidos, pero, debido a la simplicidad del ejemplo, se pueden calcular en este caso. El ejercicio trata sobre los errores, por lo que es imprescindible que todas las cifras de un resultado sean correctas para que éste se considere válido. Conteste en los espacios en blanco de esta misma hoja. Cada apartado vale 2 puntos. Se pide:

a) Operando con 3 cifras significativas, calcular la estimación de $f(1.11)$ que proporciona el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en $a = 1$. Debe redondear después de cada operación elemental (sumas y productos).

b) Determine la cota del error de truncamiento de la estimación del apartado a) que proporciona la forma de Lagrange para el residuo. Se pide el valor exacto de la mínima cota superior, sin redondeos. Opere con toda la precisión de la calculadora.

c) Determinar el error verdadero de truncamiento de la estimación del apartado a). Se pide el valor exacto de ese error, es decir, sin redondear en el proceso de cálculo del error verdadero de truncamiento. Opere con toda la precisión de la calculadora.

d) Determinar el error verdadero de redondeo de la estimación del apartado a). Se pide el valor exacto de ese error, es decir, sin redondear en el proceso de cálculo del error verdadero de redondeo.

e) Determinar el valor exacto de ξ , en la forma de Lagrange del residuo, para el que se verifica la fórmula de Taylor, $f(1.11) = P_2(1.11) + R_2(1.11)$. Opere con toda la precisión de la calculadora.

Solución. a) El polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en $a = 1$ es $P(x) = 1 + 4(x - 1) + 6(x - 1)^2$, por lo tanto $P(1.11) = 1 + 4 \cdot 0.11 + 6 \cdot 0.0121 = 1.44 + 0.0726 \approx 1.51$.

b) La forma de Lagrange para el residuo nos asegura la existencia de un $\xi \in [1, 1.11]$ tal que $f(1.11) - P(1.11) = \frac{f'''(\xi)}{6}(1.11 - 1)^3$, es decir, $f(1.11) - P(1.11) = 4\xi(1.11 - 1)^3$. Por lo tanto, la mejor cota para el error de truncamiento $f(1.11) - P(1.11)$ corresponde al valor $\xi = 1.11$, es decir, la cota es $4 \cdot 1.11 \cdot 0.11^3 = 0.00590964$.

c) El error de truncamiento es $f(1.11) - P(1.11) = 1.11^4 - (1 + 4 \cdot 0.11 + 6 \cdot 0.11^2) = 0.00547041$.

d) El error total de la aproximación del apartado a) es $1.11^4 - 1.51$; el error total es la suma de los errores de truncamiento y redondeo, luego el error de redondeo es $(1.11^4 - 1.51) - 0.00547041 = 0.0026$. Es obvio que este mismo error de redondeo es el que se aprecia al seguir los cálculos del apartado a), pues solo hay redondeo en la última suma.

e) La fórmula de Taylor, con el resto en la forma de Lagrange, es, en este caso, $0.00547041 = 4\xi(1.11 - 1)^3$, luego $\xi = 1.0275$.

Primera semana. 2. Vamos a estudiar la convergencia de la *iteración simple del punto fijo*, para diferentes valores iniciales, aplicada a la resolución de la ecuación $f(x) = x$, en donde f es la función continua y creciente en toda la recta real cuya gráfica se adjunta. La ecuación no tiene más soluciones que las que se muestran en la figura y no estamos suponiendo que f sea derivable. Conteste en esta hoja, utilizando el dorso si es preciso. a) Mediante la simple inspección de la figura, determine las soluciones de la ecuación $f(x) = x$,

con una cifra significativa. (1 punto) b) Estudie la convergencia de la iteración simple del punto fijo para el valor inicial que se indica en cada uno de los cinco casos siguientes. Lo que se pide es que razone, en cada caso, si se obtendría una sucesión convergente (indicando a qué valor convergería) o divergente (indicando si tendería a $+\infty$, a $-\infty$ o a nada). (5 puntos, el apartado se valora globalmente; si no se razona, no puntúa nada)

I) $x_0 = -4$

II) $x_0 = -2$

III) $x_0 = 0$

IV) $x_0 = 3$

V) $x_0 = 6$ c) Algunas de las soluciones de la ecuación $f(x) = x$ no se podrían obtener mediante la iteración simple del punto fijo (a no ser que acertáramos directamente con la solución *exacta* al seleccionar el valor inicial). Diga cuáles son, razonando la respuesta. (4 puntos)

Solución. a) Las soluciones de la ecuación $f(x) = x$ son las abscisas de los puntos de corte de la gráfica de f con la recta $y = x$; luego las soluciones son $r_1 = -3, r_2 = -1, r_3 = 2$ y $r_4 = 5$.

b) La iteración simple del punto fijo viene dada por $x_{n+1} = f(x_n)$. Puesto que la función f es continua, si la sucesión x_n converge, entonces tiene que converger a un punto fijo de f , pues

$$\lim x_n = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

Por otra parte, al ser f una función creciente, si $x_n < r_i$, entonces $x_{n+1} = f(x_n) < f(r_i) = r_i$; análogamente, si $x_n > r_i$, entonces $x_{n+1} = f(x_n) > f(r_i) = r_i$. Por lo tanto, si $x_0 \in (r_i, r_{i+1})$, entonces $x_n \in (r_i, r_{i+1})$ para todo n .

Caso I). Como la función f no tiene más puntos fijos que los que se muestran en la figura, resulta que $f(x) < x$ para todo $x < -3$. En consecuencia, si el valor inicial pertenece a $(-\infty, -3)$, entonces $x_{n+1} = f(x_n) < x_n$ para todo n , por lo que la sucesión es decreciente y no puede converger (ya que no hay puntos fijos menores que -3). En consecuencia, $\lim x_n = -\infty$.

Caso II). Tenemos $f(x) > x$ para todo $x \in (-3, -1)$, luego $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$ y la sucesión $x_n \in (-3, -1)$ es creciente y acotada, por lo que tiene que ser convergente. Como el límite tiene que ser un punto fijo de f , necesariamente debe ser $\lim x_n = -1$.

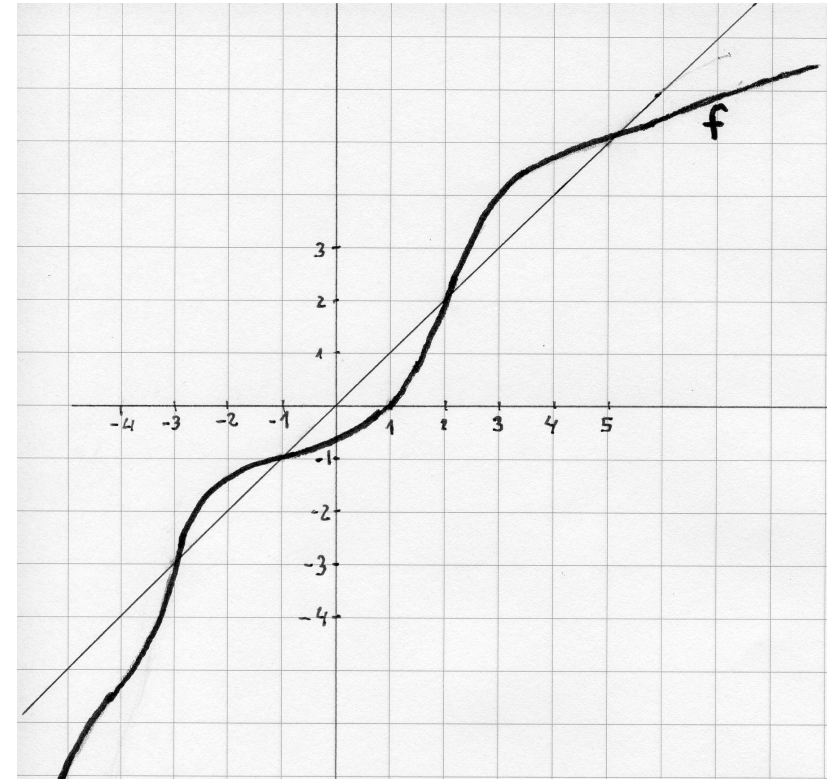
Caso III). Ahora tenemos $f(x) < x$ para todo $x \in (-1, 2)$, luego $x_{n+1} = f(x_n) < x_n$ y la sucesión $x_n \in (-1, 2)$ es decreciente y acotada, por lo que tiene que ser convergente. Como el límite tiene que ser un punto fijo de f , necesariamente debe ser $\lim x_n = -1$.

Caso IV). De nuevo, $f(x) > x$ para todo $x \in (2, 5)$, luego $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$ y la sucesión $x_n \in (2, 5)$ es creciente y acotada, por lo que tiene que ser convergente. Como el límite tiene que ser un punto fijo de f , necesariamente debe ser $\lim x_n = 5$.

Caso V) Una vez más, $f(x) < x$ para todo $x > 5$, luego $x_{n+1} = f(x_n) < x_n$ y la sucesión $x_n \in (5, +\infty)$ es decreciente y acotada, por lo que tiene que ser convergente. Como el límite tiene que ser un punto fijo de f , necesariamente debe ser $\lim x_n = 5$.

c) En el apartado b) se ha razonado para cualquier punto del conjunto $(-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$, no solo para los valores de x_0 que cita el enunciado; hemos visto que en ningún caso la iteración simple fijo converge a $r_1 = -3$, ni a $r_3 = 2$. Por lo tanto, la única posibilidad de que el algoritmo del punto fijo convergiera a uno de esos puntos, sería que el valor inicial fuera precisamente ese punto, de modo que la iteración diera constantemente el mismo valor.

Nota. Se ha observado al corregir un error de concepto consiste en afirmar, más o menos, el siguiente criterio: *para que la iteración simple del punto fijo converja, la pendiente de f en el punto inicial tiene que ser menor que 1*. A parte de la dificultad conceptual que supone hablar de pendiente de una función que no sea derivable, el criterio es erróneo; por ejemplo, si suponemos que f es derivable y escogemos $x_0 = 2.1$, observamos que la pendiente de f en x_0 es mayor que 1, lo que no impide que el algoritmo converja (a $x = 5$, por cierto). Recíprocamente, en $x_0 = -4$ la pendiente es menor que 1 (o si se prefiere, se puede dibujar la gráfica de f de forma que claramente lo sea) y, sin embargo, la iteración del punto fijo tiende a $-\infty$.



Primera semana. 3. Aplique dos iteraciones del método de Newton-Raphson para aproximar la raíz de la ecuación $y(x) = 0$, en donde $y(x)$ es la solución del problema de valores iniciales $y' = y + x^2 + 5$; $y(0) = -1$. Para calcular aproximadamente los valores de $y(x)$ que necesite, aplique el método de Ralston, en un solo paso. Conteste en esta misma cara.

Solución. El planteamiento del problema de valores iniciales nos proporciona los valores de y y de y' en el punto $x_0 = 0$: se tiene $y(x_0) = -1$, $y'(x_0) = y(x_0) + x_0^2 + 5 = 4$.

Primera iteración del método de Newton-Raphson: $x_1 = x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)} = 0 - \frac{-1}{4} = 0.25$.

Segunda iteración del método de Newton-Raphson: $x_2 = x_1 - \frac{y(x_1)}{y'(x_1)}$. Necesitamos calcular aproximadamente los valores de $y(x_1)$ y de $y'(x_1)$, pues la función $y = y(x)$ no se proporciona explícitamente. Aplicamos un paso del método de Ralston. Conocemos el valor de y en el punto $x_0 = 0$ y queremos aproximar esa función en el punto $x_1 = 0.25$ en un solo paso; por lo tanto, escogemos $h = 0.25$ y aplicamos (25.38):

$$k_1 = y_0 + x_0^2 + 5 = 4 \quad ; \quad k_2 = \left(y_0 + \frac{3}{4}k_1h \right) + \left(x_0 + \frac{3}{4}h \right)^2 + 5 = 4.78515625 \quad ; \quad y(x_1) \approx y_1 = y_0 + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2 \right) h = 0.130859375 \quad ; \quad y'(x_1) = y(x_1) + x_1^2 + 5 \approx 5.19335938$$

Podemos aplicar ahora la segunda iteración del método de Newton-Raphson: $x_2 = x_1 - \frac{y(x_1)}{y'(x_1)} = 0.25 - \frac{0.130859375}{5.19335938} = 0.224802557$.

Nota. La solución verdadera del problema de valores iniciales es $y(x) = -x^2 - 2x - 7 + 6e^x$. La ecuación $y(x) = 0$ tiene una única solución en el punto $x = 0.222367586$.

Nota. Pese a las advertencias que se han hecho en el curso virtual, en muchos exámenes se sigue denotando con la misma letra (la “ f ” casi siempre) a distintas funciones que participan en un mismo razonamiento. Se recuerda, una vez más, que la “ f ”, en una expresión como $f(x) = \dots$, es el nombre propio de una función, no una simple abreviatura de la palabra “función”. En próximas convocatorias, la utilización de la misma letra para denotar, en el mismo razonamiento, a funciones completamente diferentes, podrá suponer la anulación del apartado.

Primera semana. 4. Aplique el algoritmo de Thomas para resolver el siguiente sistema tridiagonal

$$\begin{cases} x + 2y = 35 \\ 3x + 4y + 5z = 146 \\ 6y + 7z + 8w = 275 \\ 22z + 10w = 426 \end{cases}$$

Nota. Resolver el sistema por otro procedimiento no puntúa nada (es obvio que todos saben resolver sistemas lineales). Escribir la solución, sin desarrollar los cálculos tampoco puntúa, pero indica que se han utilizado materiales no permitidos. Conteste al dorso.

Solución. Ver sección 11.1.1 del texto-base, P306Ed5-P308Ed5; en particular, el ejemplo 11.1. Escribimos el sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 22 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 146 \\ 275 \\ 426 \end{pmatrix}$$

Descomposición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 - 3 \cdot 2 = -2 & 5 & 0 \\ 0 & 6 / (-2) = -3 & 7 - (-3) \cdot 5 = 22 & 8 \\ 0 & 0 & 22 / 22 = 1 & 10 - 1 \cdot 8 = 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 22 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido la descomposición LU siguiente $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 22 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Sustitución hacia adelante. (de arriba a abajo)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 146 \\ 275 \\ 426 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 146 - 3 \cdot 35 = 41 \\ 275 + 3 \cdot 41 = 398 \\ 426 - 398 = 28 \end{pmatrix}$$

Sustitución hacia atrás (de abajo a arriba)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 41 \\ 398 \\ 28 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (35 - 2 \cdot 12) / 1 = 11 \\ (41 - 5 \cdot 13) / (-2) = 12 \\ (398 - 8 \cdot 14) / 22 = 13 \\ 28 / 2 = 14 \end{pmatrix}$$

Solución: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$

Segunda semana. 1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función de periodo 4 que verifica $f(x) = 6$ para $x \in [0, 2]$, $f(x) = 0$ para $x \in (2, 4)$.

a) Desarrolle la serie de Fourier continua de la función f . (7 puntos)

b) Construya los espectros de amplitud y fase. (2 puntos)

c) Derive término a término la serie del apartado a). ¿Para qué valores de la variable independiente cree que la serie obtenida es convergente?. Si admitimos que la función f se puede aproximar mediante un número finito de términos de la serie del primer apartado, ¿cómo podemos interpretar las funciones que se obtienen sumando un número finito de términos de la serie de este apartado?. (4 puntos)

Conteste en esta misma cara. Este ejercicio tiene 3 puntos *extra*.

Solución. a) Los coeficientes de la serie de Fourier $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{\pi kt}{2}\right) + b_k \sin\left(\frac{\pi kt}{2}\right) \right)$ vienen dados por:

$$a_0 = \frac{\int_0^4 f(t) dt}{4} = \frac{\int_0^2 6 dt}{4} = 3$$

$$a_k = \frac{2}{4} \int_0^4 f(t) \cos\left(\frac{\pi kt}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 6 \cos\left(\frac{\pi kt}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \left[6 \frac{2}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi kt}{2}\right) \right]_{t=0}^{t=2} = 6 \frac{\sin \pi k}{\pi k} = 0 \quad \text{para } k > 0$$

$$b_k = \frac{2}{4} \int_0^4 f(t) \sin\left(\frac{\pi kt}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 6 \sin\left(\frac{\pi kt}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \left[-6 \frac{2}{\pi k} \cos\left(\frac{\pi kt}{2}\right) \right]_{t=0}^{t=2} = -6 \frac{\cos \pi k - 1}{\pi k} = 6 \frac{(-1)^{k+1} + 1}{\pi k} \quad \text{para } k > 0$$

En consecuencia, la serie de Fourier se puede escribir de cualquiera de las siguientes formas

$$3 + \sum_{k=1}^{\infty} 6 \frac{(-1)^{k+1} + 1}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi kt}{2}\right) = 3 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{(2k+1)\pi} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right) = 3 + \frac{12}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{12}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \frac{12}{5\pi} \sin\left(\frac{5\pi t}{2}\right) + \frac{12}{7\pi} \sin\left(\frac{7\pi t}{2}\right) + \dots$$

b) Las amplitudes y las fases son, respectivamente, los módulos y los argumentos de los números complejos $z = a_k - ib_k$. Véanse la sección 19.3 y el cuadro 19.2. Se pueden consultar también el apéndice A en P951ED5 y el documento *Amplitud y fase* del curso virtual.

k	$k = 0$	$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$	$k = 7$	$\dots$
<i>frecuencia</i>	0	$f_0 = \frac{1}{4}$	$3f_0$	$5f_0$	$7f_0$	$\dots$
z_k	3	$\frac{-12i}{\pi}$	$\frac{-12i}{3\pi}$	$\frac{-12i}{5\pi}$	$\frac{-12i}{7\pi}$	$\dots$
<i>amplitud</i>	3	$\frac{12}{\pi}$	$\frac{12}{3\pi}$	$\frac{12}{5\pi}$	$\frac{12}{7\pi}$	$\dots$
<i>fase</i>	0	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\dots$

c) Derivamos término a término la serie del apartado b): $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{(2k+1)\pi} \frac{(2k+1)\pi}{2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} 6 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)$.

Llegando hasta aquí se obtienen los diez puntos de la pregunta. Se consiguen más puntos analizando la serie.

Si t es número entero par, entonces $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)$ es igual a 1 para todo k o a -1 para todo k , luego la serie diverge. Supongamos que t no es un número entero par y simplifiquemos las sumas parciales:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 6 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right) &= \frac{6}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right) = \frac{6}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \sum_{k=0}^n \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2} - \frac{(2k+1)\pi t}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)}{2} = \\ &= \frac{6}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \sum_{k=0}^n \frac{-\sin(\pi t k) + \sin((1+k)t\pi)}{2} = \frac{\sin((n+1)t\pi)}{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \end{aligned}$$

Si t es un número entero impar, entonces $\sin((n+1)t\pi) = 0$ para todo n . Dado un valor fijo de t , que no sea un número entero, el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin((n+1)t\pi)$ no existe. En consecuencia, la serie $\sum_{k=0}^n 6 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)$ únicamente converge cuando t es un número entero impar, es decir, la serie es puntualmente divergente para casi todos los valores de t .

Podría pensarse que la serie del apartado c) carece de significado, pues es divergente para casi todos los valores de t . Sin embargo, es mucho más interesante pensar que evaluar las funciones en puntos concretos (como se viene haciendo en todas las asignaturas de matemáticas de la carrera) resulta un poco antinatural. En realidad, podemos pensar que interesan más los promedios de la función en intervalos, que los valores puntuales. La teoría matemática que desarrolla ese punto de vista es la de las *funciones generalizadas* o *distribuciones*, la más famosa de las cuales es la denominada *delta de Dirac* δ . La delta de Dirac verifica: $\delta(t) = 0$ si $t \neq 0$; $\int_I g(t)\delta(t)dt = g(0)$ si g es continua y el recinto de integración incluye a $t = 0$. Es interesante observar que la serie $\sum_{k=0}^n 6 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)$ es precisamente la serie de Fourier de la función generalizada $\phi(t) = 6(-1)^k \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k)$, que "da saltos" hacia "arriba" para $t = 0, \pm 4, \pm 8, \dots$ y "saltos" hacia "abajo" para $t = \pm 2, \pm 6, \pm 10, \dots$ (¡compruébese!). La función generalizada ϕ es la derivada, en el sentido de las distribuciones, de la función f del enunciado.

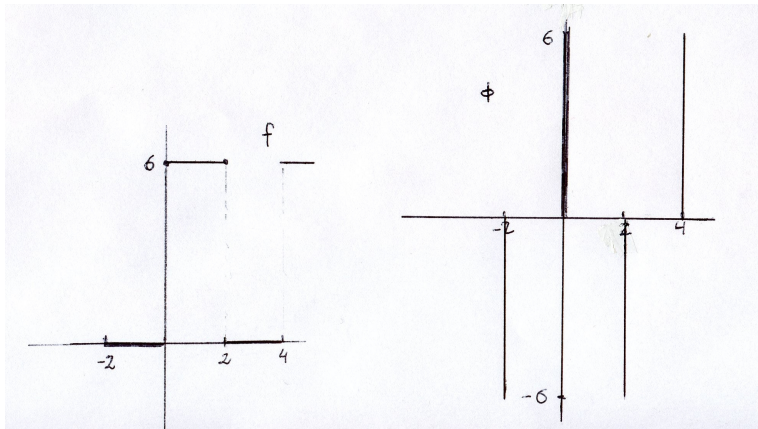


Figure 1: La función f y la función generalizada ϕ .

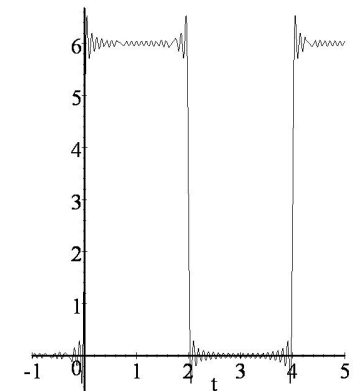


Figure 2: Suma parcial ($n = 20$) de la serie de Fourier de f

Segunda semana. 2. La función $f(x) = \int_{x-1}^x \sqrt{2+t^2-x} \, dt$ tiene un punto de mínimo relativo en el intervalo $[0, 2]$. Determine, de forma aproximada, ese punto de mínimo relativo y el valor mínimo correspondiente, aplicando una iteración del método de optimización por interpolación cuadrática, con nodos $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$. Cada vez que tenga que calcular una integral definida, aproxímela mediante la regla de Simpson 1/3 de aplicación simple. Anote los valores de las integrales y el resultado final con cuatro cifras significativas. Conteste en esta misma cara.

Solución. La optimización mediante interpolación cuadrática consiste en determinar, en cada etapa, el óptimo de un polinomio interpolador de segundo orden, como aproximación del óptimo de la función objetivo. El óptimo (máximo o mínimo) de un polinomio de segundo grado se encuentra en el vértice de la parábola, cuya abscisa viene dada por

$$x_3 = \frac{f(x_0)(x_1^2 - x_2^2) + f(x_1)(x_2^2 - x_0^2) + f(x_2)(x_0^2 - x_1^2)}{2f(x_0)(x_1 - x_2) + 2f(x_1)(x_2 - x_0) + 2f(x_2)(x_0 - x_1)} = \frac{-3f(0) + 4f(1) - f(2)}{-2f(0) + 4f(1) - 2f(2)}$$

(Ver ecuación (13.7) en P371Ed5). También puede razonarse que el mínimo de f se halla en el punto en que se alcanza el máximo de $-f$; evidentemente, la ecuación (13.7) no se altera si sustituye f por $-f$.

Para calcular aproximadamente los valores de $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, utilizamos la regla de Simpson 1/3 de aplicación simple.

$$f(0) = \int_{-1}^0 \sqrt{2+t^2-0} \, dt \simeq (0 - (-1)) \frac{\sqrt{2+(-1)^2} + 4\sqrt{2+(-0.5)^2} + \sqrt{2+0^2}}{6} \simeq 1.524$$

$$f(1) = \int_0^1 \sqrt{2+t^2-1} \, dt \simeq (1 - 0) \frac{\sqrt{1+0^2} + 4\sqrt{1+(0.5)^2} + \sqrt{1+1^2}}{6} \simeq 1.148$$

$$f(2) = \int_1^2 \sqrt{2+t^2-2} \, dt = \int_1^2 t \, dt = (2 - 1) \frac{1 + 4 \times 1.5 + 2}{6} = 1.5$$

Finalmente, la aproximación (en una sola iteración) del punto de mínimo es

$$x_3 = \frac{-3f(0) + 4f(1) - f(2)}{-2f(0) + 4f(1) - 2f(2)} = \frac{-3(1.524) + 4(1.148) - 1.5}{-2(1.524) + 4(1.148) - 2(1.5)} \simeq 1.016$$

El valor mínimo correspondiente es

$$f(1.016) = \int_{1.016-1}^{1.016} \sqrt{2+t^2-1.016} \, dt = \int_{0.016}^{1.016} \sqrt{0.984+t^2} \, dt = (1.016 - 0.16) \frac{\sqrt{0.984+0.016^2} + 4\sqrt{0.984+0.516^2} + \sqrt{0.984+1.016^2}}{6} \simeq 1.147$$

Segunda semana. 3. Aplique el método implícito simple desarrollado en el texto-base, escogiendo Δx y Δt tan grandes como sea posible, para calcular aproximadamente los valores de $T(2, 1), T(3, 1), T(4, 1)$, en donde $T(x, t)$ es la solución del problema $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$; $T(x, 0) = x$; $T(1, t) = 2t + 1$; $T(5, t) = 5 - 4t$. Conteste al dorso.

Solución. Escogemos $\Delta x = 1$, pues los valores de frontera están establecidos para $x = 1, x = 5$ y se nos piden los valores de $T(x, t)$ para $x = 2, 3, 4$; asimismo escogemos $\Delta t = 1$, porque el valor inicial está dado para $t = 0$ y nos piden los valores de $T(x, t)$ para $t = 1$. Para discretizar la ecuación en derivadas parciales $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$ (que corresponde a la ecuación (30.1) con $k = 1$), aproximamos

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{(\Delta x)^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t},$$

en donde $T_i^l \simeq T(1 + i\Delta x, l\Delta t)$, para obtener lo siguiente (ver la sección 30.3 del texto-base, en particular la ecuación (30.8) con $\lambda = 1$)

$$T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1} - (T_i^{l+1} - T_i^l) = 0 \quad \Rightarrow \quad -T_{i+1}^{l+1} + 3T_i^{l+1} - T_{i-1}^{l+1} = T_i^l,$$

en particular, hacemos $l = 0$ para calcular los valores correspondientes a $l = 1$ (o sea, $x = 1$)

$$\begin{aligned} i = 1, l = 0 & \Rightarrow -T_2^1 + 3T_1^1 - T_0^1 = T_1^0 \Rightarrow -T_2^1 + 3T_1^1 - T(1, 1) = T(2, 0) \Rightarrow -T_2^1 + 3T_1^1 - 3 = 2 \Rightarrow -T_2^1 + 3T_1^1 = 5 \\ i = 2, l = 0 & \Rightarrow -T_3^1 + 3T_2^1 - T_1^1 = T_2^0 \Rightarrow -T_3^1 + 3T_2^1 - T_1^1 = T(3, 0) \Rightarrow -T_3^1 + 3T_2^1 - T_1^1 = 3 \\ i = 3, l = 0 & \Rightarrow -T_4^1 + 3T_3^1 - T_2^1 = T_3^0 \Rightarrow -T(5, 1) + 3T_3^1 - T_2^1 = T(4, 0) \Rightarrow -1 + 3T_3^1 - T_2^1 = 4 \Rightarrow 3T_3^1 - T_2^1 = 5 \end{aligned}$$

$$\text{Resolvemos el sistema } \begin{cases} -T_2^1 + 3T_1^1 = 5 \\ -T_3^1 + 3T_2^1 - T_1^1 = 3 \\ 3T_3^1 - T_2^1 = 5 \end{cases} \text{ , para obtener } \begin{cases} T(2, 1) \simeq T_1^1 = \frac{18}{7} = 2.571\,428\,571\,429 \\ T(3, 1) \simeq T_2^1 = \frac{19}{7} = 2.714\,285\,714\,286 \\ T(4, 1) \simeq T_3^1 = \frac{18}{7} = 2.571\,428\,571\,429 \end{cases}$$

Segunda semana. 4. Supongamos que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y creciente y que existen $a < b$ tales que $g(a) > a$, $g(b) < b$. En este ejercicio vamos a probar, por etapas, que la iteración simple del punto fijo, $x_{n+1} = g(x_n)$; $x_0 = b$, converge a una raíz de la ecuación $g(x) = x$. Se pide la demostración de las propiedades a), b) y c), aplicando las propiedades I), II) y III).

a) El conjunto $B = \{x \in [a, b] : g(x) \geq x\}$ tiene supremo y $g(\sup B) = \sup B$. (4 puntos)

b) $x_n \in [\sup B, b]$ para todo n . (3 puntos)

c) x_n converge a $\sup B$. (3 puntos)

I) Si f es continua, toda sucesión convergente (a_n) de su dominio verifica $f(\lim a_n) = \lim f(a_n)$.

II) Si $B \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente y no vacío, entonces tiene supremo (el supremo es el mínimo de las cotas superiores, por lo que existe una sucesión de puntos de B que converge a su supremo).

III) Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.

Conteste en esta hoja.

Solución. a) Aplicamos II). El conjunto B es acotado (pues $B \subset [a, b]$) y no es vacío (pues $a \in B$), por lo tanto, tiene supremo $\sup B \in [a, b]$.

Sea b_n una sucesión de puntos de B que converja $\sup B$ (II). Por una parte, gracias a I), tenemos $g(\sup B) = g(\lim b_n) = \lim g(b_n) \geq \lim b_n = \sup B$. Por otra parte, la sucesión $c_n = \frac{b - \sup B}{n} + \sup B$ está formada por puntos de $[a, b]$ que no están en B , luego, de nuevo por I), se tiene $g(\sup B) = g(\lim c_n) = \lim g(c_n) \leq \lim c_n = \sup B$. En consecuencia, $g(\sup B) = \sup B$.

b) Por inducción sobre n . Para $n = 0$, tenemos $x_0 = b \in [\sup B, b]$. Supongamos que $x_n \in [\sup B, b]$ y comprobemos que entonces $x_{n+1} \in [\sup B, b]$. Como $x_n \geq \sup B$, se tiene que cumplir $g(x_n) \leq x_n$, luego $x_{n+1} = g(x_n) \leq x_n \leq b$. Por otra parte, como g es creciente y $x_n \geq \sup B$, tenemos $x_{n+1} = g(x_n) \geq g(\sup B) = \sup B$.

c) En el apartado b) hemos visto que $x_n \in [\sup B, b]$, luego (x_n) es una sucesión acotada y $g(x_n) \leq x_n$ para todo n (si no, x_n estaría en el interior de B). Por otra parte, (x_n) es decreciente, pues $x_{n+1} = g(x_n) \leq x_n$. Por III), existe el límite $s = \lim x_n \in [\sup B, b]$. Solo falta comprobar que $s \leq \sup B$. Tenemos $g(s) = g(\lim x_n) = \lim g(x_n) = \lim x_{n+1} = s$ (hemos vuelto a aplicar I)), de modo que $s \in B$, lo que implica $s \leq \sup B$.