

Material autorizado. Exclusivamente, un libro, que puede contener anotaciones, una calculadora no programable y material de escritura. No se permite utilizar más de un libro, ni calculadoras programables, ni hojas sin encuadernar.

Calificación. Cada pregunta se puntúa de 0 a 10 y la nota del examen será la media aritmética. Los resultados que no se justifiquen, o que se obtengan por procedimientos diferentes del indicado, no puntúan. Salvo que se indique otra cosa, debe operar con toda la precisión de la calculadora.

Entregue esta hoja al terminar el examen.

1. Utilice diferencias divididas finitas centradas para determinar la distribución de la temperatura en una placa con forma de triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 4cm y se mantienen a 20°C y 40°C respectivamente, mientras que la hipotenusa permanece aislada. Considere $\Delta x = \Delta y = 1\text{cm}$.

2. Se considera en $\mathbb{R}^2$ la norma $\|X\|_p$ y en las matrices 2×2 la norma *natural* correspondiente, $\|A\|_p = \max_{\|X\|_p=1} \|AX\|_p$, en donde los elementos X de $\mathbb{R}^2$ se escriben mediante matrices columna,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Se pide calcular razonadamente los valores de $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ y $\|A\|_\infty$, en donde A es

la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Nota. Recordemos que $\|X\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$, si $p < \infty$, mientras que $\|X\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Se pide *razonar* el resultado, no basta con aplicar fórmulas del libro, aunque es mejor eso que no hacer nada. Una parte del ejercicio consiste en comprobar que las definiciones de $\|A\|_p$ que aparecen en el libro son precisamente las *naturales*.

3. Consideremos la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{6}\right)$. Determine el error relativo porcentual verdadero que se comete al aproximar el valor de $f(1)$ mediante $p(1)$, en donde $p(x)$ es el polinomio de Taylor de orden 9 de la función $f(x)$ alrededor de $x = 0$.

4. Desarrolle *trazadores cuadráticos* (esto es, *splines cuadráticos* o *segmentarias cuadráticas*) para la función $f(x) = \sin(\pi x)$, por los nodos $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Represente gráficamente, en el intervalo $[0, 3]$, la función f y la aproximación g obtenida mediante este método.

Nota. En lugar de la condición suplementaria, $g''(0) = 0$, que aparece en el texto-base, considere $g'(0) = f'(0)$.