

1. En esta pregunta nos vamos a limitar a sumar y multiplicar números enteros. Supondremos que se hacen las operaciones con una calculadora que dispone de una pantalla que presenta 8 dígitos decimales; asumimos que la máquina puede manejar internamente más dígitos, de manera que presenta el resultado de una suma o un producto de enteros sin más error que el de redondear a 8 cifras significativas. La calculadora también opera con notación científica (8 cifras de mantisa y 2 de exponente).

- a) Determine el valor verdadero, el valor aproximado y el error relativo porcentual verdadero al calcular $98\,765\,432 \times 98\,765\,432 - 98\,765\,435 \times 98\,765\,429$ (4 puntos).
b) Desarrolle un procedimiento eficiente para multiplicar (con la calculadora descrita y de forma *exacta*) números enteros *grandes* (por ejemplo, los comprendidos entre 10^8 y 10^{16}) y aplíquelo para calcular el valor exacto de $987\,654\,321\,012 \times 7\,654\,321$ (6 puntos).

Notas. En el apartado b), puede explicar el algoritmo al mismo tiempo que lo aplica. No se admite ningún algoritmo que no pueda aplicarse al ejemplo propuesto en tres minutos. Obtendrá un cero quien empiece un proceso y concluya con una frase del tipo *se continúa de esta manera*. En este apartado la explicación y la aplicación del algoritmo son inseparables. En realidad, ya conoce el algoritmo que se pide: lo ha aprendido en el colegio. La diferencia es que entonces utilizaba la tabla de multiplicar (algo así como una calculadora que admite números de *una* cifra y ofrece resultados de hasta *dos* cifras). Agrupe ahora los dígitos de cuatro en cuatro y adapte el algoritmo que conoce, sin olvidarse de las *llevadas*. En este ejercicio es imprescindible obtener los resultados correctos para conseguir puntos, pero no se obtendrán todos los puntos si el procedimiento no es breve y aplicable en general.

Solución. a) Sea $b = 98\,765\,432$. El valor verdadero es $b^2 - (b + 3)(b - 3) = b^2 - (b^2 - 9) = 9$. Al operar con ocho cifras, se obtiene $b^2 \approx 9.7546106 \times 10^{15}$, $(b + 3)(b - 3) \approx 9.7546106 \times 10^{15}$, luego el valor aproximado es 0. En consecuencia, el error relativo porcentual verdadero es $\varepsilon_t = \frac{9 - 0}{9} 100\% = 100\%$.

b) Aplicamos el algoritmo de multiplicar que se ha aprendido en el colegio, con la particularidad de que la calculadora juega el papel de *tabla de multiplicar* números de cuatro cifras. Agrupamos las cifras de cuatro en cuatro, porque la calculadora puede proporcionar el resultado exacto de multiplicar dos naturales menores que 10^5 . Se trata de operar en base 10^4 . Como no vamos a utilizar 10^4 símbolos diferentes, distribuimos las cifras en bloques de cuatro (cada bloque sería un *dígito* en base 10^4) y, dentro de cada bloque, utilizamos notación decimal. De esta manera, cuando el resultado de una suma o producto de número de cuatro cifras tenga más de cuatro cifras, la quinta y siguientes (desde la derecha, claro) pasan al siguiente bloque como *llevadas* o *acarreo*.

		9876	5432	1012	
		×	765	4321	
	4267	2347	437		
		4196	1672	2852	
755	415	77			
	5140	5480	4180		
		1			
755	9823	2100	6289	2852	

Se han anotado en negrita el acarreo. Por ejemplo, $4321 \times 1012 = 4372852$.
El resultado final es 7559823210062892852

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \int_0^x \frac{t^4}{\sqrt{19+t^4}} dt$. Utilice la extrapolación de Richardson para calcular el valor aproximado de la derivada de f en el punto $x = 3$, a partir de las aproximaciones $O(h^2)$ obtenidas mediante diferencias divididas finitas centradas correspondientes a los tamaños de paso $h = 0.2$ y $h = 0.1$. Utilice la fórmula de Gauss-Legendre de dos puntos para calcular de forma aproximada las integrales definidas que necesite evaluar. Calcule también el error relativo porcentual verdadero de la aproximación de $f'(3)$ obtenida mediante extrapolación de Richardson.

Nota. Excepto para calcular el valor verdadero de $f'(3)$, hay que realizar el ejercicio como si no supiéramos cuál es la derivada de f . Utilice toda la precisión de su calculadora.

Solución. Las estimaciones D_1, D_2 , obtenidas mediante diferencias divididas finitas centradas, y la estimación D_3 , correspondiente a la extrapolación de Richardson, son

$$h = 0.2 \Rightarrow D_1 = \frac{f(3.2) - f(2.8)}{0.4} \quad ; \quad h = 0.1 \Rightarrow D_2 = \frac{f(3.1) - f(2.9)}{0.2} \quad ; \quad D_3 = \frac{4}{3}D_2 - \frac{1}{3}D_1 = \frac{4}{0.6}(f(3.1) - f(2.9)) - \frac{1}{1.2}(f(3.2) - f(2.8)) = \frac{4}{0.6} \int_{2.9}^{3.1} g(t)dt - \frac{1}{1.2} \int_{2.8}^{3.2} g(t)dt$$

En donde $g(t) = \frac{t^4}{\sqrt{19+t^4}}$. Para calcular aproximadamente esas integrales, tenemos que emplear la fórmula de Gauss-Legendre de dos puntos. Para ello, comenzamos haciendo un cambio de variable en la integral, de manera que el intervalo de integración pase a ser el $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned} t = 3 + 0.2s &\Rightarrow \int_{2.8}^{3.2} g(t)dt = \int_{-1}^1 g(3 + 0.2s) 0.2ds \simeq g\left(3 - \frac{0.2}{\sqrt{3}}\right) 0.2 + g\left(3 + \frac{0.2}{\sqrt{3}}\right) 0.2 \simeq 3.244\,930\,758 \\ t = 3 + 0.1s &\Rightarrow \int_{2.9}^{3.1} g(t)dt = \int_{-1}^1 g(3 + 0.1s) 0.1ds \simeq g\left(3 - \frac{0.1}{\sqrt{3}}\right) 0.1 + g\left(3 + \frac{0.1}{\sqrt{3}}\right) 0.1 \simeq 1.620\,616\,056 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $D_3 \simeq \frac{4}{0.6}(1.620\,616\,056) - \frac{1}{1.2}(3.244\,930\,758) \simeq 8.099\,998\,075$

Finalmente, en este caso es sencillo calcular el valor verdadero de $f'(3)$, pues $f'(x) = g(x)$. Así obtenemos, $f'(3) = 8.1$, con lo que $\varepsilon_t = \frac{8.1 - 8.099\,998\,075}{8.1} 100\% \simeq 2.47 \times 10^{-5}\%$

Nota. Se ha observado que muchos de quienes han resuelto este ejercicio han optado por calcular los valores de $f(3.2), f(3.1), f(2.9)$ y $f(2.8)$ mediante el método de Gauss-Legendre. Resulta sorprendente que se elija voluntariamente doblar los cálculos (cuatro integrales) para conseguir un resultado bastante peor (intervalos de mayor amplitud). No obstante, se ha admitido ese procedimiento, mediante el que se obtienen los siguiente resultados:

$$f(3.2) \approx 8.486\,477\,5 \quad , \quad f(3.1) \approx 7.551\,290\,4 \quad , \quad f(2.9) \approx 5.873\,959\,7 \quad , \quad f(2.8) \approx 5.129\,374\,4$$

$$D_1 = \frac{f(3.2) - f(2.8)}{0.4} = 8.392\,757\,6 \quad , \quad D_2 = \frac{f(3.1) - f(2.9)}{0.2} = 8.386\,653\,4 \quad , \quad D_3 = \frac{4}{3}D_2 - \frac{1}{3}D_1 = 8.384\,618\,7$$

3. Sea $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función que verifica $\frac{df(x)}{dx} = x - (f(x))^2$; $f(1) = 2$. Calcule el valor aproximado de la integral de f sobre el intervalo $[1.6, 3.2]$, esto es, $\int_{1.6}^{3.2} f(x)dx$.

Notas. En este ejercicio no está permitido aplicar ningún método numérico que no se encuentre entre los siguientes:

- ◊ Método del disparo con $h = 0.2$.
- ◊ Método de Euler con $h = 0.2$.
- ◊ Transformada rápida de Fourier
- ◊ Regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple.
- ◊ Búsqueda de la sección dorada.

Solución. Comenzamos resolviendo numéricamente el problema de valores iniciales del enunciado $y' = g(x, y); y(1) = 2$, en donde $y = f(x)$, $g(x, y) = x - y^2$. Aplicamos el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.2$. El algoritmo es $y_{i+1} = y_i + (x_i - y_i^2) 0.2$; $x_0 = 1, y_0 = 2$. Así se obtiene:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3	3.2
y_i	2	1.4	1.248	1.2164992	1.2405251	1.2927446	1.3585069	1.4293987	1.5007626	1.5703049	1.6371334	1.7010922

Finalmente, aplicamos el método de Simpson 1/3 para evaluar numéricamente la integral. Disponemos de 9 puntos en el intervalo $[1.6, 3.2]$, incluyendo los extremos, por lo tanto tenemos $n = 8$ subintervalos:

$$\begin{aligned} \int_{1.6}^{3.2} f(x)dx &\approx (x_{11} - x_3) \frac{f(x_3) + 4(f(x_4) + f(x_6) + f(x_8) + f(x_{10})) + 2(f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)) + f(x_{11})}{3n} = \\ &= (3.2 - 1.6) \frac{1.2164992 + 4(1.2405251 + 1.3585069 + 1.5007626 + 1.6371334) + 2(1.2927446 + 1.4293987 + 1.5703049) + 1.7010922}{24} = 2.2966800 \end{aligned}$$

Nota. Teniendo en cuenta la redacción de muchas de las respuestas a esta pregunta, conviene recordar algunos conceptos de la enseñanza básica. Utilizamos dos tipos de notación para referirnos a una función expresada mediante una fórmula: dándole un nombre *propio* a la función, por ejemplo, $f(x) = 3x^2 + 1$ o evitando hacerlo, $y = 3x^2 + 1$ (también se escribe $y(x) = 3x^2 + 1$, sin pretender dar nombre a la función, pero dejando claro cuáles son las variables independientes). Las dos notaciones son útiles y hay que saber optar, en cada caso, por una u otra. Si nos vamos a referir de nuevo a la función en el mismo razonamiento, lo lógico es darle un nombre (por ejemplo f o g), para designarla en adelante como *la función f* o *la función g* . Si vamos a definir varias funciones que no volveremos a citar (como ocurre al dar ejemplos), conviene utilizar la notación de $y = 3x^2 + 1$ (variable dependiente-variable independiente), porque si no, agotaríamos las letras del alfabeto, sin conseguir una exposición más clara.

Recordemos también que la definición precisa de una función exige indicar claramente cuál es su dominio, lo que se puede conseguir mediante una expresión del tipo $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y) = x^2 + y$. Obsérvese que, mediante $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x, y) = x^2 + y$, definimos una función g distinta de f . Cuando nos limitamos a escribir la fórmula, sin indicar explícitamente cuál es el dominio (bien como se acaba de hacer o con palabras), se sobreentiende que el dominio es el mayor conjunto de $\mathbb{R}^n$ (en donde n es el número de variables independientes que aparecen en la fórmula) para el que la fórmula tiene sentido. Por ejemplo, si ponemos $y = 1/x$ o $f(x) = 1/x$, se sobreentiende que la función está definida para cualquier número real distinto de cero. Por cierto, obsérvese que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y) = x^2$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = x^2$ son dos funciones diferentes.

Como conclusión, debe desterrarse la idea de que la f que da nombre a una función es solo una abreviatura de la palabra *función* (como si se estuviera tecleando un mensaje corto de móvil). Por ejemplo, si $y = f(x)$ es la solución del problema de valores iniciales $y' = x - y^2; y(1) = 2$, no podemos, de ninguna manera, llamar también f a la función $g(x, y) = x - y^2$ o a su primitiva $F(x) = \int_0^x f(x) dx$. Al designar con la misma letra (que casualmente siempre es la f) a las distintas funciones que participan en un mismo razonamiento, se confunde quien escribe y dificulta la comprensión del texto.

4. Utilice regresión lineal múltiple para ajustar una circunferencia a los puntos:

x_1	0	0	14	-14
x_2	40	0	34	6

Nota. Lo que se pide es el centro (c_1, c_2) y el radio r de la circunferencia. Debe comenzar definiendo $y = x_1^2 + x_2^2$, $a_0 = r^2 - c_1^2 - c_2^2$.

Solución. Si desarrollamos la expresión general de la circunferencia, $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$, definiendo, como se indica en el enunciado, $y = x_1^2 + x_2^2$, $a_0 = r^2 - c_1^2 - c_2^2$, resulta

$$0 = (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 - r^2 = x_1^2 - 2c_1x_1 + c_1^2 + x_2^2 - 2c_2x_2 + c_2^2 - r^2 = y - 2c_1x_1 - 2c_2x_2 - a_0$$

por lo tanto, resulta conveniente definir $a_1 = 2c_1, a_2 = 2c_2$ y hacer un ajuste lineal $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ (ver sección 17.3). Comenzamos completando la siguiente tabla

					Sumas
x_1	0	0	14	-14	0
x_2	40	0	34	6	80
y	1 600	0	1 352	232	3 184
x_1^2	0	0	196	196	392
x_2^2	1 600	0	1 156	36	2 792
x_1x_2	0	0	476	-84	392
x_1y	0	0	18 928	-3 248	15 680
x_2y	64 000	0	45 968	1 392	111 360

Con estos datos planteamos y resolvemos el sistema (17.22) del texto-base

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 80 \\ 0 & 392 & 392 \\ 80 & 392 & 2792 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3184 \\ 15680 \\ 111360 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 80 \\ 0 & 392 & 392 \\ 0 & 392 & 1192 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3184 \\ 15680 \\ 47680 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 80 \\ 0 & 392 & 392 \\ 0 & 0 & 800 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3184 \\ 15680 \\ 32000 \end{pmatrix}$$

cuya solución es $a_2 = 40, a_1 = 0, a_0 = -4$. En consecuencia, las coordenadas del centro (c_1, c_2) de la circunferencia son $c_1 = \frac{a_1}{2} = 0, c_2 = \frac{a_2}{2} = 20$, mientras que el radio es $r = \sqrt{a_0 + c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{396} = 19.899749$.