

Primera semana. 1. a) Reordene las filas del siguiente sistema de manera que se pueda garantizar la convergencia del método de Gauss-Seidel. (4 puntos)

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 5.2 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 3.7 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0.1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2.4 \end{cases}$$

b) Aplique una iteración del método de Gauss-Seidel al sistema reordenado, comenzando con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. (6 puntos)

Notas. Recuerde que *una iteración* consiste en calcular los nuevos valores de las cuatro variables. Opere con toda la precisión de la calculadora y anote los resultados intermedios con cuatro cifras significativas. Si anota más resultados intermedios de los necesarios, estará incrementando caprichosamente el error, por lo que su puntuación será menor.

Solución. a) Observamos que los mayores elementos (en valor absoluto) de cada fila de la matriz de los coeficientes (marcados en negrita) están en columnas diferentes; por lo tanto, se pueden reordenar las filas de manera que esos elementos queden en la diagonal,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & \mathbf{3} & -1 \\ 1 & -\mathbf{3} & 2 & 0 \\ \mathbf{2} & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -\mathbf{3} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{3} & -1 \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Una condición suficiente para que el método de Gauss-Seidel converja es que la matriz de los coeficientes sea *diagonalmente dominante*, esto es, que se verifique $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^4 |a_{ij}|$ para todo i . La única fila que verifica, en sentido estricto, esa desigualdad, es la tercera, por lo que no se cumple la condición anterior. Esto no significa que el método no converja (se trata de una condición suficiente, no necesaria) (*). En efecto, la matriz A es irreducible (**) y verifica $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^4 |a_{ij}|$, siendo la desigualdad estricta en una de las filas. Esta condición basta para garantizar la convergencia del método de Gauss-Seidel.

Notas. (*) Llegando hasta aquí, se obtienen los 4 puntos del apartado a).

(**) Se dice que una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es irreducible si para cualquier subconjunto propio J del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ existen $i \in J, j \notin J$ tales que $a_{ij} \neq 0$.

b) Aplicamos el método de Gauss-Seidel comenzando con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 2.4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0.1 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 3.7 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 5.2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2.4 + x_2 - x_4}{2} \\ x_2 = \frac{0.1 - x_1 - 2x_3}{-3} \\ x_3 = \frac{3.7 - x_2 + x_4}{3} \\ x_4 = \frac{5.2 - x_1 - x_3}{2} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2.4 + 0 - 0}{2} = 1.2 \\ x_2 = \frac{0.1 - 1.2 - 2 \cdot 0}{-3} = 0.3667 \\ x_3 = \frac{3.7 - 0.3667 + 0}{3} = 1.111 \\ x_4 = \frac{5.2 - 1.2 - 1.111}{2} = 1.444 \end{cases}$$

Primera semana. 2. Se sabe que una cierta función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un único punto de mínimo relativo. Se aplica el algoritmo de *búsqueda de la sección dorada* para encontrar el *mínimo* de la función f y se anotan los resultados en la siguiente tabla, en la que se han reemplazado algunas celdas por letras y otras por asteriscos.

iteraciones	x_l	$f(x_l)$	x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	x_u	$f(x_u)$
$i = 1$	*	*	*	26,0320	2,22746	4,12196	*	*
$i = 2$	*	*	*	A	B	-0,798767	*	*
$i = 3$	*	*	2,04508	C	1,93237	-0,547226	D	E
$i = 4$	F	G	H	0,303477	I	J	K	L
$i = 5$	M	N	O	P	Q	-0,999591	R	S

a) Determine los valores de las celdas ocupadas por letras. (8 puntos)

b) ¿Qué aproximación del valor mínimo proporciona la tabla del apartado anterior? ¿en qué punto se alcanza esa aproximación?. (2 puntos)

Solución. Antes de comenzar, adaptamos a la minimización el criterio de selección de extremos establecido para la maximización ver sección 13.1 del texto-base), para lo cual, basta tener en cuenta que minimizar $f(x)$ equivale a maximizar $-f(x)$ (ver P360+11E5).

Criterio maximización: Si $f(x_1) > f(x_2)$, entonces descartamos x_l ; sólo hay que calcular el nuevo x_1 . En otro caso, descartamos x_u , sólo hay que calcular x_2 .

Criterio minimización: Si $f(x_1) < f(x_2)$, entonces descartamos x_l ; sólo hay que calcular el nuevo x_1 . En otro caso, descartamos x_u , sólo hay que calcular x_2 .

Denotemos con un superíndice la iteración correspondiente. Recuérdese cómo están ordenados, en cada iteración, los puntos : $x_l^i < x_2^i < x_1^i < x_u^i$.

a) Como $f(x_1^1) > f(x_2^1)$, descartamos x_u^1 y hacemos $x_1^2 = x_2^1 = 2,22746$. Por lo tanto, $A = f(x_1^2) = f(x_2^1) = 4,12196$. De nuevo tenemos $f(x_1^2) > f(x_2^2)$, luego, al descartar x_u^2 , resulta $x_1^3 = x_2^2$, $x_u^3 = x_1^2 = 2,22746$, de manera que $B = 2,04508$, $C = -0,798767$, $D = 2,22746$, $E = 4,12196$. De momento tenemos

iteraciones	x_l	$f(x_l)$	x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	x_u	$f(x_u)$
$i = 3$	*	*	2,04508	-0,798767	1,93237	-0,547226	2,22746	4,12196
$i = 4$	F	G	H	0,303477	I	J	K	L

Ahora, $f(x_1^3) < f(x_2^3)$, luego descartamos x_l^3 y resulta $F = x_l^4 = x_2^3 = 1,93237$, $G = f(x_2^3) = -0,547226$, $I = x_2^4 = x_1^3 = 2,04508$, $J = f(x_1^3) = -0,798767$, $K = x_u^4 = x_u^3 = 2,22746$, $L = f(x_u^3) = 4,12196$, $H = x_l^4 = x_l^3 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(x_u^3 - x_l^3) = 2,11475$. Así

iteraciones	x_l	$f(x_l)$	x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	x_u	$f(x_u)$
$i = 4$	1,93237	-0,547226	2,11475	0,303477	2,04508	-0,798767	2,22746	4,12196
$i = 5$	M	N	O	P	Q	-0,999591	R	S

Finalmente, $f(x_1^4) > f(x_2^4)$, luego descartamos x_u^4 y resulta $M = x_l^5 = x_l^4 = 1,93237$, $N = -0,547226$, $O = x_1^5 = x_2^4 = 2,04508$, $P = -0,798767$, $R = x_u^5 = x_l^4 = 2,11475$, $S = 0,303477$, $Q = x_2^5 = x_u^4 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(x_u^4 - x_l^4) = 2,00203$.

iteraciones	x_l	$f(x_l)$	x_1	$f(x_1)$	x_2	$f(x_2)$	x_u	$f(x_u)$
$i = 5$	1,93237	-0,547226	2,04508	-0,798767	2,00203	-0,999591	2,11475	0,303477

b) El menor valor de f hallado en la quinta iteración es $f(x_2^5)$, por lo tanto, la aproximación del valor mínimo es -0,999591 y se alcanza para $x = 2,00203$.

Primera semana. 3. En la siguiente tabla se han anotado los valores aproximados de una cierta función periódica f de periodo 10.

t	0	2	4	6	8	10
$f(t) \approx$	18,03	26,18	29,00	22,59	15,58	17,66

a) Ajuste por mínimos cuadrados (lineales) los datos de la tabla a una senoide de la forma $y = A_0 + C_1 \cos(\omega_0 t + \theta)$. (7 puntos)

b) ¿Para qué valores de t estima que alcanzará $f(t)$ su valor mínimo?, ¿Cuál es ese valor mínimo? (3 puntos)

Notas. En el apartado a) tiene que calcular los valores de ω_0 , A_0 , C_1 y θ . Opere con toda la precisión de la calculadora y anote los resultados intermedios con cuatro cifras significativas. Si anota más resultados intermedios de los necesarios, estará incrementando caprichosamente el error, por lo que su puntuación será menor.

Solución. a) Como el periodo es $T = 10$, la frecuencia angular es $\omega_0 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$. Tenemos que determinar, mediante regresión lineal, tres parámetros: A_0, C_1, θ . La expresión $y = A_0 + C_1 \cos(\omega_0 t + \theta)$ no es lineal respecto de los parámetros. Para conseguir un modelo lineal, desarrollamos el coseno de la suma, $\cos(\omega_0 t + \theta) = \cos(\omega_0 t) \cos(\theta) - \sin(\omega_0 t) \sin(\theta)$, y definimos los parámetros $A_1 = C_1 \cos(\theta)$, $B_1 = -C_1 \sin(\theta)$, de manera que el modelo lineal será $y = A_0 z_0 + A_1 z_1 + B_1 z_2$, en donde $z_0 \equiv 1$, $z_1 = \cos(\omega_0 t)$, $z_2 = \sin(\omega_0 t)$.

En este caso, hay $N = 6$ observaciones espaciadas de manera uniforme a intervalos de amplitud $\Delta t = 2$, por lo tanto (ver (19.14), (19.15) y (19.6)). Construimos la tabla para este ajuste:

t	0	2	4	6	8	10
y	18,03	26,18	29,00	22,59	15,58	17,66
$yz_1 = y \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$	18,03	8,090	-23,46	-18,28	4,814	17,66
$yz_2 = y \sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)$	0	24,90	17,05	-13,28	-14,82	0,000

y obtenemos

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^6 y_i}{6} = 21,51 \quad A_1 = \frac{\sum_{i=1}^6 y_i z_{1i}}{3} = 2,285 \quad B_1 = \frac{\sum_{i=1}^6 y_i z_{2i}}{3} = 4,617$$

Finalmente,

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = 5,151 \\ \cos \theta &= \frac{A_1}{C_1} = 0,4436 \\ \sin \theta &= \frac{-B_1}{C_1} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = -1,111$$

En consecuencia, el ajuste es

$$f(t) = 21,51 + 5,151 \cos(0,6283t - 1,111) .$$

b) El valor mínimo de la expresión anterior se alcanza cuando $\cos(0,6283t - 1,111) = -1$, luego ese valor mínimo es 16,36 (pues $21,51 - 5,151 \approx 16,36$) y se alcanza en un único punto del intervalo $[0, 10]$: el punto t que verifica $0,6283t - 1,111 = \pi$, esto es, $t = 6,769$. Obviamente, también se alcanzará el valor mínimo para $t = 6,769 + 10k$ con $k \in \mathbb{Z}$, pues f es periódica de periodo 10.

Notas. La estimación correcta del valor mínimo *no* es 15,58 para $t = 8$. Obsérvese que f es una función de la que sólo conocemos que es periódica, de periodo 10, y ciertos valores aproximados, que nos permiten hacer un ajuste que proporciona la estimación de f que debemos manejar. Si los valores de la tabla fueran *exactos*, sería más razonable aproximar f mediante interpolación, en vez de regresión. De hecho, el valor obtenido para $t = 8$ es $f(8) = 21,51 + 5,151 \cos(0,6283 \cdot 8 - 1,111) = 17,83 > 16,36$.

Hay que prestar atención al calcular el valor de ángulo θ . En este caso, era fácil acertar sin pensar, pero no es eso lo más recomendable. Por ejemplo, si se hubiera obtenido $A_1 = -3, B_1 = 4, C_1 = 5$, entonces el valor de θ sería $\theta = 2,214$ y no $\theta = -0,9273$.

Primera semana. 4. Sea $a \in \mathbb{R}$. Denotemos por $P_n[f]$ al polinomio de Taylor de orden n , alrededor del punto $x = a$, de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $n + 1$. Denotemos por $R_n[f]$ al correspondiente resto (o *residuo*, en la terminología del texto-base), esto es, $R_n[f](x) = f(x) - P_n[f](x)$, para $x \in \mathbb{R}$. Supongamos que $n \geq 1$.

a) Determine m y g de manera que se pueda asegurar que $\frac{d}{dx} (P_n[f](x)) = P_m[g](x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (3 puntos)

b) Determine m y g de manera que se pueda asegurar que $\frac{d}{dx} (R_n[f](x)) = R_m[g](x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (3 puntos)

c) Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Aplique la forma integral del resto (o residuo) para demostrar que $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x (x-t)^n h(t) dt \right) = \int_a^x n(x-t)^{n-1} h(t) dt$. (4 puntos)

Notas. 1. Se dice que f es de clase m si existen y son continuas las derivadas $f^{(k)}$ para $k = 1, \dots, m$. Recuerde que toda función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tiene primitiva.

3. Se pueden encontrar infinitos pares m, g que satisfacen las condiciones requeridas en los apartados a) y b). Se pide uno de ellos, en cada caso.

2. Lo que cuenta en este ejercicio son los razonamientos. Los resultados que no se razonen con detalle no puntúan.

Solución. a) El polinomio de Taylor es $P_n[f] = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Derivando respecto de x se obtiene

$$\frac{d}{dx} (P_n[f](x)) = f'(a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} = f'(a) + \dots + \frac{(f')^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + \dots + \frac{(f')^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} = P_{n-1}[f'](x)$$

Por lo tanto, se puede escoger $g = f'$, $m = n - 1$.

b) $\frac{d}{dx} (R_n[f](x)) = \frac{d}{dx} (f(x) - P_n[f](x)) = f'(x) - \frac{d}{dx} (P_n[f](x)) = f'(x) - P_{n-1}[f'](x) = R_{n-1}[f'](x)$. Por lo tanto, podemos escoger $g = f'$, $m = n - 1$.

c) Puesto que toda función continua tiene primitiva, existe una función f de clase n tal que $f^{(n+1)} = h$. La forma integral del resto para el polinomio de Taylor $P_n[f]$ es

$$R_n[f](x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Si se aplica la misma fórmula a la función f' , para el resto de orden $n - 1$, se obtiene

$$R_{n-1}[f'](x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f')^{(n)}(t) dt = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Aplicando el apartado b), esto es, $\frac{d}{dx} (R_n[f](x)) = R_{n-1}[f'](x)$, resulta

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Finalmente, multiplicando por $n!$ y poniendo $h = f^{(n+1)}$,

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x (x-t)^n h(t) dt \right) = \int_a^x n(x-t)^{n-1} h(t) dt.$$

Nota. Como cualquiera puede comprobar fácilmente, no es cierto en general que $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x g(x,t) dt \right)$ coincida $\int_a^x \left(\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) \right) dt$, aunque g sea de clase uno. Aplicar esta supuesta propiedad es un error de concepto muy grave.

Segunda semana. 1. Aplique el método de Romberg para estimar el valor de la integral $\int_0^{0.8} 10^x dx$. Utilice como criterio de paro $|\varepsilon_a| < 1\%$, al calcular $I_{j,k}$ para $k > 1$. Calcule el error aproximado relativo porcentual $|\varepsilon_a|$ correspondiente a $I_{j,k}$, con $k > 1$, mediante

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{I_{j,k} - I_{j+1,k-1}}{I_{j,k}} \right| 100\%$$

Notas. Opere con toda la precisión de la calculadora y anote los resultados intermedios con cinco cifras significativas. Es muy fácil calcular el valor verdadero de la integral, y con ello los errores verdaderos, pero no se le pide que lo haga.

Solución. Comenzamos aplicando *dos* veces la regla del trapecio, en uno y dos subintervalos :

$$I_{11} = 0.8 \frac{10^0 + 10^{0.8}}{2} = 2.9238 \qquad I_{21} = 0.8 \frac{10^0 + 2(10^{0.4}) + 10^{0.8}}{4} = 2.4667$$

Obtenemos I_{12} mediante la fórmula de recurrencia (22.8): $I_{12} = \frac{4I_{21} - I_{11}}{4 - 1} = 2.3143$.

El error aproximado es $|\varepsilon_a| = \left| \frac{I_{12} - I_{21}}{I_{12}} \right| 100\% = \left| \frac{2.3143 - 2.4667}{2.3143} \right| 100\% = 6.5851\% > 1\%$, luego continuamos.

Aplicamos la regla del trapecio con *cuatro* subintervalos, para calcular I_{31} (poner *tres* es un error de concepto) y, mediante (22.8), obtenemos I_{22} :

$$I_{31} = 0.8 \frac{10^0 + 2(10^{0.2} + 10^{0.4} + 10^{0.6}) + 10^{0.8}}{8} = 2.3465 \qquad I_{22} = \frac{4I_{31} - I_{21}}{4 - 1} = \frac{4(2.3465) - (2.4667)}{4 - 1} = 2.3064 \qquad |\varepsilon_a| = \left| \frac{I_{22} - I_{31}}{I_{22}} \right| 100\% = 1.7386\% > 1\%$$

De nuevo mediante (22.8), obtenemos I_{13} :

$$I_{13} = \frac{4^2 I_{22} - I_{12}}{4^2 - 1} = 2.3059 \qquad |\varepsilon_a| = \left| \frac{I_{13} - I_{22}}{I_{13}} \right| 100\% = 0.021684\% < 1\%$$

Como el error aproximado es menor que la cota preestablecida, concluimos con la estimación $\int_0^{0.8} 10^x dx \approx I_{13} = 2.3059$.

Notas. 1. No es una buena idea calcular I_{41} (trapecio con *ocho* intervalos) e I_{32} antes que I_{13} ; conseguimos menos exactitud con más cálculos. Antes de duplicar el número de intervalos para la regla del trapecio, hay que aplicar (22.8) todas las veces que sea posible. El orden en el que hay que ir calculando las I_{jk} es el siguiente (ver figura 22.3)

	subintervalos	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	...
$j = 1$	1	1^a	3^a	6^a	10^a	...
$j = 2$	2	2^a	5^a	9^a	...	...
$j = 3$	4	4^a	8^a	...	...	...
$j = 4$	8	7^a	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

2. Es fácil calcular el valor verdadero de la integral: $\int_0^{0.8} 10^x dx = \int_0^{0.8} e^{x \ln 10} dx = \left[\frac{e^{x \ln 10}}{\ln 10} \right]_0^{0.8} = \frac{10^{0.8} - 1}{\ln 10} \approx 2.30592$

Segunda semana. 2. Para resolver el problema de valores iniciales $(y - 20) \frac{dy}{dx} = 100(x - 1); y(0) = 0$, se aplica el método de *Heun sin autoinicio* (sin utilizar modificadores) con tamaño de paso $h = 0.2$, e iterando el *corrector* hasta que el error relativo porcentual aproximado ε_a sea menor, en valor absoluto, que $\varepsilon_s = 0.01\%$. Al ser un método de pasos múltiples, necesitamos un segundo valor para poder empezar, por lo que se aplica un método de Runge-Kutta y se obtiene $y(-0.2) \approx -1,07131$. El resultado de aplicar el método de *Heun sin autoinicio* (valores de y_i^j y de $|\varepsilon_a|$) se refleja en la siguiente tabla, en la que se han rellenado algunas celdas con asteriscos y otras con letras.

j	y_1^j	$ \varepsilon_a $	y_2^j	$ \varepsilon_a $	y_3^j	$ \varepsilon_a $	y_4^j	$ \varepsilon_a $	y_5^j	$ \varepsilon_a $	y_6^j
0	A		*		*		2,57687		2,69637		F
1	0,919478	*	1,66600	0,67%	2,21825	0,88%	2,55774	0,75%	2,67227	0,91%	*
2	0,919276	0,022%	1,66580	0,012%	C	*	2,55761	D	2,67227	0.00%	*
3	B	*	1,66580	0.00%			E	*			*

a) Complete las celdas ocupadas por letras con los valores correctos, indicando *vacía* cuando considere que la celda deba dejarse en blanco. (8 puntos)

b) Aplicando los datos de la tabla, calcule $y(1)$ y también $\frac{dy}{dx}(1)$. (2 puntos)

Notas. 1. Opere con toda la precisión de la calculadora. Hay que redondear los valores de y_i^j que se piden a 6 cifras significativas y los del error relativo porcentual aproximado, a 2 cifras significativas.

2. Se debe completar la tabla siguiendo el orden lógico, es decir, para calcular el valor de una celda (que no deba ir vacía) no está permitido utilizar los valores que figuran en columnas a su derecha, ni por debajo de esa celda en la misma columna. Incumplir esta norma supone utilizar de forma fraudulenta la ayuda que proporciona la tabla, por lo que se puntuará con un cero a quien lo haga.

Solución. Aplicamos (26.13)-(26.14), para resolver de forma aproximada el problema $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$; $y(0) = 0$, en donde $f(x, y) = \frac{100(x - 1)}{y - 20}$.

Comenzamos con los valores $x_0 = 0, y_0^m = 0, x_{-1} = -0,2, y_{-1}^m = -1,07131$, para obtener mediante el *predictor* (26.13): $A = y_1^0 = y_{-1}^m + 0,4 \frac{100(x_0 - 1)}{y_0^m - 20} = 0,928690$.

Se aplica el *corrector* (26.14) y se obtienen y_1^1 e y_1^2 . El error aproximado de este último dato ((26.15)) es $0.022\% > 0.01\%$, por lo que se debe continuar iterando el *corrector*:

$$B = y_1^3 = y_0^m + h \frac{\left(\frac{100(x_0 - 1)}{y_0^m - 20} \right) + \left(\frac{100(x_1 - 1)}{y_1^2 - 20} \right)}{2} = 0 + 0,2 \frac{\left(\frac{100(0 - 1)}{0 - 20} \right) + \left(\frac{100(0,2 - 1)}{0,919276 - 20} \right)}{2} = 0,919271$$

Análogamente, para calcular el valor de C, observamos que $0.88\% > 0.01\%$, por lo que se debe continuar iterando el *corrector*. Observemos que en la columna anterior se ha alcanzado un valor de $|\varepsilon_a|$ menor que 0.01% , por lo que $y_2^m = y_2^3 = 1,66580$. Así tenemos

$$C = y_2^3 = y_2^m + h \frac{\left(\frac{100(x_2 - 1)}{y_2^m - 20} \right) + \left(\frac{100(x_3 - 1)}{y_3^1 - 20} \right)}{2} = 1,66580 + 0,2 \frac{\left(\frac{100(0,4 - 1)}{1,66580 - 20} \right) + \left(\frac{100(0,6 - 1)}{2,21825 - 20} \right)}{2} = 2,21801$$

El valor de D es el del error aproximado correspondiente a y_4^2 . Calculamos ese error mediante (26.15): $|\varepsilon_a| = \left| \frac{y_4^2 - y_4^1}{y_4^2} \right| 100\% = \left| \frac{2,55761 - 2,55774}{2,55761} \right| 100 = 0,0052\% < 0.01\%$. Por lo tanto, termina la iteración del *corrector* y la celda E debe quedar *vacía*. Sin embargo, es un error de concepto grave afirmar que la celda F deba quedar vacía: en $F = y_6^0$ se debe poner la primera aproximación en $x = 1,2$, proporcionada por el *predictor* (26.13), teniendo en cuenta que $y_4^m = y_4^2 = 2,55761$, mientras $y_5^m = y_5^2 = 2,67227$, pues los errores aproximados correspondientes son menores que 0.01% . Así, $F = y_6^0 = y_4^m + 2h \frac{100(x_5 - 1)}{y_5^m - 20} = 2,55761 + 0,4 \frac{100(1 - 1)}{2,67227 - 20} = 2,55761$.

b) Tenemos $x_5 = 0 + 5h = 1$, de manera que la aproximación obtenida para $y(1)$ es $y_5^m = y_5^2 = 2,67227$, mientras que $\frac{dy}{dx}(1) = \frac{100(x_5 - 1)}{y_5^m - 20} = \frac{100(1 - 1)}{y_5^m - 20} = 0$.

Segunda semana. 3. El polinomio de interpolación de una cierta función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por los puntos $x_0, x_1, \dots, x_{39}$ (en donde $x_k = 0.06(k+1)$ para $k = 0, \dots, 39$) es $P(x) = x^{39} - x^9 - 8$. Sabiendo que, para $x_{40} = 0$, se tiene $f(x_{40}) = 2$, calcule el valor de la diferencia dividida finita $f[x_{40}, x_{39}, \dots, x_1, x_0]$ y el de $Q(-0.12)$, en donde $Q(x)$ es el polinomio de interpolación de f por los puntos $x_0, x_1, \dots, x_{39}, x_{40}$.

Notas. Opere con toda la precisión de su calculadora. Se piden resultados numéricos; se puntuará con un cero cualquier respuesta del tipo: *se comienza así ... y se llegaría al resultado operando de la misma manera ...*.

Solución. Gracias a la expresión del polinomio interpolador en la forma de Newton en diferencias divididas (ver (18.15), P509E5), se observa que

$$Q(x) = P(x) + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{39}) f[x_{40}, x_{39}, \dots, x_1, x_0]$$

En particular, para $x = 0$, se tiene $2 = (-8) + (-x_0)(-x_1) \cdots (-x_{39}) f[x_{40}, x_{39}, \dots, x_1, x_0]$. En consecuencia,

$$f[x_{40}, x_{39}, \dots, x_1, x_0] = \frac{10}{x_{39} x_{38} \cdots x_0} = \frac{10}{0.06^{40} 40!} \approx 91.68639909$$

Ahora, para $x = -0.12$, se tiene

$$\begin{aligned} Q(-0.12) &= P(-0.12) + \left(\prod_{k=0}^{39} (0.12 + 0.06(k+1)) \right) f[x_{40}, x_{39}, \dots, x_1, x_0] = P(-0.12) + 0.06^{40} \left(\prod_{k=0}^{39} (2 + (k+1)) \right) \left(\frac{10}{0.06^{40} 40!} \right) = \\ &= P(-0.12) + 0.06^{40} \frac{42!}{2} \left(\frac{10}{0.06^{40} 40!} \right) = P(-0.12) + 42 \cdot 41 \cdot 5 \simeq -8.0000000 + 8610 = 8602.0000000 \end{aligned}$$

Segunda semana. 4. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable sin puntos críticos. El método de Newton-Raphson, que se aplica para resolver aproximadamente el sistema $f(u) = 0$, consiste en reemplazar f por su aproximación de primer orden f_0 alrededor de un cierto punto $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Al resolver el sistema lineal $f_0(u) = 0$, se halla una aproximación $u_1 \in \mathbb{R}^n$ de la solución buscada. Después se repite el proceso reemplazando f por su aproximación de primer orden f_1 alrededor del punto u_1 , y así sucesivamente.

a) Demuestre que el método de Newton-Raphson se puede describir mediante la recurrencia $u_{k+1} = u_k - (f'(u_k))^{-1} f(u_k)$, en donde los elementos de $\mathbb{R}^n$ se expresan como matrices columna. (5 puntos)

b) Aplique una iteración del método de Newton-Raphson al siguiente sistema, comenzando con $u_0 = (0, 0, 0)$. (5 puntos)

$$\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 2y^2 + z = 3 \\ x + y^2 + 2z^2 = 5 \end{cases}$$

Notas. 1. En el apartado a), debe comenzar escribiendo la expresión de la aproximación de primer orden f_k de f alrededor del punto u_k . En el apartado b), debe empezar definiendo la función f . En el libro, el método está razonado para funciones de dos variables; aquí se pide para tres. No intente copiar fórmulas, se trata de leer, entender y repetir el razonamiento.

2. Recuerde que $f'(a)$ es la matriz jacobiana de f en el punto a , esto es, la matriz asociada a la diferencial $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que es una aplicación lineal. Recuerde también que $f'(a)$ está formada por las derivadas parciales de las componentes de f , evaluadas en el punto a .

Solución. a) Supongamos que ya se han obtenido, mediante el método de Newton-Raphson, las aproximaciones $u_0, \dots, u_k$ para resolver la ecuación $f(u) = 0$. La aproximación de primer orden a la función f alrededor de un punto u_k viene dada por el polinomio de Taylor de orden uno: $f_k(u) = f(u_k) + f'(u_k)(u - u_k)$. La ecuación $f_k(u) = 0$ se puede contemplar como la ecuación matricial (lineal) $f(u_k) + f'(u_k)(u - u_k) = 0$, cuya solución es

$$f(u_k) + f'(u_k)(u - u_k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(u_k)(u - u_k) = -f(u_k) \quad \Leftrightarrow \quad (u - u_k) = -(f'(u_k))^{-1} f(u_k) \quad \Leftrightarrow \quad u = u_k - (f'(u_k))^{-1} f(u_k)$$

Por lo tanto, la siguiente aproximación que se obtendría por el método de Newton-Raphson sería $u_{k+1} = u_k - (f'(u_k))^{-1} f(u_k)$.

b) En este caso,

$$n = 3 \quad , \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad f(u) = \begin{pmatrix} x^2 + y - 2 \\ 2y^2 + z - 3 \\ x + y^2 + 2z^2 - 5 \end{pmatrix} \quad , \quad f'(u) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 0 & 4y & 1 \\ 1 & 2y & 4z \end{pmatrix}$$

$$f(u_0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad , \quad f'(u_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (f'(u_0))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$