

1. Se aplica el método (clásico) de Runge-Kutta de 4° orden, con $y = \frac{dx}{dt}$, para resolver el problema $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - x = 3 - t^2$, $x(0) = 5$, $\frac{dx}{dt}(0) = 0$. A continuación aparece parte de la tabla obtenida

t	x	y	k_{11}	k_{12}	k_{21}	k_{22}	k_{31}	k_{32}	k_{41}	k_{42}
0			0,0000	8,000	A	B		8,209		
0,05	5,010	0,4103	0,4103		0,6207		0,6262	8,646	0,8426	C
0,1	D	0,8424		8,874		9,111	1,070	9,123	E	
0,15				9,371	1,533	9,629	1,539	9,642	1,780	9,912
0,2	5,172	1,780	1,780	9,912	2,028	10,19	F	G	2,291	10,50

a) Calcule los valores de las celdas ocupadas por las letras: A, B, C, D, E, F, G . (7 puntos).

b) Determine las aproximaciones de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^3x}{dt^3}$ que facilita la tabla en $t = 0,2$ (3 puntos).

Notas. Observe que $k_i = (k_{i1}, k_{i2})$. La tabla se completa de izquierda a derecha y de arriba abajo.

Solución. a). Aplicando la transformación indicada en el enunciado, el problema unidimensional de segundo orden se convierte en un sistema de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = y \quad ; \quad x(0) = 5$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y - t^2 + 3 \quad ; \quad y(0) = 0,$$

que se escribe en forma vectorial, poniendo $z = (x, y)$, como $\frac{dz}{dt} = f(t, z)$; $z(0) = (5, 0)$, en donde $f(t, z) = f(t, (x, y)) = (y, x + y - t^2 + 3)$.

Obsérvese que el tamaño de paso es $h = 0.05$ y que $t_0 = 0$, $z_0 = (5, 0)$. Operamos con toda la precisión que proporciona la calculadora, redondeando los resultados que se anotan a cuatro cifras significativas.

$$(A, B) = k_2 = f\left(t_0 + \frac{1}{2}h, z_0 + \frac{1}{2}k_1h\right) = f(0 + 0.025, (5, 0) + 0.025(0, 8)) = f(0.025, (5, 0.2)) = (0.2, 5 + 0.2 - 0.025^2 + 3) = (0.2, 8.199)$$

$$C = k_{42} = f_2(t_1 + h, z_0 + k_3h) = f_2(0.05 + 0.05, (5.010, 0.4103) + 0.05(0.6262, 8.646)) = f_2(0.1, (5.041, 0.8426)) = 5.041 + 0.8426 - (0.1)^2 + 3 = 8.874$$

$$D = x_2 = x_1 + \frac{h}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}) = 5.010 + \frac{0.05}{6}(0.4103 + 2(0.6207) + 2(0.6262) + 0.8426) = 5.041$$

$$E = k_{41} = f_1(t_2 + h, z_2 + k_3h) = y_2 + k_{32}h = 0.8424 + (9.123)0.05 = 1.299$$

$$(F, G) = k_3 = f\left(t_4 + \frac{1}{2}h, z_4 + \frac{1}{2}k_2h\right) = f\left(0.2 + \frac{0.05}{2}, (5.172, 1.780) + \frac{0.05}{2}(2.028, 10.19)\right) = f(0.225, (5.223, 2.035)) = (2.035, 10.21)$$

b)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = k_{12} = 9.912$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2t = k_{12} + k_{11} - 0.4 = 9.912 + 1.780 - 0.4 = 11.29$$

2. Obtenga trazadores cúbicos (esto es, segmentarias cúbicas o splines cúbicos) para los datos de la siguiente tabla $\frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right.$. Indique claramente cuál es el resultado obtenido, señalando además dónde están definidos los polinomios que forman la respuesta.

Solución. Denotemos por P a la función que se ajusta a f mediante trazadores cúbicos. Para determinar los valores de las derivadas segundas en los nodos interiores, $x_1 = 1, x_2 = 2$, se plantea, en cada caso, la ecuación (18.37). Recordemos que se imponen las condiciones $P''(0) = P''(3) = 0$.

$$\begin{aligned} i = 1 & \Rightarrow 0 + 2(2-0)P''(1) + P''(2) = \frac{6}{1}(2-1) + \frac{6}{1}(3-1) & \Rightarrow 4P''(1) + P''(2) = 18 \\ i = 2 & \Rightarrow P''(1) + 4P''(2) + 0 = 6(0-2) + 6(1-2) & \Rightarrow P''(1) + 4P''(2) = -18 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene: $P''(1) = 6, P''(2) = -6$. La ecuación (18.36) nos permite escribir directamente el polinomio correspondiente a cada subintervalo

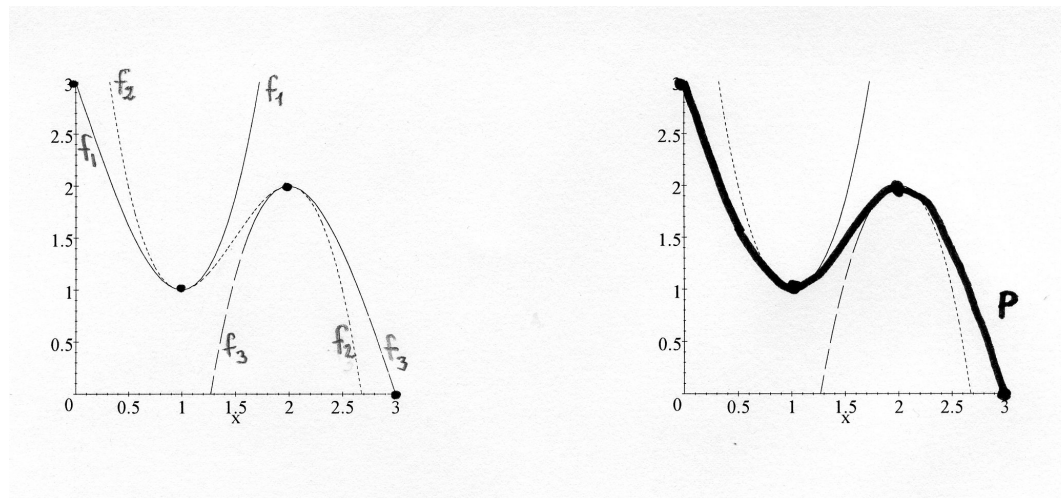
$$P(x) = \begin{cases} \frac{0}{6}(1-x)^3 + \frac{6}{6}(x-0)^3 + \left(3 - \frac{0}{6}\right)(1-x) + \left(1 - \frac{6}{6}\right)(x-0) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{6}{6}(2-x)^3 + \frac{(-6)}{6}(x-1)^3 + \left(1 - \frac{6}{6}\right)(2-x) + \left(2 - \frac{(-6)}{6}\right)(x-1) & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{(-6)}{6}(3-x)^3 + \frac{0}{6}(x-2)^3 + \left(2 - \frac{(-6)}{6}\right)(3-x) + \left(0 - \frac{0}{6}\right)(x-2) & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Simplificando, se obtiene el resultado

$$P(x) = \begin{cases} x^3 + 3(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ (2-x)^3 - (x-1)^3 + 3(x-1) & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -(3-x)^3 + 3(3-x) & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

o si se prefiere

$$P(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -2x^3 + 9x^2 - 12x + 6 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 9x^2 + 24x - 18 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



3. Al aplicar el método de Newton con dos valores iniciales diferentes, para calcular los máximos y los mínimos relativos de una función polinómica de grado cinco f , se obtienen las siguientes tablas

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f''(x_n)$
0	2,5000	1,8880	4,3750	16,125
1	2,2287	1,1829	1,1991	7,7983
2	A	1,0763	0,2748	4,3680
3	2,0120	1,0669	0,0372	3,2065
4	2,0004	1,0667	0,0012	3,0066

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f''(x_n)$
0	-1,5000	-0,7453	7,8750	-25,875
1	-1,1957	0,6632	2,0152	-13,363
2	B	0,8337	0,3631	-8,7058
3	-1,0031	0,8416	0,0237	-7,5818
4	-1,0000	0,8417	0,0001	-7,5004

- a) Calcule los valores de las celdas ocupadas por las letras A, B . (2 puntos)
- b) Sabiendo que el método es convergente en ambos casos, razone si converge, en cada caso, a un mínimo o a un máximo relativo. Diga cuáles son esos puntos de máximo o mínimo relativo y cuáles son los valores correspondientes de la función. (3 puntos)
- c) ¿Cuántos puntos de máximo relativo y cuántos de mínimo relativo tiene la función f en toda la recta real?. Dibuje un boceto de la gráfica de f . Lo que puntúa aquí es el razonamiento. (5 puntos)

Solución. a)

$$A = x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = 2.2287 - \frac{1.1991}{7.7983} = 2.074936 \quad ; \quad B = x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = -1.1957 - \frac{2.0152}{-13.363} = -1.044896$$

b) El método converge a un mínimo relativo cuando el valor inicial es $x_0 = 2.5$, pues la derivada segunda es positiva al converger el método. Cuando $x_0 = -1.5$, el método converge a máximo relativo, ya que la derivada segunda es negativa. El punto de mínimo relativo es $b \simeq 2$ y el valor mínimo relativo correspondiente es $f(b) \simeq 1.0667$. El punto de máximo relativo es $a \simeq -1$ y el valor máximo relativo correspondiente es $f(-1) \simeq 0.8417$. Obsérvese que el valor máximo relativo es menor que el valor mínimo relativo.

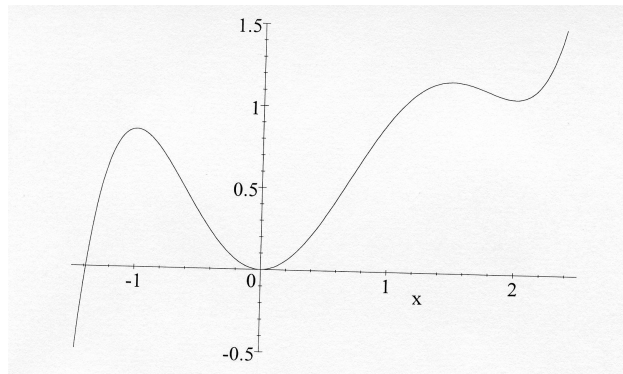
c) Como f es un polinomio de quinto grado, su derivada es un polinomio de grado a cuatro, por lo que f tiene, a lo sumo, cuatro puntos de extremo relativo. Por otra parte, la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ (de hecho, lo es en toda la recta real), por lo que f tiene que alcanzar un valor máximo M y uno mínimo $m < M$ sobre ese intervalo (Teorema de Weierstrass).

Es obvio que M no puede ser igual a $f(a)$, porque $f(a) < f(b)$. Tampoco puede ser $M = f(b)$, porque b es un punto de mínimo relativo. En consecuencia, el valor M se alcanza en algún punto c del intervalo abierto (a, b) .

Análogamente, m no puede ser igual a $f(b)$, porque $f(a) < f(b)$. Tampoco puede ser $m = f(a)$, porque a es un punto de máximo relativo. En consecuencia, el valor m se alcanza en algún punto d del intervalo abierto (a, b) .

Como no puede haber más de cuatro puntos de extremo relativo, podemos asegurar que f tiene exactamente dos puntos mínimo relativo, en $x = a$ y en $x = d$, y dos puntos de máximo relativo, en $x = b$ y en $x = c$.

Para dibujar un boceto de la gráfica, observamos que $c < d$, porque en otro caso, al ser $m \neq M$, podríamos repetir el argumento anterior y encontraríamos dos extremos relativos más en el intervalo (d, c) , lo cual no es posible porque solo existen cuatro extremos relativos. En consecuencia, se obtiene un dibujo similar a este:



4. Aplique dos iteraciones del *método de potencias* para calcular el mayor valor propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2,81 & 2,9 & -2,9 \\ 2,97 & 3,4 & -3,3 \\ 2,709 & 2,91 & -2,81 \end{pmatrix}$, así como su correspondiente vector propio.

Solución.

Primera iteración.

$$\begin{pmatrix} 2,81 & 2,9 & -2,9 \\ 2,97 & 3,4 & -3,3 \\ 2,709 & 2,91 & -2,81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,81 \\ 3,07 \\ 2,809 \end{pmatrix} = 3,07 \begin{pmatrix} 0,915\,309\,4 \\ 1 \\ 0,914\,983\,7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Primera estimación, autovalor dominante $\lambda = 3,07$, autovector correspondiente $v = (2,81, 3,07, 2,809)$ (obviamente, vale cualquier otro con la misma dirección).

Segunda iteración.

$$\begin{pmatrix} 2,81 & 2,9 & -2,9 \\ 2,97 & 3,4 & -3,3 \\ 2,709 & 2,91 & -2,81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,915\,309\,4 \\ 1 \\ 0,914\,983\,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,818\,567 \\ 3,099\,023 \\ 2,818\,469 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Segunda estimación, autovalor dominante $\lambda = 3,099\,023$, autovector correspondiente $v = (2,818\,567, 3,099\,023, 2,818\,469)$ (vale cualquier otro con la misma dirección).