

Material autorizado. Exclusivamente, un libro, que puede contener anotaciones, una calculadora no programable y material de escritura. No se permite utilizar más de un libro, ni calculadoras programables ni hojas sin encuadernar.

Calificación. Cada pregunta se puntúa de 0 a 10 y la nota del examen será la media aritmética. Los resultados que no se justifiquen, o que se obtengan por procedimientos diferentes del indicado, no puntúan. Salvo que se indique otra cosa, debe operar con toda la precisión de la calculadora.

Entregue esta hoja al terminar el examen.

1. Se aplica el método (*clásico*) de Runge-Kutta de 4º orden, con $y = \frac{dx}{dt}$, para resolver el problema $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - x = 3 - t^2$, $x(0) = 5$, $\frac{dx}{dt}(0) = 0$. A continuación aparece parte de la tabla obtenida

t	x	y	k_{11}	k_{12}	k_{21}	k_{22}	k_{31}	k_{32}	k_{41}	k_{42}
0			0,0000	8,000	A	B		8,209		
0,05	5,010	0,4103	0,4103		0,6207		0,6262	8,646	0,8426	C
0,1	D	0,8424		8,874		9,111	1,070	9,123	E	
0,15				9,371	1,533	9,629	1,539	9,642	1,780	9,912
0,2	5,172	1,780	1,780	9,912	2,028	10,19	F	G	2,291	10,50

a) Calcule los valores de las celdas ocupadas por las letras: A, B, C, D, E, F, G . (7 puntos).

a) Determine las aproximaciones de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^3x}{dt^3}$ que facilita la tabla en $t = 0,2$ (3 puntos).

Notas. Observe que $k_i = (k_{i1}, k_{i2})$. La tabla se completa de izquierda a derecha y de arriba abajo.

2. Obtenga trazadores cúbicos (esto es, segmentarias cúbicas o splines cúbicos) para los datos de la siguiente tabla $\frac{x}{f(x)} \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}$. Indique claramente cuál es el resultado obtenido, señalando además dónde están definidos los polinomios que forman la respuesta.

3. Al aplicar el método de Newton con dos valores iniciales diferentes, para calcular los máximos y los mínimos relativos de una función polinómica de grado cinco f , se obtienen las siguientes tablas

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f''(x_n)$	n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f''(x_n)$
0	2,5000	1,8880	4,3750	16,125	0	-1,5000	-0,7453	7,8750	-25,875
1	2,2287	1,1829	1,1991	7,7983	1	-1,1957	0,6632	2,0152	-13,363
2	A	1,0763	0,2748	4,3680	2	B	0,8337	0,3631	-8,7058
3	2,0120	1,0669	0,0372	3,2065	3	-1,0031	0,8416	0,0237	-7,5818
4	2,0004	1,0667	0,0012	3,0066	4	-1,0000	0,8417	0,0001	-7,5004

a) Calcule los valores de las celdas ocupadas por las letras A, B . (2 puntos)

b) Sabiendo que el método es convergente en ambos casos, razone si converge, en cada caso, a un mínimo o a un máximo relativo. Diga cuáles son esos puntos de máximo o mínimo relativo y cuáles son los valores correspondientes de la función. (3 puntos)

c) ¿Cuántos puntos de máximo relativo y cuántos de mínimo relativo tiene la función f en toda la recta real?. Dibuje un boceto de la gráfica de f . Lo que puntúa aquí es el razonamiento. (5 puntos)

4. Aplique dos iteraciones del *método de potencias* para calcular el mayor valor propio de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2,81 & 2,9 & -2,9 \\ 2,97 & 3,4 & -3,3 \\ 2,709 & 2,91 & -2,81 \end{pmatrix}, \text{ así como su correspondiente vector propio.}$$