

Material autorizado. Exclusivamente, un libro, que puede contener anotaciones, una calculadora no programable y material de escritura. No se permite utilizar más de un libro, ni calculadoras programables, ni hojas sin encuadernar.

Calificación. Cada pregunta se puntúa de 0 a 10 y la nota del examen será la media aritmética. Los resultados que no se justifiquen, o que se obtengan por procedimientos diferentes del indicado, no puntúan. Salvo que se indique otra cosa, debe operar con toda la precisión de la calculadora.

Entregue esta hoja al terminar el examen.

1. Se ha obtenido la siguiente tabla, mediante el método (*clásico*) de Runge-Kutta de 4^o orden, para resolver el problema $\frac{dx}{dt} = y + t$, $\frac{dy}{dt} = x + y + t$, $x(1) = 2.1168$, $y(1) = 4.0432$.

t	x	y	k_{11}	k_{12}	k_{21}	k_{22}	k_{31}	k_{32}	k_{41}	k_{42}
1	2.1168	4.0432	5.0432	7.1600	5.2472	7.4901		7.5034	5.4684	7.8479
1.05	2.3794	4.4182		7.8476	5.6893	8.2055	5.6983	8.2200	5.9292	8.5935
1.1	2.6642		5.9289	8.5931	6.1688	8.9812	6.1785	8.9969	6.4288	
1.15	2.9730	5.2785	6.4285	9.4015	6.6886	9.8222	6.6991	9.8393	6.9705	10.278

a) Determine las aproximaciones de $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ que facilita la tabla en $t = 1.1$ (2 puntos).

b) Complete correctamente las 4 celdas vacías, justificando las respuestas (8 puntos).

Notas. Observe que x e y son funciones de t y que k_{i1} , k_{i2} son las componentes de k_i .

2. Aplique *una iteración* del método Bairstow para aproximar **todas** las raíces de la ecuación $x^4 = -4$. Comience con $r = 2$, $s = -3$ (es decir, con $x^2 - 2x + 3$). Compare las aproximaciones obtenidas con las raíces exactas.

Nota: hacer *una iteración*, significa calcular las constantes c_i una sola vez.

3. Aplique una iteración del método de Gauss-Newton (regresión no lineal) para ajustar los valores de la tabla $\frac{x}{y} \begin{array}{c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 6 & 7 \end{array}$ al modelo $y = \frac{ax}{b+x}$. Comience con $a = 6$, $b = 0$.

4. Sea A una matriz $n \times n$ no singular, sin ceros en la diagonal, y B una matriz $n \times 1$. Obviamente, la matriz A se puede escribir de forma única como $A = L + D + U$, en donde D es una matriz diagonal, y L, U son matrices estrictamente triangulares, inferior y superior respectivamente. Para resolver el sistema $AX = B$ mediante la iteración del punto fijo, hay que encontrar dos matrices, M y N , tales que $AX = B \Leftrightarrow X = MX + N$. La fórmula de recurrencia correspondiente sería $X_{k+1} = MX_k + N$, para un cierto valor del inicio X_0 . Las matrices M y N se pueden elegir de diferentes maneras.

Se pide:

a) Hallar unas matrices M y N que den lugar a la misma sucesión (X_k) que el *método de Gauss-Seidel*. Hay que expresar obligatoriamente M, N en función de L, D, U, B .

b) Demostrar que las matrices del apartado a) verifican $AX = B \Leftrightarrow X = MX + N$.

Nota: se dice que una matriz triangular es *estrictamente triangular* si todos los elementos de su diagonal principal son ceros.