

1ª semana. 1. Aplique un método explícito para calcular los valores aproximados de $u(0.3, 1.0)$ y de $\frac{\partial u}{\partial x}(0.3, 1.0)$, en donde $u = u(t, x)$ es la solución del problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(t, 0) = 25, u(0, x) = 25, \frac{\partial u}{\partial t}(t, 2) = 100, \text{ para } t \geq 0, x \in [0, 2].$$

Considere $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.5$. Utilice diferencias divididas finitas centradas para x , y diferencias divididas finitas hacia delante para t .

Solución. Se trata de una ecuación en derivadas parciales parabólica (ver ecuación (30.1)). En este caso tenemos $k = 1, \lambda = k\Delta t/(\Delta x)^2 = 0.4$. Al aproximar la ecuación en derivadas parciales mediante diferencias finitas, como indica el enunciado, se obtiene $u_i^{l+1} = u_i^l + 0.4(u_{i+1}^l - 2u_i^l + u_{i-1}^l)$, en donde el índice i discretiza la variable x , mientras que l discretiza a t , esto es, $u_i^l \approx u(l\Delta t, i\Delta x)$ (ver ecuación (30.5)).

La condición inicial, $u(0, x) = 25$, se aproxima por $u_i^0 = 25$, mientras que las de contorno se discretizan como sigue: $u_0^l = 25, u_4^{l+1} - u_4^l = 10$ (ver ecuación (30.3)).

Al aplicar las expresiones anteriores se obtiene la siguiente tabla:

u_i^l	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$l = 0$	25	25	25	25	25
$l = 1$	25	$25 + 0.4(25 - 2 \times 25 + 25) = 25$	$25 + 0.4(25 - 2 \times 25 + 25) = 25$	$25 + 0.4(25 - 2 \times 25 + 25) = 25$	$25 + 10 = 35$
$l = 2$	25	$25 + 0.4(25 - 2 \times 25 + 25) = 25$	$25 + 0.4(25 - 2 \times 25 + 25) = 25$	$25 + 0.4(35 - 2 \times 25 + 25) = 29$	35 + 10 = 45
$l = 3$		25 + 0.4(25 - 2 \times 25 + 25) = 25	$25 + 0.4(29 - 2 \times 25 + 25) = 26.6$	29 + 0.4(45 - 2 \times 29 + 25) = 33.8	

Así obtenemos $u(0.3, 1.0) \approx u_2^3 = 26.6$. Por otra parte, $\frac{\partial u}{\partial x}(0.3, 1.0) \approx \frac{u(0.3, 1 + \Delta x) - u(0.3, 1 - \Delta x)}{2\Delta x} \approx \frac{u_3^3 - u_1^3}{1} = 33.8 - 25 = 8.8$

Notas. Las celdas de la tabla en las que no aparece el signo $=$, contienen solo datos del enunciado. Para calcular cada una de las otras celdas (excepto las de la columna $i = 4$) hay que utilizar tres casillas: la que está justo encima y las que están a ambos lados de esta última. Para calcular cada celda de la columna $i = 4$, solo hay que utilizar la que tiene justo encima. Los cálculos escritos en negrita solo son necesarios para obtener $(\partial u / \partial x)(0.3, 1.0)$.

1ª semana. 2. a) Sean $f : [x_0, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $x_1 \in (x_0, x_2)$ tal que $f(x_1) \leq f(x_0)$, $f(x_1) \leq f(x_2)$. Demuestre que f alcanza su valor mínimo en algún punto del intervalo abierto (x_0, x_2) .

b) Sea $P(x)$ el polinomio interpolador de 2^0 grado de la función f por los puntos x_0, x_1, x_2 . Demuestre que $P(x)$ alcanza su valor mínimo en $x_3 = \frac{(b+c)f[a,b] - (a+b)f[b,c]}{2(f[a,b] - f[b,c])}$, en donde a, b, c son los puntos x_0, x_1, x_2 escogidos en cualquier orden.

c) Aplique tres iteraciones del método de interpolación cuadrática para calcular aproximadamente un punto de mínimo relativo de la función $f(x) = 4x^3 - 11x^2 - 4x + 12$. Comience con $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, demostrando antes que existe algún punto de mínimo relativo en el intervalo $(-1, 3)$. En cada iteración, utilice la $f[a, b]$ de la iteración anterior. *En este apartado no se permite derivar.*

Puntuación: a) 2 puntos, b) 2 puntos, c) 6 puntos. **Notas:** $f[a, b]$ es la 1ª diferencia dividida finita.

Solución. a) Por ser f continua en el intervalo cerrado $[x_0, x_2]$, alcanza en él su valor mínimo (Teorema de Weierstrass). Si f alcanza su valor mínimo en $x = x_0$ o en $x = x_2$, entonces también lo alcanza en $x = x_1$, pues $f(x_1) \leq f(x_0)$, $f(x_1) \leq f(x_2)$. En todo caso, f alcanza su valor mínimo en algún punto del intervalo abierto (x_0, x_2) .

b) El polinomio interpolador de segundo grado en su forma de Newton es $P(x) = f(a) + f[a, b](x - a) + \frac{f[b, c] - f[a, b]}{c - a}(x - a)(x - b)$. (Ver las ecuaciones (18.3), (18.4), (18.5), (18.6) y (18.12)). En el apartado a) se ha visto que se alcanza el valor mínimo en algún punto del intervalo abierto (x_0, x_2) . Ese punto tiene que ser el que anule la derivada:

$$0 = P'(x) = f[a, b] + \frac{f[b, c] - f[a, b]}{c - a}((2x - (a + b))) \Rightarrow x = \frac{a + b}{2} + \frac{(c - a)f[a, b]}{2(f[a, b] - f[b, c])} = \frac{(a + b)f[a, b] - (a + b)f[b, c] + (c - a)f[a, b]}{2(f[a, b] - f[b, c])} = \frac{(b + c)f[a, b] - (a + b)f[b, c]}{2(f[a, b] - f[b, c])}$$

c) Tenemos $f(x_0) = f(-1) = 1$, $f(x_1) = f(1) = 1$, $f(x_2) = f(3) = 9$; aplicando el apartado a), se deduce que existe algún punto de mínimo relativo en el intervalo $(-1, 3)$. Aplicamos el procedimiento de la sección 13.2, pero reemplazando la expresión (13.7) por la del apartado b). Al final de cada iteración descartaremos un punto de acuerdo con el siguiente criterio: o bien x_0 , o bien x_2 , forman con x_1 y x_3 una terna que cumple las condiciones del apartado a) (la función toma en el punto intermedio un valor menor o igual que en los extremos); descartaremos el otro punto (x_0 o x_2).

$$f(-1) = 1 \qquad f(1) = 1 \qquad f(3) = 9$$

x_0	x_1	x_2	a	b	c	$f[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	$f[b, c] = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$	$x_3 = \frac{(b + c)f[a, b] - (a + b)f[b, c]}{2(f[a, b] - f[b, c])}$	$f(x_3)$	descartado
-1	1	3	-1	1	3	$f[-1, 1] = 0$	$f[1, 3] = \frac{1 - 9}{1 - 3} = 4$	$x_3 = 0$	$f(0) = 12$	x_0 ⁽¹⁾
0	1	3	1	3	0	4	$f[3, 0] = \frac{12 - 9}{0 - 3} = -1$	$x_3 = \frac{3 \times 4 - 4 \times (-1)}{2(4 - (-1))} = 1.6$	$f(1.6) = -6.176$	x_0 ⁽²⁾
1	1.6	3	1	3	1.6	4	$f[3, 1.6] = \frac{-6.176 - 9}{1.6 - 9} = 10.84$	$x_3 = \frac{4.6 \times 4 - 4 \times 10.84}{2(4 - 10.84)} = 1.8245614$		

Nuestra aproximación para el punto de mínimo relativo es $x = 1.8245614$.

Notas. Las celdas de la tabla en las que no aparece un signo " = " contienen datos calculados previamente. Es un ejercicio muy sencillo el comprobar que la función f tiene en $x = 2$ su único punto de mínimo relativo.

(1) La terna $x_0 < x_3 < x_1$ no cumple la condición de que f tome en el punto intermedio x_3 un valor menor o igual que en los extremos.

(2) La terna $x_0 < x_1 < x_3$ no cumple la condición de que f tome en el punto intermedio x_1 un valor menor o igual que en los extremos.

1ª semana. **3.** a) Calcule el polinomio de Taylor de tercer orden, $P(x)$, alrededor del punto $a = 1$, de la función $f(x) = x^4$. Aplique la forma de Lagrange del residuo para determinar el error de truncamiento que se comete al aproximar $f(1.1)$ mediante $P(1.1)$.

b) Calcule el polinomio de Taylor de tercer orden, $Q(x)$, alrededor del punto $a = 1$, de la función

$g(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x$. Aplique la forma de Lagrange del residuo para determinar el error de truncamiento que se comete al aproximar $g(1.1)$ mediante $Q(1.1)$.

Puntuación. Cada apartado vale 5 puntos.

Solución. a) $f(x) = (1 + (x - 1))^4 = 1 + 4(x - 1) + 6(x - 1)^2 + 4(x - 1)^3 + (x - 1)^4$, luego $P(x) = 1 + 4(x - 1) + 6(x - 1)^2 + 4(x - 1)^3$ y $R = (x - 1)^4$.

Como se pide en el enunciado, hay que aplicar la forma de Lagrange del resto: $R = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - 1)^4$; la derivada cuarta de f es constante $f^{(4)}(x) = 4!$, luego $R(x) = (x - 1)^4$, como ya sabíamos. Luego el error de truncamiento es $E_t = f(1.1) - P(1.1) = R(1.1) = (1.1 - 1)^4 = 10^{-4}$.

b) $g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 3$; $g''(x) = 12x^2 - 24x + 12$; $g'''(x) = 24x - 24$, $g^{(4)}(x) = 24$; $g(1) = 0$, $g'(1) = 1$; $g''(1) = 0$; $g'''(1) = 0$, luego $Q(x) = x - 1$. La forma de Lagrange del resto es $R = \frac{g^{(4)}(\xi)}{4!}(x - 1)^4 = (x - 1)^4$, luego el error de truncamiento es $E_t = g(1.1) - Q(1.1) = R(1.1) = (1.1 - 1)^4 = 10^{-4}$.

Notas. Por supuesto, el apartado a) también se puede hacer aplicando la expresión (4.5), tal y como se ha realizado el apartado b). Resolviéndolo de esa manera se pretende poner de manifiesto que los polinomios de Taylor de un polinomio son el resultado de truncarlo (si acaso), después de expresarlo en potencias de $(x - a)$. Un ejercicio sencillo pero interesante es realizar el apartado b) por ese procedimiento.

Obsérvese también que el resto, expresado en la forma de Lagrange, no depende de ξ cuando se hace la aproximación de orden m de un polinomio de grado $n \leq m + 1$.

1ª semana. 4. Sea A una matriz $n \times n$ no singular, sin ceros en la diagonal, y B una matriz $n \times 1$. Obviamente, la matriz A se puede escribir de forma única como $A = L + D + U$, en donde D es una matriz diagonal, y L, U son matrices estrictamente triangulares, inferior y superior respectivamente. Para resolver el sistema $AX = B$ mediante la iteración del punto fijo, hay que encontrar dos matrices, M y N , tales que $AX = B \Leftrightarrow X = MX + N$. La fórmula de recurrencia correspondiente sería $X_{k+1} = MX_k + N$, para un cierto valor del inicio X_0 . Las matrices M y N se pueden elegir de diferentes maneras.

Se pide:

a) Hallar unas matrices M y N que den lugar a la misma sucesión (X_k) que la iteración de Jacobi. Hay que expresar obligatoriamente M, N en función de L, D, U, B .

b) Demostrar que las matrices del apartado a) verifican $AX = B \Leftrightarrow X = MX + N$.

Puntuación. Cada apartado vale 5 puntos. **Nota:** se dice que una matriz triangular es *estrictamente triangular* si todos los elementos de su diagonal principal son ceros.

Solución. a) El algoritmo del método iterativo de Jacobi para resolver el sistema $AX = B$ es $x_i^{k+1} = \frac{b_i - c_i^k}{a_{ii}}$, en donde $c_i^k = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^k$, $A = (a_{ij})$ (matriz $n \times n$), $B = (b_i)$

(matriz $n \times 1$), siendo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, mientras que el índice k se refiere a la iteración, $X_k = (x_i^k)$ (matriz $n \times 1$).

Por una parte, para cada valor de k , tenemos $(c_i^k) = (L + U)X_k$, porque la matriz que se obtiene al reemplazar por ceros la diagonal principal de A es precisamente $L + U$.

Por otra parte, en general, multiplicar una matriz columna por una matriz diagonal equivale a multiplicar cada elemento de la primera por el correspondiente de la diagonal de la otra, mientras que la inversa de una matriz diagonal (d_{ij}) , con $d_{ii} \neq 0$, es otra matriz diagonal (e_{ij}) , con $e_{ii} = 1/d_{ii}$.

Por lo tanto, $X_{k+1} = D^{-1}(B - (L + U)X_k)$, es decir, $X_{k+1} = D^{-1}B - D^{-1}(L + U)X_k$ de donde se obtiene $M = -D^{-1}(L + U)$, $N = D^{-1}B$.

b) $X = MX + N \Leftrightarrow X = -D^{-1}(L + U)X + D^{-1}B \Leftrightarrow DX = -(L + U)X + B \Leftrightarrow (L + D + U)X = B \Leftrightarrow AX = B$.

Nota. En este ejercicio se comprueba que el método de Jacobi es un caso particular de la iteración del punto fijo.

2ª semana. 1. Se ha obtenido la siguiente tabla, mediante el método (*clásico*) de Runge-Kutta de 4^o orden, para resolver el problema:

$$\frac{dx}{dt} = y + t, \quad \frac{dy}{dt} = x + y + t, \quad x(1) = 2.1168, \quad y(1) = 4.0432.$$

t	x	y	k_{11}	k_{12}	k_{21}	k_{22}	k_{31}	k_{32}	k_{41}	k_{42}
1	2.1168	4.0432	5.0432	7.1600	5.2472	7.4901		7.5034	5.4684	7.8479
1.05	2.3794	4.4182		7.8476	5.6893	8.2055	5.6983	8.2200	5.9292	8.5935
1.1	2.6642		5.9289	8.5931	6.1688	8.9812	6.1785	8.9969	6.4288	
1.15	2.9730	5.2785	6.4285	9.4015	6.6886	9.8222	6.6991	9.8393	6.9705	10.278

a) Determine las aproximaciones de $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ que facilita la tabla en $t = 1.1$ (2 puntos).

b) Complete correctamente las 4 celdas vacías, justificando las respuestas (8 puntos).

Notas. Observe que x e y son funciones de t y que k_{i1} , k_{i2} son las componentes de k_i .

Solución. El tamaño de paso (para la variable independiente t) que se observa en la tabla es $h = 0.05$. Consideremos la variable bidimensional $z = (x, y)$. El algoritmo del método de Runge-Kutta de cuarto orden (clásico) es

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad ; \quad k_1 = f(t_i, z_i) \quad ; \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, z_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \quad ; \quad k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, z_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \quad ; \quad k_4 = f(t_i + h, z_i + k_3h)$$

en donde $f(t, z) = (f_1(t, (x, y)), f_2(t, (x, y))) = (y + t, x + y + t)$, $t_i = 1 + 0.05i$, siendo $z_i = (x_i, y_i)$ la estimación para $(x(t_i), y(t_i))$, $i = 0, 1, \dots$

a) Por el planteamiento del problema, $\frac{dy}{dt} = f_2(t, (x, y))$, luego $\frac{dy}{dt}(1.1) \approx f_2(t_2, (x_2, y_2)) = k_{12} = 8.5931$.

Por otra parte, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 1$, luego $\frac{d^2y}{dt^2}(t_2) \approx k_{11} + k_{12} + 1 = 5.9289 + 8.5931 + 1 = 15.522$.

b) Se aplica el algoritmo anterior:

$$i = 0 \quad k_{31} = f_1\left(t_0 + \frac{1}{2}h, \left(x_0 + \frac{1}{2}k_{21}h, y_0 + \frac{1}{2}k_{22}h\right)\right) = \left(y_0 + \frac{1}{2}k_{22}h\right) + \left(t_0 + \frac{1}{2}h\right) = \left(4.0432 + \frac{0.05}{2}7.4901\right) + \left(1 + \frac{0.05}{2}\right) = 5.2555$$

$$i = 1, \quad k_{11} = f_1(t_1, (x_1, y_1)) = y_1 + t_1 = 4.4182 + 1.05 = 5.4682.$$

$$i = 2, \quad y_2 = y_1 + \frac{h}{6} (k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}) = 4.4182 + \frac{0.05}{6} (7.8476 + 2 \times 8.2055 + 2 \times 8.2200 + 8.5935) = 4.8290$$

$$i = 2, \quad k_{42} = f_2(t_2 + h, (x_2 + k_{31}h, y_2 + k_{32}h)) = (x_2 + k_{31}h) + (y_2 + k_{32}h) + (t_2 + h) = (2.6642 + 6.1785 \times 0.05) + (4.8290 + 8.9969 \times 0.05) + (1.1 + 0.05) = 9.4020$$

Notas. La solución *verdadera* del problema es $x(t) = -1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}e^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)t}$, $y(t) = -t + e^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)t}$.

La tabla se debe completar de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

2ª semana. 2. Aplique *una iteración* del método Bairstow para aproximar **todas** las raíces de la ecuación $x^4 = -4$. Comience con $r = 2, s = -3$ (es decir, con $x^2 - 2x + 3$). Compare las aproximaciones obtenidas con las raíces exactas.

Nota: hacer *una iteración*, significa calcular las constantes c_i una sola vez.

Solución. Dividimos sintéticamente $P(x) = x^4 + 4$ entre $d(x) = x^2 - 2x + 3$, aplicando el algoritmo $b_k = a_k + 2b_{k+1} - 3b_{k+2}$ (aquí a_k son los coeficientes de $P(x)$)

$$b_k = 0, k \geq 5 \quad , \quad b_4 = 1 + 0 + 0 = 1, \quad , \quad b_3 = 0 + 2 + 0 = 2 \quad , \quad b_2 = 0 + 4 - 3 = 1 \quad , \quad b_1 = 0 + 2 - 6 = -4 \quad , \quad b_0 = 4 - 8 - 3 = -7.$$

Se divide de nuevo el cociente entre $d(x)$ para mejorar los valores iniciales de r y s (transformándolos respectivamente en $r + \Delta r$, $s + \Delta s$); ahora $c_k = b_k + 2c_{k+1} - 3c_{k+2}$

$$c_4 = 1 + 0 + 0 = 1, \quad c_3 = 2 + 2 + 0 = 4 \quad c_2 = 1 + 8 - 3 = 6 \quad c_1 = -4 + 12 - 12 = -4$$

Los incrementos Δr , Δs son las soluciones del siguiente sistema

$$\begin{aligned} c_2 \Delta r + c_3 \Delta s &= -b_1 \\ c_1 \Delta r + c_2 \Delta s &= -b_0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 6\Delta r + 4\Delta s &= 4 \\ -4\Delta r + 6\Delta s &= 7 \end{aligned} \Rightarrow \Delta r = -\frac{1}{13} \approx -0.07692308, \Delta s = \frac{29}{26} \approx 1.115385.$$

Los valores mejorados de r y s son $r = 2 - 0.07692308 = 1.923077, s = -3 + 1.115385 = -1.884615$. Las raíces del polinomio $x^2 - rx - s$ serán las estimaciones que obtendremos de dos de las raíces de $P(x)$ (con una sola iteración del método)

$$x^2 - rx - s = 0 \Rightarrow x^2 - 1.923077x + 1.884615 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.9615385 + 0.9798259i, \quad x_2 = 0.9615385 - 0.9798259i$$

Como el polinomio $P(x)$ es simétrico, i.e. $P(-x) = P(x)$, las otras dos raíces serán $x_3 = -x_1, \quad x_4 = -x_2$. En consecuencia, las estimaciones obtenidas para las cuatro raíces de la ecuación $x^4 = -4$ son $x = \pm 0.9615385 \pm 0.9798259i$.

Las raíces *verdaderas* de la ecuación son $x = \pm 1 \pm i$, por lo que el error relativo verdadero que se comete en cada una de las cuatro estimaciones es

$$|E_t| = \frac{\|(1+i) - (0.9615385 + 0.9798259i)\|}{\|1+i\|} = \frac{\sqrt{(0.0384615)^2 + (0.0201741)^2}}{\sqrt{2}} = 0.0307106 \approx 3\%$$

Notas.

1) En general, una vez que se ha terminado de iterar el algoritmo de Bairstow para aproximar dos de las raíces (en este ejercicio solo hacíamos una iteración), habría que *deflactar* el polinomio $P(x)$, dividiéndolo entre $x^2 - rx - s$ (con las *últimas* r y s). Así se obtendría un cociente, cuyo grado sería dos unidades menor, y podríamos volver a iterar el procedimiento (con unas nuevas r y s). Terminaríamos cuando el cociente tuviera grado menor o igual dos. En el ejercicio que nos ocupa, no ha sido necesario deflactar el polinomio, porque es simétrico; no obstante, esto sería lo que habría que hacer si se elige la *deflactación*: se aplicaría el algoritmo de la división sintética: $d_k = a_k + 1.923077 d_{k+1} - 1.884615 d_{k+2}$
 $d_4 = 1, \quad d_3 = 0 + 1.923077 = 1.923077, \quad d_2 = 0 + 1.923077 \times 1.923077 - 1.884615 = 1.81361 \Rightarrow$ cociente: $x^2 + 1.923077x + 1.813609 \Rightarrow$; raíces: $x = -0.9615385 \pm 0.9428959i$.
 Obsérvese que las estimaciones no son exactamente iguales a las obtenidas antes.

2) El algoritmo para la división sintética de un polinomio $D(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, en donde $a_k = 0$ para todo $k > n$ (grado de D), entre $d(x) = x^2 - rx - s$ viene dado por la fórmula $b_k = a_k + rb_{k+1} + sb_{k+2}$, en donde $C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2} x^k$ es el cociente y $R(x) = b_1(x - r) + b_0$ es el resto, esto es, $D(x) = C(x)d(x) + R(x)$. Obviamente $b_k = 0$ para todo $k > n$.

2ª semana. 3. Aplique una iteración del método de Gauss-Newton (regresión no lineal) para ajustar los valores de la tabla $\frac{x}{y} \begin{array}{c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 6 & 7 \end{array}$ al modelo $y = \frac{ax}{b+x}$. Comience con $a = 6, b = 0$.

Solución. Tenemos que aplicar imperativamente el método de Gauss-Newton (sección 17.5). El modelo propuesto, de razón de crecimiento, es $f(a, b, x) = \frac{ax}{b+x}$.

Calculamos las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{x}{b+x}$, $\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{-ax}{(b+x)^2}$. Las matrices Z_1 y D son

$$Z_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a}(6, 0, 1) & \frac{\partial f}{\partial b}(6, 0, 1) \\ \frac{\partial f}{\partial a}(6, 0, 2) & \frac{\partial f}{\partial b}(6, 0, 2) \\ \frac{\partial f}{\partial a}(6, 0, 3) & \frac{\partial f}{\partial b}(6, 0, 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0+1} & \frac{-6 \times 1}{(0+1)^2} \\ \frac{2}{0+2} & \frac{-6 \times 2}{(0+2)^2} \\ \frac{3}{0+3} & \frac{-6 \times 3}{(0+3)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} y_1 - \frac{ax_1}{b+x_1} \\ y_2 - \frac{ax_2}{b+x_2} \\ y_3 - \frac{ax_3}{b+x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{6 \times 1}{0+1} \\ 6 - \frac{6 \times 2}{0+2} \\ 7 - \frac{6 \times 3}{0+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, las ecuaciones normales, $Z_1^T Z_1 (\Delta A) = Z_1^T D$, se resuelven como sigue

$$\begin{aligned} \Delta A &= (Z_1^T Z_1)^{-1} Z_1^T D = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -11 & 49 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{49}{26} & \frac{11}{26} \\ \frac{11}{26} & \frac{3}{26} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{13} \\ \frac{6}{13} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.692308 \\ 0.4615385 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Los nuevos valores de a y b son $a = 6 + 1.692308 = 7.692308$, $b = 0 + 0.4615385 = 0.4615385$, por lo que el ajuste obtenido, con una sola iteración del método, es

$$y = \frac{7.692308 x}{0.4615385 + x}.$$

Nota. El modelo de razón de crecimiento se puede *linealizar*, pero aquí no se admite ese procedimiento, porque el enunciado impone claramente que se haga por el método de Gauss-Newton. El modelo quedaría $\frac{1}{y} = \frac{b+x}{ax} = \frac{b}{a} \frac{1}{x} + \frac{1}{a}$. Denotando $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$, obtendríamos un modelo lineal $v = \frac{b}{a} u + \frac{1}{a}$. La tabla correspondiente sería $\frac{u}{v} \begin{array}{c|c} 1 & 1/2 & 1/3 \\ \hline 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{array}$.

Si se aplica regresión lineal a esta tabla, se obtiene la recta $v = 0.0813 u + 0.1201$. Por lo tanto, $a = \frac{1}{0.1201} = 8.326$; $b = \frac{0.0813}{0.1201} = 0.6769$, con lo que se obtendría el ajuste

$$y = \frac{8.326 x}{0.6769 + x}.$$

2ª semana. 4. Sea A una matriz $n \times n$ no singular, sin ceros en la diagonal, y B una matriz $n \times 1$. Obviamente, la matriz A se puede escribir de forma única como $A = L + D + U$, en donde D es una matriz diagonal, y L, U son matrices estrictamente triangulares, inferior y superior respectivamente. Para resolver el sistema $AX = B$ mediante la iteración del punto fijo, hay que encontrar dos matrices, M y N , tales que $AX = B \Leftrightarrow X = MX + N$. La fórmula de recurrencia correspondiente sería $X_{k+1} = MX_k + N$, para un cierto valor del inicio X_0 . Las matrices M y N se pueden elegir de diferentes maneras.

Se pide:

a) Hallar unas matrices M y N que den lugar a la misma sucesión (X_k) que el *método de Gauss-Seidel*. Hay que expresar obligatoriamente M, N en función de L, D, U, B .

b) Demostrar que las matrices del apartado a) verifican $AX = B \Leftrightarrow X = MX + N$.

Nota: se dice que una matriz triangular es *estrictamente triangular* si todos los elementos de su diagonal principal son ceros.

Solución. a) El algoritmo del método de Gauss-Seidel para resolver el sistema $AX = B$ es $x_i^{k+1} = \frac{b_i - c_i^k - d_i^k}{a_{ii}}$, en donde $c_i^k = \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{k+1}$, $d_i^k = \sum_{j > i} a_{ij} x_j^k$, $A = (a_{ij})$ (matriz $n \times n$), $B = (b_i)$ (matriz $n \times 1$), siendo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, mientras que el índice k se refiere a la iteración, $X_k = (x_i^k)$ (matriz $n \times 1$).

Por una parte, para cada valor de k , tenemos $(c_i^k) = L X_{k+1}$, $(d_i^k) = U X_k$. Por otra parte, en general, multiplicar una matriz columna por una matriz diagonal equivale a multiplicar cada elemento de la primera por el correspondiente de la diagonal de la otra, mientras que la inversa de una matriz diagonal (d_{ij}) , con $d_{ii} \neq 0$, es otra matriz diagonal (e_{ij}) , con $e_{ii} = 1/d_{ii}$.

Por lo tanto, $X_{k+1} = D^{-1}(B - U X_k - L X_{k+1})$, es decir, $D X_{k+1} = B - U X_k - L X_{k+1}$. Por lo tanto, $(D + L) X_{k+1} = B - U X_k$, de donde $X_{k+1} = (D + L)^{-1} B - (D + L)^{-1} U X_k$. En consecuencia, $M = -(D + L)^{-1} U$, $N = (D + L)^{-1} B$.

b) $X = MX + N \Leftrightarrow X = -(D + L)^{-1} U X + (D + L)^{-1} B \Leftrightarrow (D + L) X = -U X + B \Leftrightarrow (L + D + U) X = B \Leftrightarrow AX = B$.

Nota. En este ejercicio se comprueba que el método de Gauss-Seidel es un caso particular de la iteración del punto fijo.