

Material autorizado. Exclusivamente, un libro, que puede contener anotaciones, una calculadora no programable y material de escritura. No se permite utilizar más de un libro, ni calculadoras programables ni hojas sin encuadernar.

Calificación. Cada pregunta se puntúa de 0 a 10 y la nota del examen será la media aritmética. Los resultados que no se justifiquen, o que se obtengan por procedimientos diferentes del indicado, no puntúan. Salvo que se indique otra cosa, debe operar con toda la precisión de la calculadora.

Entregue esta hoja al terminar el examen.

1. Aplique un método explícito para calcular los valores aproximados de $u(0.3, 1.0)$ y de $\frac{\partial u}{\partial x}(0.3, 1.0)$, en donde $u = u(t, x)$ es la solución del problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(t, 0) = 25, \quad u(0, x) = 25, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, 2) = 100, \quad \text{para } t \geq 0, x \in [0, 2].$$

Considere $\Delta t = 0.1, \Delta x = 0.5$. Utilice diferencias divididas finitas centradas para x , y diferencias divididas finitas hacia delante para t .

2. a) Sean $f : [x_0, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $x_1 \in (x_0, x_2)$ tal que $f(x_1) \leq f(x_0)$, $f(x_1) \leq f(x_2)$. Demuestre que f alcanza su valor mínimo en algún punto del intervalo abierto (x_0, x_2) .

b) Sea $P(x)$ el polinomio interpolador de 2º grado de la función f por los puntos x_0, x_1, x_2 . Demuestre que $P(x)$ alcanza su valor mínimo en $x_3 = \frac{(b+c)f[a, b] - (a+b)f[b, c]}{2(f[a, b] - f[b, c])}$, en donde a, b, c son los puntos

x_0, x_1, x_2 escogidos en cualquier orden.

c) Aplique tres iteraciones del método de interpolación cuadrática para calcular aproximadamente un punto de mínimo relativo de la función $f(x) = 4x^3 - 11x^2 - 4x + 12$. Comience con $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, demostrando antes que existe algún punto de mínimo relativo en el intervalo $(-1, 3)$. En cada iteración, utilice la $f[a, b]$ de la iteración anterior. *En este apartado no se permite derivar.*

Puntuación: a) 2 puntos, b) 2 puntos, c) 6 puntos. **Notas:** $f[a, b]$ es la 1ª diferencia dividida finita.

3. a) Calcule el polinomio de Taylor de tercer orden, $P(x)$, alrededor del punto $a = 1$, de la función $f(x) = x^4$. Aplique la forma de Lagrange del residuo para determinar el error de truncamiento que se comete al aproximar $f(1.1)$ mediante $P(1.1)$.

b) Calcule el polinomio de Taylor de tercer orden, $Q(x)$, alrededor del punto $a = 1$, de la función $g(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x$. Aplique la forma de Lagrange del residuo para determinar el error de truncamiento que se comete al aproximar $g(1.1)$ mediante $Q(1.1)$.

Puntuación. Cada apartado vale 5 puntos.

4. Sea A una matriz $n \times n$ no singular, sin ceros en la diagonal, y B una matriz $n \times 1$. Obviamente, la matriz A se puede escribir de forma única como $A = L + D + U$, en donde D es una matriz diagonal, y L, U son matrices estrictamente triangulares, inferior y superior respectivamente. Para resolver el sistema $AX = B$ mediante la iteración del punto fijo, hay que encontrar dos matrices, M y N , tales que $AX = B \Leftrightarrow X = MX + N$. La fórmula de recurrencia correspondiente sería $X_{k+1} = MX_k + N$, para un cierto valor del inicio X_0 . Las matrices M y N se pueden elegir de diferentes maneras.

Se pide:

a) Hallar unas matrices M y N que den lugar a la misma sucesión (X_k) que la iteración de Jacobi. Hay que expresar obligatoriamente M, N en función de L, D, U, B .

b) Demostrar que las matrices del apartado a) verifican $AX = B \Leftrightarrow X = MX + N$.

Puntuación. Cada apartado vale 5 puntos. **Nota:** se dice que una matriz triangular es *estrictamente triangular* si todos los elementos de su diagonal principal son ceros.