

Material autorizado. Exclusivamente, un libro, que puede contener anotaciones, una calculadora no programable y material de escritura. No se permite utilizar más de un libro, ni calculadoras programables ni hojas sin encuadernar.

Calificación. Cada pregunta se puntúa de 0 a 10 y la nota del examen será la media aritmética. Los resultados que no se justifiquen, o que se obtengan por procedimientos diferentes del indicado, no puntúan. Salvo que se indique otra cosa, debe operar con toda la precisión de la calculadora. **Entregue esta hoja al terminar el examen.**

1. a) Determine los puntos $x_0 < x_1 < x_2$ del intervalo $[-1, 1]$ que satisfacen

$$\int_{-1}^1 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)x^k dx = 0$$

para $k = 0, 1, 2$. (5 puntos)

b) Integre entre -1 y 1 el polinomio interpolador de grado tres de una función arbitraria $y = f(x)$, empleando como nodos los puntos x_0, x_1, x_2 del apartado a). (3 puntos)

c) Aplique los resultados de los apartados anteriores para desarrollar un método de integración numérica. ¿Lo identifica con alguno del texto-base?. (2 puntos)

2. Para resolver el problema $y'' + y' = x + y$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 4$, se ha aplicado uno de los métodos de Runge-Kutta estudiados al sistema de orden uno obtenido al introducir la variable $z = y'$. Los resultados se presentan a continuación.

x	y	z	k_{11}	k_{12}	k_{21}	k_{22}	k_{31}	k_{32}	k_{41}	k_{42}
0.0	2.000	4.000	4.000		3.800	-1.300	3.870	-1.390	3.722	-0.748
0.2	2.769	3.729	3.729	-0.760	3.653	-0.211		-0.274	3.674	0.236
0.4	3.506	3.679	3.679	0.227	3.702	0.672	3.746	0.630	3.805	
0.6	4.252	3.809	3.809	1.044	3.913	1.420	3.951	1.393	4.087	1.755
0.8				1.750	4.264	2.084	4.298	2.068	4.503	2.396
1.0	5.897	4.505	4.505	2.392	4.744	2.704	4.775	2.696	5.044	3.008

Complete las casillas vacías y calcule el valor aproximado de $y''(0.6)$.

3. Aplique el método simplex para resolver el problema de programación lineal:

maximizar $f(x, y) = 5x + 8y$, sujeto a

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 5y \leq 20$; $6x + 7y \leq 50$; $7x - 13y \geq -25$; $y \leq 2.5$

Notas. Comience en el punto $(0, 0)$. Se pide el valor máximo y el punto (o puntos) en que se alcanza. El resultado se puede obtener por métodos elementales, pero de lo que se trata es de demostrar que se comprende el método simplex.

4. Ajuste mediante regresión lineal los datos de la tabla al modelo no lineal $y = \frac{ax}{b+x}$.

x	1	2	4	5	8
y	0.73	1.43	2.75	3.37	5.08