

1. En este ejercicio se deberá aproximar la solución $y = y(x)$ del problema $y' = x^3 + y + 2$, $y(0) = -1$, mediante el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.1$. Supondremos que el error $E_k = |y(x_k) - y_k|$ que se comete al aproximar por ese método el valor de $y(x_k)$ mediante y_k verifica $E_k \leq 0.16 x_k$ para $0 < x_k < 1$.

a) ¿Cuántas raíces positivas tiene la ecuación $y(x) = 0$? Calcúlelas y acote el error cometido. (Para cada raíz r , lo que se pide es determinar $\tilde{r}$ y ε de manera que $|r - \tilde{r}| < \varepsilon$, siendo ε sea lo menor posible). (7 puntos)

b) Repita el apartado a) para la ecuación $y(x) = -0.6$. (3 puntos).

Solución. a) Comenzamos aproximando la función $y = y(x)$, esto es, resolviendo numéricamente el problema $y' = x^3 + y + 2$, $y(0) = -1$. El algoritmo del método de Euler es, en este caso: $y_{k+1} = y_k + 0.1 (x_k^3 + y_k + 2)$; $x_{k+1} = x_k + 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = -1$. Así se obtiene

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_k =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$y_k =$	-1	-0.9	-0.7899	-0.66809	-0.532199	-0.37902	-0.20442079	-0.00326287	0.23071084
$E_k \leq$	0	0.016	0.032	0.048	0.064	0.080	0.096	0.112	0.128

A primera vista observamos un cambio de signo entre y_7 e y_8 ; sin embargo, en realidad, con la estimación del error que tenemos, no podemos asegurar que $y(0.7)$ sea negativo. Veamos cuál es la mejor estimación.

De la expresión $E_k \leq 0.16 x_k$ se obtiene

$$y(0.6) \leq y_6 + E_6 \leq -0.20442079 + 0.096 = -0.10842079 < 0$$

$$y(0.8) \geq y_8 - E_8 \geq 0.23071084 - 0.128 = 0.10271084 > 0.$$

Sin embargo, no podemos asegurar que $y(0.7)$ sea negativo (tampoco que sea positivo), porque la cota del error (0.112) es mayor que $|y_7 - 0|$.

Como la función $y = y(x)$ es continua, la ecuación $y(x) = 0$ tiene alguna raíz en el intervalo $(0.6, 0.8)$.

Para comprobar que no puede haber más de una raíz positiva, observemos primero que $y'(0) = 0^3 - 1 + 2 = 1 > 0$ y razonemos por reducción al absurdo. Si la ecuación tuviera dos raíces positivas, existiría un punto $x_0 > 0$ tal que $y'(x_0) = 0$, siendo $y'(x) > 0$ para todo $x \in (0, x_0)$. Pero entonces $y = y(x)$ sería estrictamente creciente en el intervalo $(0, x_0)$, con lo que tendríamos $y(x_0) > y(0) = -1$ y, por lo tanto, $y'(x_0) = x_0^3 + y(x_0) + 2 > 0 - 1 + 2 = 1 > 0 = y'(x_0)$, lo que es imposible.

En consecuencia, la única raíz positiva r de la ecuación $y(x) = 0$ se encuentra en el intervalo $(0.6, 0.8)$, por lo que escogemos $\tilde{r} = 0.7$, $\varepsilon = 0.1$, y podemos afirmar que $r = 0.7 \pm 0.1$.

Nota. Sería erróneo afirmar que $r = 0.75 \pm 0.05$, porque, al no tener la certeza de que $y(0.7)$ sea negativo, no podemos asegurar que la raíz se encuentre en el intervalo $(0.7, 0.8)$.

b). En este caso, tenemos

$$y(0.3) \leq y_3 + E_3 \leq -0.66809 + 0.048 = -0.62009 < -0.6$$

$$y(0.4) \geq y_4 - E_4 \geq -0.532199 - 0.064 = -0.596199 > -0.6.$$

El resto del razonamiento es idéntico y podemos asegurar que la única raíz positiva r de la ecuación $y(x) = 0$ se encuentra en el intervalo $(0.3, 0.4)$, por lo que escogemos $\tilde{r} = 0.35$, $\varepsilon = 0.05$, de manera que $r = 0.35 \pm 0.05$.

2. Aplique *una* iteración el método de ascenso de máxima inclinación, con tamaño de paso $h = 0.1$, para calcular el máximo de la función $z = z(x, y)$ definida implícitamente mediante la ecuación $z^3 + x^2z^2 + y^2z^2 + z + x^2 + y^2 = 0$. Comience en $x = 0, y = 1$. La iteración concluye al obtener el valor de la función z en el nuevo punto. Tendrá que resolver una ecuación polinómica, de una sola variable, con coeficientes no enteros; utilice dos iteraciones del método de Newton-Raphson.

Solución. Comenzamos hallando el valor de la función $z = z(x)$ en el punto $x = 0, y = 1$. Sustituyendo, $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Antes de aplicar un método numérico, recordamos que, de existir raíces enteras, estas tienen que ser divisores del término independiente. Probando con $z = \pm 1$, encontramos la raíz $z = -1$. (*)

A continuación derivamos implícitamente para calcular el valor del gradiente en el punto $x_0 = 0, y_0 = 1$

Derivación respecto de x : $3z^2z_x + 2xz^2 + 2x^2zz_x + 2y^2zz_x + z_x + 2x = 0$ Sustituimos los valores $x = 0, y = 1, z = -1$: $3z_x - 2z_x + z_x = 0$ y obtenemos $z_x = 0$.

Derivación respecto de y : $3z^2z_y + 2x^2zz_y + 2yz^2 + 2y^2zz_y + z_y + 2y = 0$ Sustituimos los valores $x = 0, y = 1, z = -1$: $3z_y + 2 - 2z_y + z_y + 2 = 0$ y obtenemos $z_y = -2$.

El gradiente de la función z en el punto (x_0, y_0) es $\nabla z(x_0, y_0) = (0, -2)$. El nuevo punto es, por lo tanto, $(x_1, y_1) = (x_0, y_0) + h\nabla z(x_0, y_0) = (0, 1) + 0.1(0, -2) = (0, 0.8)$.

Calculamos $z(x_1, y_1)$. Sustituyendo: $z^3 + 0.64z^2 + z + 0.64 = 0$. Esta ecuación puede resolverse de forma exacta, pero, siguiendo las instrucciones del enunciado, aplicamos el método de Newton-Rapson. Sea $f(z) = z^3 + 0.64z^2 + z + 0.64$, de manera que $f'(z) = 3z^2 + 1.28z + 1$. El algoritmo de Newton-Raphson es, en este caso,

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 + 0.64z_k^2 + z_k + 0.64}{3z_k^2 + 1.28z_k + 1}$$

Tomamos como punto inicial $z_0 = -1$, para obtener $z_1 = -0.735294118$. Iterando de nuevo, $z_2 = -0.647945264$, con lo que concluimos que $z(x_1, y_1) \approx -0.647945264$.

(*) Nota. No es necesario comprobar que esta es la única raíz, porque asumimos, como dice el enunciado, que la función z queda definida por la ecuación que allí aparece. No obstante, es sencillo comprobar la unicidad: solo hay que dividir el polinomio $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ entre $z + 1$ para obtener el polinomio de segundo grado $z^2 + 1$, que solo tiene raíces complejas.

3. Ajuste, mediante regresión lineal múltiple, la variable z frente a x, y en la siguiente tabla. Debe calcular los coeficientes del plano de regresión $\tilde{z} = a_0 + a_1x + a_2y$ (6 puntos), el error estándar (2 puntos) y el coeficiente de determinación (2 puntos).

x	0	1	2	3	4
y	1	2	5	6	9
z	4	28	66	89	128

Nota. Para abreviar el cálculo del error estándar y del coeficiente de determinación, recuerdese que $\sum \tilde{z}_i w_i = \sum z_i w_i$ para $w = 1, x, y$.

Solución. Para poder plantear las ecuaciones normales (17.22), completamos primero la siguiente tabla

						Sumas
x	0	1	2	3	4	10
y	1	2	5	6	9	23
z	4	28	66	89	128	315
x^2	0	1	4	9	16	30
y^2	1	4	25	36	81	147
xy	0	2	10	18	36	66
zx	0	28	132	267	512	939
zy	4	56	330	534	1152	2076

Así obtenemos el sistema
$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 23 \\ 10 & 30 & 66 \\ 23 & 66 & 147 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 315 \\ 939 \\ 2076 \end{pmatrix},$$
 que se resuelve por el método de reducción:

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 23 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 20 & 41.2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 315 \\ 309 \\ 627 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 10 & 23 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 315 \\ 309 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = 7.5, a_1 = 15.9, a_0 = -3.3.$$

Calculemos el error estándar. Como $\sum \tilde{z}_i w_i = \sum z_i w_i$ para $w = 1, x, y$, entonces, poniendo $w = \tilde{z}$ (que es una combinación lineal de $1, x, y$), resulta $\sum \tilde{z}_i^2 = \sum z_i \tilde{z}_i$. Empleando la notación del texto-base, tenemos $S_r = \sum (z_i - \tilde{z}_i)^2 = \sum (z_i^2 + \tilde{z}_i^2 - 2z_i \tilde{z}_i) = \sum z_i^2 - \sum z_i \tilde{z}_i$. Operando

$$\sum z_i^2 = 16 + 784 + 4356 + 7921 + 16384 = 29461; \quad \sum z_i \tilde{z}_i = a_0 \sum z_i + a_1 \sum z_i x_i + a_2 \sum z_i y_i = -3.3 \times 315 + 15.9 \times 939 + 7.5 \times 2076 = 29460.6$$

luego $S_r = 0.4$, y el error estándar resulta ser $\sqrt{\frac{0.4}{5 - (2 + 1)}} = \sqrt{0.2} \approx 0.4472136$ (ver P484-3,4ed.- P488-3,5ed).

Para calcular el coeficiente de determinación, comenzamos por S_t , teniendo en cuenta que $\sum \tilde{z}_i = \sum z_i$, por lo que las variables $z, \tilde{z}$ tienen la misma media. Así

$$S_t = \sum (\tilde{z}_i - \bar{z})^2 = \sum (\tilde{z}_i^2 + \bar{z}^2 - 2\tilde{z}_i \bar{z}) = \sum \tilde{z}_i^2 + 5\bar{z}^2 - 2\bar{z} \sum \tilde{z}_i = \sum z_i \tilde{z}_i + 5\bar{z}^2 - 2\bar{z} \sum z_i = 29460.6 + 5 \left(\frac{315}{5} \right)^2 - 2 \frac{315}{5} 315 = 9615.6$$

Finalmente, el coeficiente de determinación es

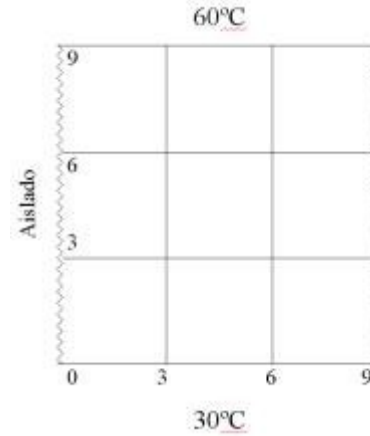
$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} = \frac{9615.2}{9615.6} \approx 0.9999584$$

4. Utilice diferencias finitas centradas para simular las temperaturas en una placa cuadrada de 9 cm de lado calentada como se indica en la figura (bordes laterales aislados, lado inferior mantenido a 30°C y el superior a 60°C). Considere $\Delta x = \Delta y = 3$.

a) Planteamiento del sistema en forma matricial (7 puntos).

b) Cálculo de temperaturas y flujos (coef. de conductividad térmica=3)(3 puntos).

Solución. Consideremos el origen en el extremo inferior izquierdo de la placa, de manera que las coordenadas (x, y) de cada punto verifiquen $0 \leq x, y \leq 9$. Resulta intuitivamente evidente que $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ en todo punto, en donde $T(x, y)$ es la temperatura en el punto (x, y) . No podemos utilizar esta simplificación al plantear el problema, pues se exige la justificación de todos los resultados. No obstante, esta intuición (percepción íntima e instantánea de una idea o una verdad que aparece como evidente a quien la tiene) facilitará la resolución del sistema. Denotemos, como de costumbre, $T_{i,j} = T(i\Delta x, j\Delta y) = T(3i, 3j)$, para $i = -1, \dots, 4, j = 0, \dots, 3$ (Los nodos situados fuera de la placa se emplearán para modelar las condiciones laterales de aislamiento).



Nota. Al hacer los cálculos, tenga en cuenta la simetría del problema.

Por las condiciones de frontera en los bordes superior e inferior, tenemos $T_{i,0} = 30$, $T_{i,3} = 60$, para $i = 0, \dots, 3$. La condición de aislamiento del borde lateral izquierdo significa que $\frac{\partial T}{\partial x}(0, y) = 0$, lo que se discretiza mediante diferencias finitas centradas como $T_{-1,j} = T_{1,j}$. Análogamente, para el borde derecho, $T_{4,j} = T_{2,j}$, en ambos casos, para $j = 1, 2$.

La ecuación laplaciana en diferencias, obtenida al discretizar las derivadas mediante diferencias finitas centradas, es $T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$,

para $i = 0, \dots, 3, j = 1, 2$. (Lo que se puede expresar, como una regla mnemotécnica, así $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$). Estas ocho ecuaciones forman el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{0,1} \\ T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ T_{0,2} \\ T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -30 \\ -30 \\ -30 \\ -60 \\ -60 \\ -60 \\ -60 \end{pmatrix}$$

Para resolverlo rápidamente, recordemos la intuición inicial, $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, que se modelaría como $T_{0,1} = T_{1,1} = T_{2,1} = T_{3,1}$; $T_{0,2} = T_{1,2} = T_{2,2} = T_{3,2}$, de donde obtendríamos:

$$\begin{aligned} -2T_{0,1} + T_{0,2} &= -30 \\ T_{0,1} - 2T_{0,2} &= -60 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} T_{0,1} &= T_{1,1} = T_{2,1} = T_{3,1} = 40 \\ T_{0,2} &= T_{1,2} = T_{2,2} = T_{3,2} = 50 \end{aligned}$$

Ahora es importante comprobar que, efectivamente, se trata de una solución del sistema: por una parte, los cuatro primeros elementos de cada una de las cuatro primeras filas suman -2 , siendo $(-2) \times 40 + 50 = -30$; por otra parte, los cuatro últimos elementos de cada una de las cuatro últimas filas suman -2 , siendo $40 + (-2) \times 50 = -60$.

Finalmente, calculamos los flujos (ecuaciones 29.14 y 29.15) en el nodo $(3i, 3j)$:

$$q_x = -3 \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{6} = 0 \quad ; \quad q_y = -3 \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{6} = -10$$

El flujo es, como cabía esperar, constate y dirigido hacia abajo.