

1ª semana. 1. Desarrolle segmentarias cúbicas para los siguientes datos $\frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 10 & 36 \end{array} \right.$.

Nota. El polinomio correspondiente al intervalo $[0, 1]$ es $f_1(x) = x^3$. Esta ayuda simplifica mucho los cálculos. *Segmentaria* es lo mismo que *trazadora* o *splin*.

Solución. El polinomio $f_1(x) = x^3$ correspondiente al primer intervalo verifica $f_1(1) = 1$, $f'_1(1) = 3$, $f''_1(1) = 6$. Por lo tanto, el polinomio correspondiente al intervalo $[1, 2]$, escrito en la forma de polinomio de Taylor centrado en $x_1 = 1$, será

$$f_2(x) = 1 + 3(x - 1) + \frac{6}{2}(x - 1)^2 + a(x - 1)^3$$

en donde a es la constante para la que se verifica $f_3(2) = 10$, es decir

$$10 = 1 + 3 + 3 + a \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

luego

$$f_2(x) = 1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 + 3(x - 1)^3$$

Procedemos de la misma manera para calcular el polinomio correspondiente al intervalo $[2, 3]$. Por una parte, $f_2(2) = 10$, $f'_2(2) = 18$, $f''_2(2) = 24$. En consecuencia

$$f_3(x) = 10 + 18(x - 2) + 12(x - 2)^2 + b(x - 2)^3$$

en donde b es la constante para la que se verifica $f_3(3) = 36$, esto es

$$36 = 10 + 18 + 12 + b \quad \Rightarrow \quad b = -4$$

Así se obtiene

$$f_3(x) = 10 + 18(x - 2) + 12(x - 2)^2 - 4(x - 2)^3$$

Notas.

1. Se confirma que la *ayuda* del enunciado no estaba equivocada al comprobar que $f''_3(3) = 24 - 24 = 0$.
2. Se puede, si desea, expandir los polinomios en potencias de x :

$$f_2(x) = 1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 + 3(x - 1)^3 = -2 + 6x - 6x^2 + 3x^3$$

$$f_3(x) = 10 + 18(x - 2) + 12(x - 2)^2 - 4(x - 2)^3 = 54 - 78x + 36x^2 - 4x^3$$

3. Si se aplican las instrucciones del texto-base, sin tener en cuenta que este ejercicio es mucho más simple que el problema general, probablemente se llegará a la misma solución presentada de la siguiente manera

$$f_2(x) = (2 - x)^3 + 4(x - 1)^3 + 6(x - 1)$$

$$f_3(x) = 4(3 - x)^3 + 6(3 - x) + 36(x - 2)$$

Por supuesto, el procedimiento es también correcto.

1ª semana. **2.** Utilice un método Runge-Kutta de cuarto orden, con tamaño de paso $h = 2$, para resolver el siguiente sistema desde $t = 1$ hasta $t = 3$. Opere con toda la precisión de su calculadora.

$$\frac{dx}{dt} = x + y + t \quad ; \quad x(1) = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 2y + 5t \quad ; \quad y(1) = 2$$

Solución. El *método clásico* de cuarto orden, según la terminología del texto-base, es:

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= z_i + h \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \\ k_1 &= f(t_i, z_i) & k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, z_i + \frac{hk_1}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, z_i + \frac{hk_2}{2}\right) & k_4 &= f(t_i + h, z_i + hk_3) \end{aligned}$$

en donde $h = 2$, $z_i = (x_i, y_i)$, $f(t, z) = f(t, (x, y)) = (t + x + y, 5t + 3x + 2y)$.

Comenzamos con $t_0 = 1$, $z_0 = (1, 2)$. Solo hay que hacer una iteración, porque $t_0 + h = 3$.

$$k_1 = f(t_0, z_0) = f(1, (1, 2)) = (4, 12)$$

$$k_3 = f(t_0 + 1, z_0 + k_2) = f(2, (22, 55)) = (79, 186)$$

$$k_2 = f(t_0 + 1, z_0 + k_1) = f(2, (5, 14)) = (21, 53)$$

$$k_4 = f(t_0 + 2, z_0 + 2k_3) = f(3, (159, 374)) = (536, 1240)$$

$$z_1 = (1, 2) + \frac{(4, 12) + 2(21, 53) + 2(79, 186) + (536, 1240)}{3} = \left(\frac{743}{3}, \frac{1736}{3}\right) = (247.666\ 67, 578.666\ 67)$$

Nota. Para la solución *exacta* se tiene $x(3) \approx 1182.7437$; $y(3) \approx 2731.9278$. Por *exacta* entendemos aquí al resultado de evaluar las funciones obtenidas mediante cuadraturas (sin error de truncamiento, aunque obviamente si habrá pequeños errores de redondeo al evaluar las exponenciales y los radicales que aparecen en esas funciones). No se podía esperar una buena aproximación con un tamaño de paso tan grande. Si se repite el ejercicio para $h = 0.1$, se obtiene $x(3) \approx 1182.1528$; $y(3) \approx 2730.5662$.

1ª semana. 3. Este ejercicio consiste en deducir un fórmula de diferenciación numérica siguiendo las instrucciones que se indican a continuación:

a) Determine el polinomio interpolador $P(x)$ de la función $f(x)$ por los puntos $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$. Utilice la forma de Lagrange. El resultado debe ser necesariamente una igualdad de la forma $P(x) = \dots$, cuyo miembro derecho debe ser una expresión en la que no aparezcan más letras que f, a, h, x . (3 puntos)

b) Obtenga una fórmula de diferenciación numérica aproximando $f'(a)$ mediante $P'(a)$. El resultado debe ser necesariamente de la forma $f'(a) \approx \dots$; el miembro derecho debe ser una expresión en la que no aparezcan más letras que f, a, h . (5 puntos)

c) La fórmula hallada en b) tiene una exactitud de $O(h^n)$. Determine el valor de n . Para justificar este apartado basta citar adecuadamente el texto-base. (2 puntos)

Solución.

a) El polinomio interpolador por los puntos $x = x_1, x = x_2, x = x_3$, expresado en la forma de Lagrange, es

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

En nuestro caso, $x_k = a + kh$, por lo que:

$$P(x) = \frac{(x - (a + h))(x - (a + 2h))}{(a - (a + h))(a - (a + 2h))} f(a) + \frac{(x - a)(x - (a + 2h))}{((a + h) - a)((a + h) - (a + 2h))} f(a + h) + \frac{(x - a)(x - (a + h))}{((a + 2h) - a)((a + 2h) - (a + h))} f(a + 2h)$$

Simplificando

$$P(x) = \frac{(x - a - h)(x - a - 2h)}{2h^2} f(a) - \frac{(x - a)(x - a - 2h)}{h^2} f(a + h) + \frac{(x - a)(x - a - h)}{2h^2} f(a + 2h)$$

b) Derivamos el polinomio $P(x)$, aplicando la regla de derivación de un producto en cada sumando:

$$P'(x) = \frac{(2x - 2a - 3h)}{2h^2} f(a) - \frac{(2x - 2a - 2h)}{h^2} f(a + h) + \frac{(2x - 2a - h)}{2h^2} f(a + 2h)$$

Finalmente, evaluamos en $x = a$, para obtener

$$P'(a) = \frac{-3f(a) + 4f(a + h) - f(a + 2h)}{2h}$$

por lo que

$$f'(a) \approx \frac{-3f(a) + 4f(a + h) - f(a + 2h)}{2h}$$

c) La expresión anterior corresponde a la fórmula de diferencias divididas de la ecuación (23.5) (P663+2 4ed. / P669 5ed.). Por lo tanto, $n = 2$.

1ª semana. 4. Aplique el método de Newton-Raphson para aproximar una de las soluciones del sistema de ecuaciones no lineales $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$. Aplique tres iteraciones del método, comenzando con $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Opere con toda la precisión de su calculadora.

Nota: Es evidente que las soluciones exactas son $(x, y) = (1, 2)$, $(x, y) = (2, 1)$. No le piden que calcule esos valores exactos, sino que aproxime uno de ellos por el método indicado. Se pregunta por el método de Newton-Raphson para sistemas; no se admite la reducción del problema al caso unidimensional, para después aplicar Newton-Raphson (en dimensión uno).

Solución. La matriz jacobiana de la función $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 5, xy - 2)$ en un punto $(x, y) \neq (0, 0)$ es $f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$. Su inversa es $(f'(x, y))^{-1} = \frac{1/2}{x^2 - y^2} \begin{pmatrix} x & -2y \\ -y & 2x \end{pmatrix}$. Así, el método de Newton-Raphson presenta, en este caso, el algoritmo

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \frac{1/2}{x_i^2 - y_i^2} \begin{pmatrix} x_i & -2y_i \\ -y_i & 2x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i^2 + y_i^2 - 5 \\ x_i y_i - 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Operando

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{0^2 - 1^2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} + \frac{1}{850} \begin{pmatrix} 6 & -22 \\ -11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{85} \begin{pmatrix} 86 \\ 171 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0117647 \\ 2.0117647 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comentario . El algoritmo de Newton-Raphson para aproximar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, en donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase uno, con $n \geq 1$, viene dado por

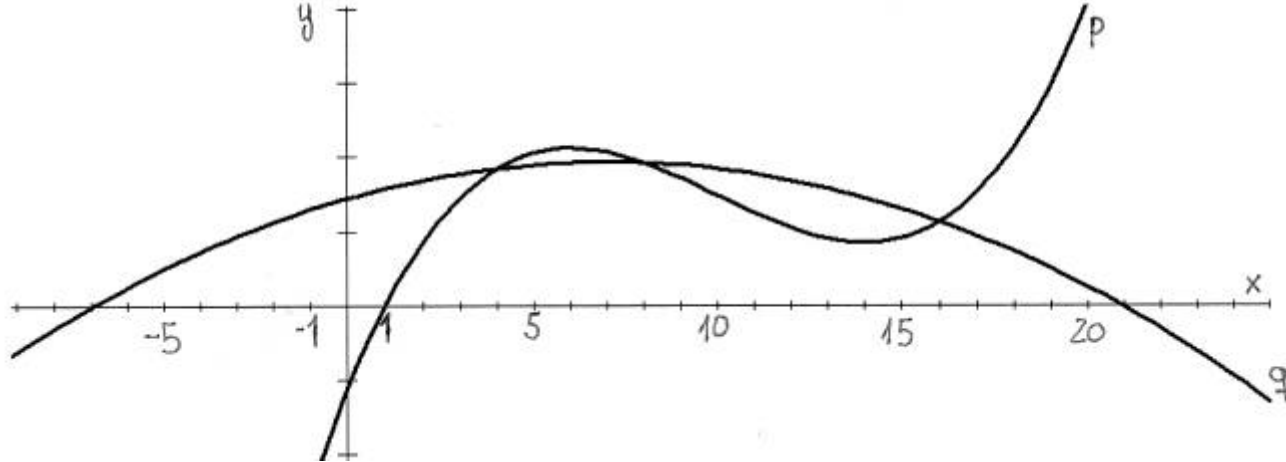
$$x_{i+1} = x_i - (df(x_i))^{-1} (f(x_i))$$

Véanse las secciones 6.2, 6.5.2 y 9.6 del texto-base. Recordemos del curso de cálculo en varias variables que las funciones de clase uno son diferenciables y su diferencial en el punto $x = a$ es una aplicación lineal $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Recordemos del curso de álgebra lineal que las aplicaciones lineales (entre espacios de dimensión finita) se representan mediante matrices. La matriz asociada a la diferencial $df(a)$ se denomina *matriz jacobiana* en el punto $x = a$ y se denota por $f'(a)$, siendo, $f'(a) = \left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$.

La matriz asociada a la aplicación inversa $(df(a))^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la matriz inversa $(f'(a))^{-1}$ de la matriz $f'(a)$.

En el caso unidimensional, $n = 1$, las matrices 1×1 se identifican con los números reales, de manera que $f'(a)$ es la derivada de f en el punto a , mientras que $(f'(a))^{-1} = \frac{1}{f'(a)}$.

2ª semana. 1. Se aplica una iteración del método de Müller, con los valores iniciales $x_0 < x_1 < x_2$, para obtener una primera aproximación x_3 de una raíz r del polinomio $f(x)$. Observando el dibujo adjunto, y sin hacer ningún cálculo, determine: cuál es la gráfica de f (esto es, p ó q) y los valores de x_0, x_1, x_2, x_3 y r . Solo se puntúan las respuestas razonadas.



Solución. En cada iteración del método de Müller se interpola por los puntos x_0, x_1, x_2 y se escoge como valor x_3 la raíz del polinomio interpolador más cercana a x_2 . El polinomio interpolador por tres puntos es de grado dos, por lo que su gráfica es una parábola. Puesto que p no es una parábola (tiene al menos dos puntos críticos), la gráfica de f debe ser p y, por lo tanto, la gráfica de la parábola debe ser q . En consecuencia, el valor buscado de la raíz es $r = 1$, punto donde p corta al eje de abscisas. Los puntos x_0, x_1, x_2 son las abscisas de los puntos de corte de las dos gráficas, luego $x_0 = 4, x_1 = 8, x_2 = 16$. Finalmente, las raíces del polinomio interpolador, cuya gráfica es q , son $x = -7, x = 21$. La más cercana a $x_2 = 16$ es $x_3 = 21$.

Obsérvese que lo determinante no es que q parezca una parábola, sino que q no puede serlo.

2ª semana. 2. Determine la aproximación del valor mínimo de la función $f(s, t) = s^4 t^2$ que se obtiene al aplicar 10 iteraciones del método de Newton $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - H_i^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_i)$, en donde $\mathbf{x}_i = (s_i, t_i)$, H_i es la matriz Hessiana de f en el punto $\mathbf{x}_i$ y $\nabla f(\mathbf{x}_i)$ es el gradiente de f en el punto $\mathbf{x}_i$, expresado como vector columna. Considere $\mathbf{x}_0 = (1, 2)$. Obviamente el valor mínimo es cero y se alcanza en $(0, 0)$. No le piden que calcule esos valores exactos, sino que los aproxime por el método indicado.

Solución. El gradiente de f en un punto $\mathbf{x} = (s, t)$, expresado como vector columna, es $\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 4s^3 t^2 \\ 2s^4 t \end{pmatrix}$. La matriz hessiana en ese punto es $H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 12s^2 t^2 & 8s^3 t \\ 8s^3 t & 2s^4 \end{pmatrix}$. Operando se tiene:

$$(H(\mathbf{x}))^{-1} \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 12s^2 t^2 & 8s^3 t \\ 8s^3 t & 2s^4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4s^3 t^2 \\ 2s^4 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{20s^2 t^2} & \frac{1}{5s^3 t} \\ \frac{1}{5s^3 t} & -\frac{3}{10s^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4s^3 t^2 \\ 2s^4 t \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \mathbf{x}$$

En consecuencia, el algoritmo del método de Newton se presenta en este caso como $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \frac{1}{5} \mathbf{x}_i$, esto es, $\begin{pmatrix} s_{i+1} \\ t_{i+1} \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} s_i \\ t_i \end{pmatrix}$. Al iterar se obtiene

$$\mathbf{x}_0 = (1, 2) \quad ; \quad \mathbf{x}_1 = \left(\frac{4}{5}, 2 \frac{4}{5} \right) \quad ; \quad \mathbf{x}_2 = \left(\frac{4^2}{5^2}, 2 \frac{4^2}{5^2} \right) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{10} = \left(\frac{4^{10}}{5^{10}}, 2 \frac{4^{10}}{5^{10}} \right) = (0.107\,374\,18, 0.214\,748\,36)$$

Finalmente, la aproximación del valor mínimo es $f(\mathbf{x}_{10}) = f\left(\frac{4^{10}}{5^{10}}, 2 \frac{4^{10}}{5^{10}}\right) = 2^2 \frac{4^{60}}{5^{60}} = 6.129\,982\,2 \times 10^{-6}$ y la del punto dónde se encuentra es $\mathbf{x}_{10} = (0.107\,374\,18, 0.214\,748\,36)$.

Notas. Obsérvese que la función alcanza su valor mínimo en infinitos puntos, en todos los de la forma (s, t) , con $s = 0$ o $t = 0$. El método de Nexton nos lleva en este caso hacia uno de ellos, $(s, t) = (0, 0)$.

Este ejercicio no está bien planteado si no se invierte la matriz y se simplifica el algoritmo *antes* de sustituir las variables por los valores correspondientes. Sirva como ejemplo para ilustrar cómo la implementación de un algoritmo puede aumentar o reducir su complejidad.

2ª semana. 3. Calcule la integral $\int_0^2 \frac{dx}{(1+x)^2}$ de tres maneras: de forma exacta y de forma aproximada por el método de Simpson 1/3 de aplicación simple y por la fórmula de Gauss-Legendre de 3 puntos. Comente los resultados.

Las puntuaciones de cada apartado son 1, 2 y 5 puntos respectivamente, más 2 puntos por el comentario sobre la relación entre la calidad de las aproximaciones y el número de nodos empleado.

Solución.

a) Se trata de una integral inmediata: $\int_0^2 \frac{1}{(1+x)^2} dx = - (1+x)^{-1} \Big|_0^2 = -\frac{1}{3} - (-1) = \frac{2}{3} = 0.666\ 666\ 67$

b) $\int_0^2 \frac{1}{(1+x)^2} dx \approx 2 \frac{f(0) + 4f(1) + f(2)}{6} = \frac{19}{27} = 0.703\ 703\ 7$, en donde $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

c) $\int_0^2 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{(u+2)^2} du = 0.5555556g(-0.774596669) + 0.8888889g(0) + 0.5555556g(0.774596669) = 0.664\ 359\ 9$, en donde $u = x - 1$ y $g(u) = \frac{1}{(u+2)^2}$.

d) Se ha alcanzado una mejor aproximación con el método de Gauss-Legendre que con la regla de Simpson 1/3. Aunque ambos métodos evalúan el integrando en tres puntos, los nodos del método de Simpson se escogen arbitrariamente en los extremos y en el punto medio del intervalo (obteniéndose un método que es exacto para polinomios de grado menor o igual a 3), mientras que los del método de Gauss-Legendre se escogen de manera que la fórmula sea exacta para polinomios de grado menor o igual a 5.

Para razonar en general, denotemos por $I(h)$ a la integral de una cierta función de clase 7 en el intervalo $[a-h, a+h]$ y por $S(h), G(h)$ a las aproximaciones obtenidas por las fórmulas de Simpson y Gauss-Legendre (de 3 puntos) respectivamente. Entonces $S(h) = I(h) + O(h^5)$, mientras que $G(h) = I(h) + O(h^7)$. Obsérvese que tanto $I(h)$ como $S(h)$ y $G(h)$ tienden a cero cuando $h \rightarrow 0$. Para valores de h suficientemente pequeños tendremos $|S(h) - I(h)| > |G(h) - I(h)|$, pero no necesariamente para todos los valores de h .

En consecuencia, la fórmula de Gauss-Legendre no proporciona *siempre* una mejor aproximación que la de Simpson. Obsérvese el siguiente ejemplo:

$$f(x) = 7x^6 - 10x^4$$

$$a = 0, h = 1.$$

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = -2$$

$$S = 2 \frac{f(-1) + 4f(0) + f(1)}{6} = -2$$

$$G = 0.5555556f(-0.774596669) + 0.8888889f(0) + 0.5555556f(0.774596669) = -2.32$$

Nota. Quienes no hayan calculado el valor exacto de la integral, obtienen cero puntos en los apartados a) y d).

2ª semana. 4. Las únicas operaciones permitidas en este ejercicio son sumar, restar y multiplicar matrices. No se permite resolver sistemas de otra manera, invertir matrices, etc.. Se ha obtenido $B = \begin{pmatrix} 1 & -1.1 \\ -1.9 & 3.1 \end{pmatrix}$ como aproximación de la inversa de $A = \begin{pmatrix} 3.1 & 1.1 \\ 1.9 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Utilice la matriz B para resolver de forma aproximada el sistema $\begin{cases} 3.1x + 1.1y = 5.3 \\ 1.9x + y = 3.9 \end{cases}$.

b) Aplique la técnica de refinamiento iterativo para mejorar la solución hallada en a). Basta con una iteración. Utilice la matriz B . Opere con 5 cifras significativas.

Obviamente la solución exacta es $x = 1, y = 2$. No le piden que la calcule, sino que la aproxime por el método indicado. El primer apartado vale 3 puntos y el segundo, 7.

Solución.

a) La solución *exacta* del sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.3 \\ 3.9 \end{pmatrix}$ sería $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 5.3 \\ 3.9 \end{pmatrix}$.

Obtenemos una primera aproximación $(\tilde{x}, \tilde{y})$ mediante $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 5.3 \\ 3.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1.1 \\ -1.9 & 3.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.3 \\ 3.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 2.02 \end{pmatrix}$.

b) Aplicamos la técnica del refinamiento iterativo para mejorar la solución aproximada $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (1.01, 2.02)$ hallada en el apartado a).

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} \tilde{x} + \Delta x \\ \tilde{y} + \Delta y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5.3 \\ 3.9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.3 \\ 3.9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow A \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5.3 \\ 3.9 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.3 \\ 3.9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.1 & 1.1 \\ 1.9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.01 \\ 2.02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.3 \\ 3.9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5.353 \\ 3.939 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.053 \\ -0.039 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Despejamos $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ utilizando la aproximación de la matriz inversa proporcionada en el enunciado

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -0.053 \\ -0.039 \end{pmatrix} \simeq B \begin{pmatrix} -0.053 \\ -0.039 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1.1 \\ -1.9 & 3.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.053 \\ -0.039 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0101 \\ -0.0202 \end{pmatrix}$$

Finalmente, obtenemos la nueva estimación $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 2.02 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0101 \\ -0.0202 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9999 \\ 1.9998 \end{pmatrix}$, esto es, $x \simeq 0.9999, y \simeq 1.9998$.

Nota. Es obligatorio resolver el ejercicio como se indica en el enunciado. No se trata solamente de una cuestión de cumplimiento de las normas (lo cual también es imprescindible en el ejercicio profesional), sino de comprender que los problemas que se plantean en la vida real incluyen casi siempre condiciones y limitaciones sobre los procedimientos, no solo sobre los objetivos.

Es interesante convencerse del disparate que supone resolver el sistema *de forma exacta* para ilustrar el procedimiento de refinamiento iterativo; si podemos calcular fácilmente esa solución exacta, ¿para qué queremos refinar nada?. Las técnicas de refinamiento iterativo son interesantes cuando no resulta accesible la solución exacta (por ejemplo, en sistemas con muchas variables). En este ejercicio lo que se hace es simular esas condiciones proporcionando una aproximación de la inversa e imponiendo que las únicas operaciones permitidas sean la adición y producto de matrices. Por cierto, resulta oportuno recordar que el producto de matrices no es conmutativo.