

Material autorizado. Exclusivamente, el libro de la asignatura, que puede contener anotaciones, una calculadora no programable y material de escritura. No se permite utilizar más de un libro, ni calculadoras programables ni hojas sin encuadernar.

Calificación. Cada pregunta se puntúa de 0 a 10 y la nota del examen será la media aritmética. Los resultados que no se justifiquen, o que se obtengan por procedimientos diferentes del indicado, no puntúan.

Entregue esta hoja al terminar el examen.

1. Desarrolle segmentarias cúbicas para los siguientes datos $\frac{x}{f(x)} \begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 10 & 36 \end{array}$.

Nota. El polinomio correspondiente al intervalo $[0, 1]$ es $f_1(x) = x^3$. Esta ayuda simplifica mucho los cálculos. *Segmentaria* es lo mismo que *trazadora* o *splin*.

2. Utilice un método Runge-Kutta de cuarto orden, con tamaño de paso $h = 2$, para resolver el siguiente sistema desde $t = 1$ hasta $t = 3$. Opere con toda la precisión de su calculadora.

$$\frac{dx}{dt} = x + y + t \quad ; \quad x(1) = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 2y + 5t \quad ; \quad y(1) = 2$$

3. Este ejercicio consiste en deducir un fórmula de diferenciación numérica siguiendo las instrucciones que se indican a continuación:

a) Determine el polinomio interpolador $P(x)$ de la función $f(x)$ por los puntos $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$. Utilice la forma de Lagrange. El resultado debe ser necesariamente una igualdad de la forma $P(x) = \dots$, cuyo miembro derecho debe ser una expresión en la que no aparezcan más letras que f, a, h, x . (3 puntos)

b) Obtenga una fórmula de diferenciación numérica aproximando $f'(a)$ mediante $P'(a)$. El resultado debe ser necesariamente de la forma $f'(a) \approx \dots$; el miembro derecho debe ser una expresión en la que no aparezcan más letras que f, a, h . (5 puntos)

c) La fórmula hallada en b) tiene una exactitud de $O(h^n)$. Determine el valor de n . Para justificar este apartado basta citar adecuadamente el texto-base. (2 puntos)

4. Aplique el método de Newton-Raphson para aproximar una de las soluciones del sistema de ecuaciones no lineales $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$. Aplique tres iteraciones del método, comenzando con $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Opere con toda la precisión de su calculadora.

Nota: Es evidente que las soluciones exactas son $(x, y) = (1, 2)$, $(x, y) = (2, 1)$. No le piden que calcule esos valores exactos, sino que aproxime uno de ellos por el método indicado. Se pregunta por el método de Newton-Raphson para sistemas; no se admite la reducción del problema al caso unidimensional, para después aplicar Newton-Raphson (en dimensión uno).